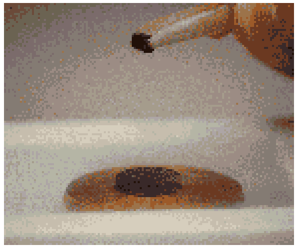
Truth is ever to be found in simplicity, and not in the multiplicity and confusion of things Isaac Newton (1642-1727)
Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen.
Immanuel Kant (1724-1804)



Corso di Fisica per CTF

AA 2015/16

F.-L. Navarria
francesco.navarria@unibo.it
http://www.bo.infn.it/ctf/eser

Corso di Fisica per CTF

- struttura del corso
  - lezioni ~32h (F.-L. Navarria), ~32h (N. Lanconelli)
- orario delle lezioni
  - lun 15-17h; mar 9-11h; mer 9-11h [Aula 2D, Via della Beverara 123/1]
- ricevimento (FLN, Dipart. Fisica e Astronomia, V.le C. Berti Pichat 6/2, 2° piano)
  - lun 13-14h; mar 14-15h e mer 12-13h (verificare prima con un'e-mail che non siano sopraggiunti impegni)
- tutorato (studenti): [via della Beverara 123/1]

(*) jeannette.manzi2@unibo.it
(*) marta.saccoletto@studio.unibo.it
(*) su appuntamento
raffaele.pecoraro@studio.unibo.it
lorenzo.casadei2@studio.unibo.it

Testi consigliati - Fisica

- F. Borsa e A. Lascialfari, *Principi di Fisica per indirizzo biomedico e farmaceutico*, EdiSES (ad es.)
- D.C. Giancoli, *Fisica*, Casa Ed. Ambrosiana (ad es.)
- R.A. Serway e J.W. Jewett Jr , *Principi di Fisica*,EdiSES (ad es.)
- …

An interviewer asked novelist and Nobel laureate William Faulkner.: "Some of your readers claim they still cannot understand your work after reading it two or three times. What approach would you advise them to adopt?" Faulkner replied, "Read it a fourth time."

- (J.W. Kane e M.M. Sternheim, *Fisica biomedica*, Ed. E.M.S.I.)
- (D.M. Burns e S.G.G. MacDonald, *Fisica per gli studenti di biologia e medicina*, Ed. Zanichelli)
- [F.R. Cavallo e F.-L. Navarria, *Appunti di Probabilità e Statistica per un corso di Fisica*, Ed. CLUEB]

URL consigliati - Fisica

- pagina principale per gli studenti di CTF
  http://www.bo.infn.it/ctf/eser
- programma del corso http://www.farbiomot.unibo.it/it/corsi/insegnamenti/insegnamento/2015/349729
- **eserciziario elettronico** (link nella pag. pr.) http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/farmacia/all/navarria/stuff/eser/eser.html
- [meccanica dei fluidi]
  http://ishtar.df.unibo.it/mflu/html/cover.html
- [diffusione nelle soluzioni]
  http://ishtar.df.unibo.it/dif/html/diffu/index.html
- [corrente elettrica e circuiti]
  http://ishtar.df.unibo.it/em/elet/cover.html
- [modelli atomici]
  http://ishtar.df.unibo.it/ma/index.htm

Lo scritto: i parziali

- sono previsti due scritti p., uno a ½ corso (Termodin. inclusa) ~ metà Aprile, l'altro fine Maggio-inizio Giugno alla fine del corso, ciascuno con tre esercizi e 45 min di durata
- i p. si superano con tre + ε esercizi corretti (*) su sei in complesso [avendo quindi partecipato a tutti e due i p.]
- i p. hanno validità un anno (→ Luglio 2017)

Compito di Esame di Fisica - Facolta` di Farmacia - A.A. 2014/15
Sede di: Bologna-CTF - parz1 Appello 20 04 2015
Cognome e Nome.................................. N.Matr.................

46

1) Quale potenza, in watt, deve esprimere un corridore, di massa uguale m = 0.707E+02 kg, che partendo con una velocità v0 = 0.292E+02 dm/s, raggiunga, in t = 0.745 sec, una velocità v1 = 28.81 km/h?

esempio

2) Un cilindro di legno di raggio r = 0.7720E+01 cm e di altezza h = 0.3265E+01 dm emerge per una frazione f = 0.4603E+02 % del suo volume in acqua di mare. Trovare la densità del legno. La densità relativa dell'acqua di mare e` 1.03.

3) Un tratto di una arteria è ristretto da una placca arteriosclerotica al 21.94% della sua sezione trasversale. Qual è la diminuzione percentuale di pressione in questo punto? La pressione del sangue in una arteria sana è 100 mm Hg e la velocità e` 0.120 m/s. La densità del sangue è 940 kg/m**3.

(*) vedi lucido successivo

Lo scritto: tradizionale

- lo scritto globale consiste di sei esercizi da completare in 1h30
- si supera con un minimo di tre esercizi corretti su sei [formula risolutiva (che permette di estrarre il risultato sostituendo le grandezze note), risultato con unità di misura e 3 cifre significative]
- è valutato suff./insuff.
- lo scritto g. vale tre mesi

esempio

Compito 2

Scuola di Farmacia, ScMot e BioTec - Sede di Bologna
Corso di Chimica e Tecnologia Farmaceutica - A.A.2014/15
Compito di esame di Fisica
Appello 8o 2016/02/19

Cognome e nome.. **N.Matricola**..................

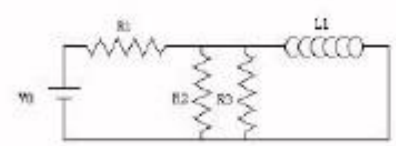
1)Un bambino lancia dei sassi contro una parete quadrata di lato 8.69 m in cui sono stati praticati 477 fori circolari del diametro di 6.95 cm. Se il bambino non mira e i sassi sono piccoli rispetto alle dimensioni dei fori, qual è il numero più probabile di sassi che passerà oltre la parete ogni 349 lanci?

2)L'area superficiale di una membrana cellulare è 0.5143E-08 m^2 e il suo spessore è 0.1342E-07 m. Assumendo che la membrana si comporti come un condensatore piano con costante dielettrica relativa pari a 5.0 e che il potenziale sulla superficie esterna sia di 53.31 mV più grande che sulla superficie interna, qual è la carica che si trova sulla superficie esterna?

3)Si calcoli la lunghezza d'onda associata ad elettroni la cui velocità è 1/ 0.8075E+02 della velocità della luce in un mezzo di indice di rifrazione n = 0.1418E+01.

4)Una forza di 0.305E+04 N è applicata ad un estremo di una sbarra metallica rigida. Se la sbarra è fissata all'altro estremo e la direzione della forza forma un angolo θ = 0.33[illegible]E+01 gradi con l'asse della sbarra e ancora il momento della forza è di 14.7 newton-metro, qual è la lunghezza della sbarra?

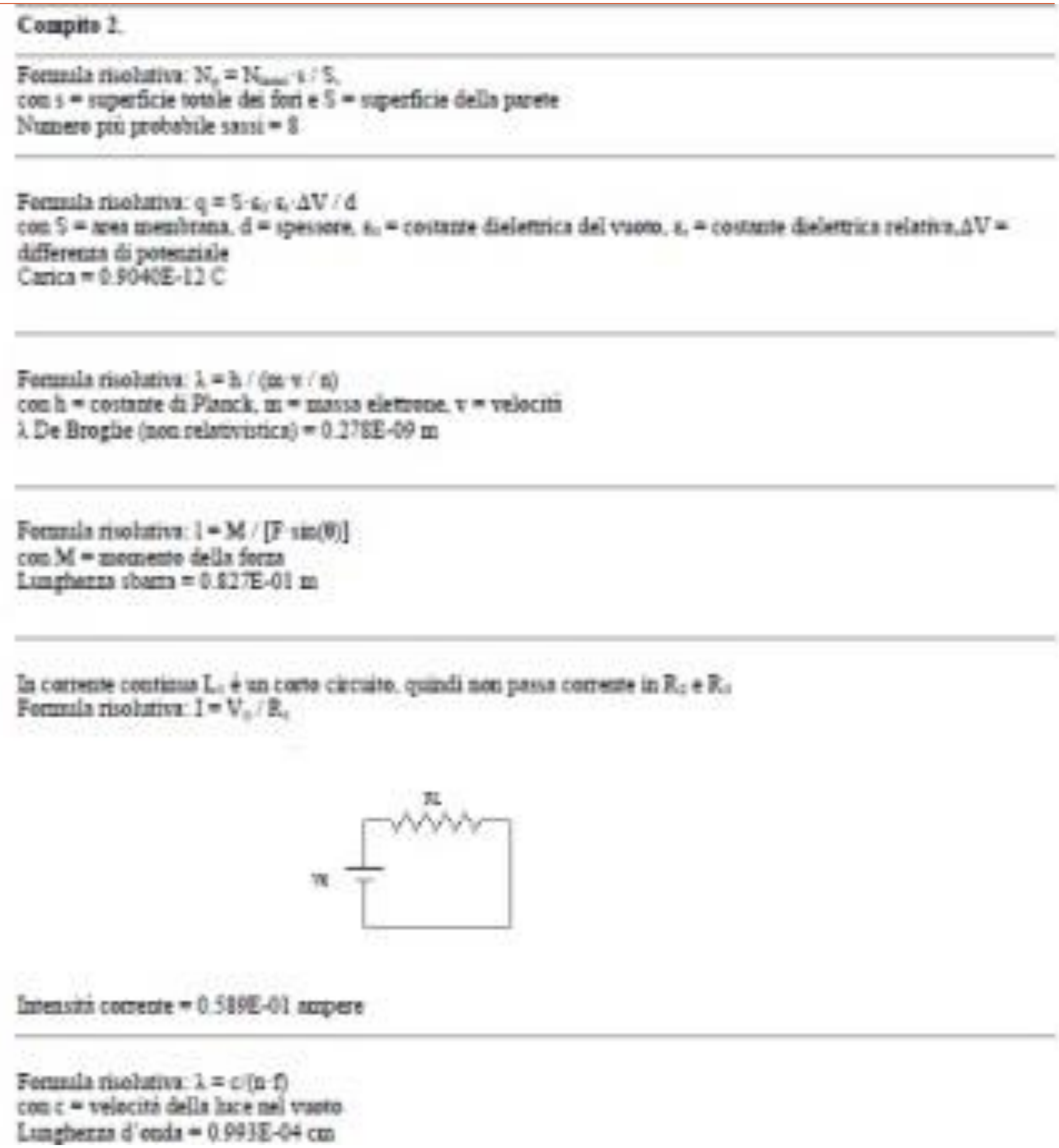
5)Si calcoli la corrente continua I che attraversa la batteria nel circuito in figura (V_0 = 0.848E+02 V, R_1 = 0.5·R_2 = 0.25·R_3 = 0.144E+04 ohm, L_1 = 16.879 mH).



6)Si calcoli la lunghezza d'onda λ, in cm, di un'onda elettromagnetica che si propaga in un mezzo avente indice di rifrazione n = [illegible] con frequenza f = 0.2430E+15 Hz.

Esempio pag. 6 / soluzioni

Es. di soluzioni prodotte dall'eserciziario



Compito 2.

Formula risolutiva: $N_s = N_{sassi} \cdot s / S$,
con s = superficie totale dei fori e S = superficie della parete
Numero più probabile sassi = 8

Formula risolutiva: $q = S \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \Delta V / d$
con S = area membrana, d = spessore, ε_0 = costante dielettrica del vuoto, ε_r = costante dielettrica relativa, ΔV = differenza di potenziale
Carica = 0.9040E-12 C

Formula risolutiva: $\lambda = h / (m \cdot v / n)$
con h = costante di Planck, m = massa elettrone, v = velocità
λ De Broglie (non relativistica) = 0.278E-09 m

Formula risolutiva: $l = M / [F \cdot \sin(\theta)]$
con M = momento della forza
Lunghezza sbarra = 0.827E-01 m

In corrente continua L_1 è un corto circuito, quindi non passa corrente in R_2 e R_3
Formula risolutiva: $I = V_0 / R_1$

Intensità corrente = 0.589E-01 ampere

Formula risolutiva: $\lambda = c / (n \cdot f)$
con c = velocità della luce nel vuoto
Lunghezza d'onda = 0.993E-04 cm

Programma a blocchi - Fisica

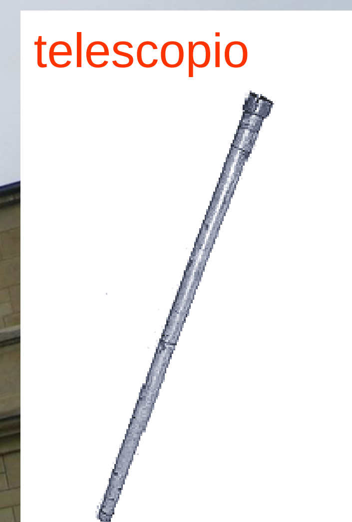
- Modulo 1 [F.L. Navarria]
  - grandezze fisiche e loro misura [le fondamenta] (5 h)
  - meccanica (punto, corpi, fluidi) [il modello di tutta la fisica] (15 h), incluse oscillazioni [moto armonico]
  - termodinamica [la meccanica dei grandi numeri] (8 h)
- Modulo 2 [N. Lanconelli]
  - elettromagnetismo [la meccanica delle cariche elettriche] (10 h)
  - (oscillazioni,) onde, ottica [onde meccaniche etc. etc.] (10 h)
  - microfisica (fisica atomica) [micromeccanica] (4 h)
- Esercizi (>12 h)

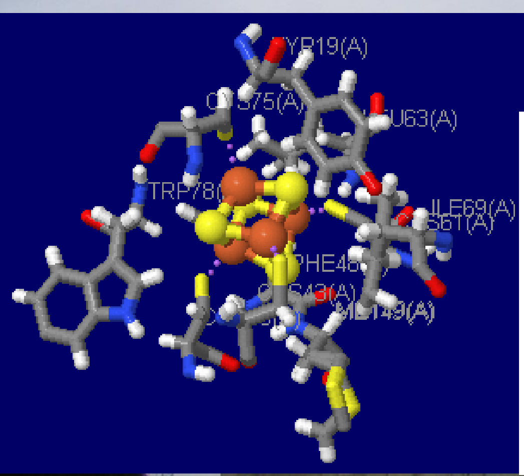
[margine di errore ± 2 h]

com’è fatto l’universo?
quanto è grande?
com’è fatta la materia che ci circonda?
che cosa la tiene insieme?
che cosa c’è dentro?

2005 = IYPhysics
2009 = IYAstronomy
2015 = IYLight

~10^{23} stelle
(~0.1 moli),
~10^{11} galassie





sistema a raggi X per piccole molecole

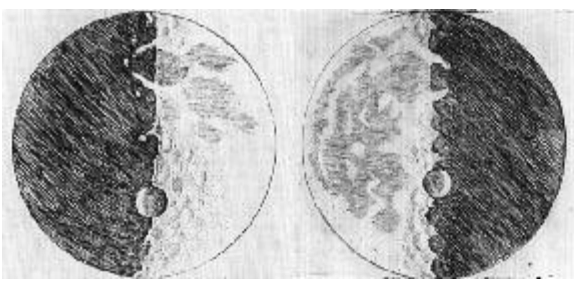
una storia sintetica

- VI secolo a.C.: nascita del pensiero scientifico, approccio naturalistico (abbandono del mito), atomisti greci, Democrito (v. De Rerum Natura)
- Platone (matematica), Aristotele (fisica*): il mondo serve un fine (regresso rispetto al naturalismo)
- XVII secolo: rivoluzione, tecnologia → metodo galileiano, Newton (cause del moto, unificazione del terrestre e del celeste)
- XIX secolo: unificazione e.m. (Faraday, Maxwell) → applicazioni tecnologiche
- XX secolo: altre rivoluzioni (relatività, meccanica quantistica → applicazioni tecnologiche)

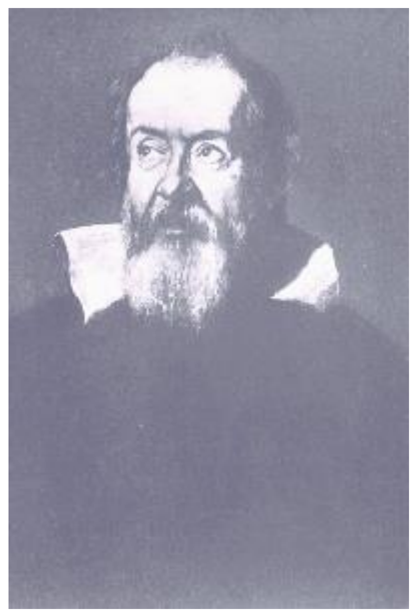
* purtroppo: nihil est quod videtur

1609-1610

- una 1a rivoluzione – si perdono corpi celesti perfetti e centralità della terra (Harriot, Galilei, Kepler)
  - l'imperfezione della superficie lunare
  - i satelliti che ruotano intorno a Giove (7 gennaio 1610)
  - anelli di Saturno, fasi di Venere (11 dicembre 1610), macchie solari



La luna disegnata da Galilei



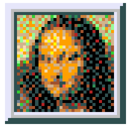
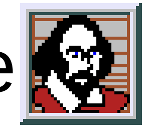
fino a ~1610 osservazione a occhio nudo, ~1 mm → 1 km, poi telescopio e microscopio: il mondo appare molto diverso

Ancora sul '600

- Il '600 è il secolo delle rivoluzioni
  - Giordano Bruno: un universo infinito (ora sappiamo che non è così [età13.7 Ganni, r_U = 4.4 10^{26} m], ma che è molto più grande di quanto appare ad occhio nudo)
  - la misura e il metodo, Galilei; prime misure precise di tempo (G., Kepler, Huygens, Newton)
  - le leggi della meccanica, (G.) Newton, e la gravitazione universale, Newton
  - il calcolo infinitesimale (Newton, Leibnitz)
  - la perdita della certezza e la nascita del calcolo delle probabilità (B. Pascal, Lettera del 24 Agosto 1654 a P. de Fermat sul gioco incompiuto): il futuro non è più imprevedibile, possiamo pianificare le nostre attività e la nostra vita sulla base della probabilità di verificarsi dei più svariati eventi – nozione di rischio, utile in tutti i casi di imperfezione, quindi *sempre* – nozione di incertezza, fondamentale per la misura (e per la meccanica quantica)

Misura

- Due caratteristiche sono inseparabili dal concetto di misura (di una grandezza fisica)
  – Gli ordini di grandezza (le unità di misura sono comunque scelte ‘arbitrariamente’/indipendentemente)
  – L’incertezza ossia l’errore di misura (che si può capire, ridurre, rendere trascurabile, ma *non* eliminare), stimato ed espresso in forma probabilistica (in particolare, se casuale)
- In (quasi) tutte le discipline scientifiche, un esperimento implica la raccolta e la successiva analisi di dati: spesso si tratta di estrarre un qualche parametro e stimarne l’incertezza.

 Es. di domande e risposte  (*)

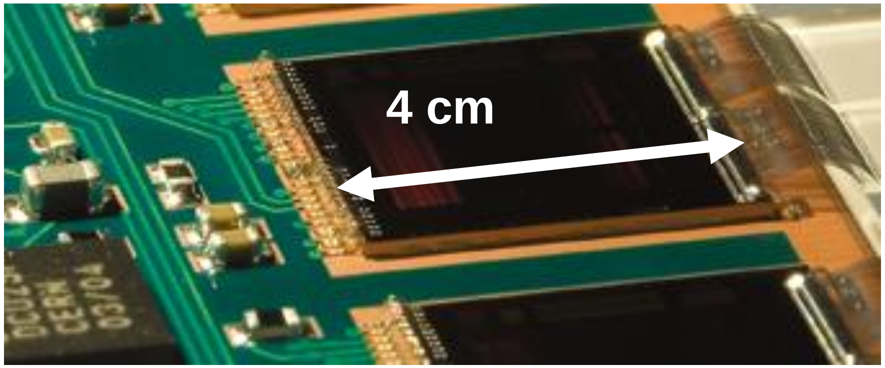
- 1) Quanto è alta la torre Eiffel? 2) Qual'è l'età dell'universo? 3) E' più bello un quadro astratto o uno figurativo? 4) Sono più veloci i neutrini o la luce nel vuoto? 5) Profuma più una violetta o una rosa? 6) E' più caldo in cima al Cervino o accanto alle piramidi di Gizah? 7) E' più musicale un *la* (440.0 Hz) o un *do* (261.6 Hz)? - Sono tutte domande che ci possiamo porre riguardo a quello che ci circonda.

- **La fisica può dare risposta ad alcune domande: solo quelle suscettibili di una risposta quantitativa (1, 2, 4, 6) attraverso un procedimento di misura/confronto dopo aver stabilito una opportuna unità di misura** – E' difficile stabilire l'unità di misura di bellezza, di profumo o di musicalità (anche se è possibile stabilire relative scale).

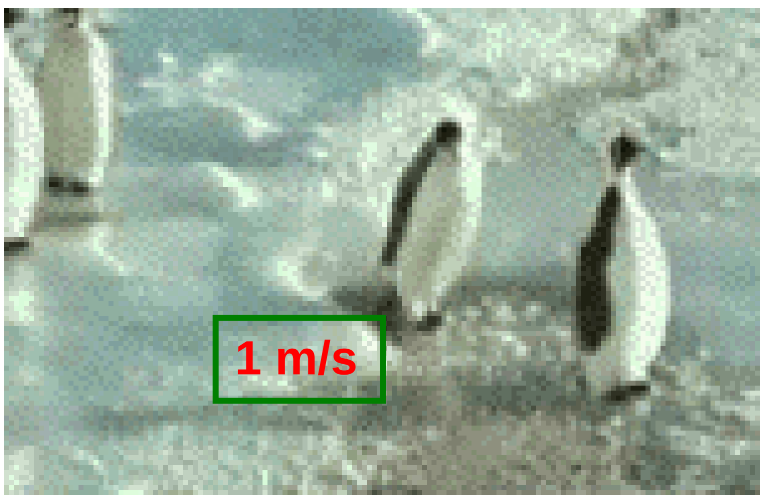
- Parafrasando WShakespeare: c'è più fisica nell'ala di una farfalla dalle ali blu (vedi pag. 16) di quanto si possa immaginare (riflessione, cambiamento di fase, interferenza) – *nihil est quod videtur*.

(*) non mostrato a lezione

Il mondo che ci circonda e la sua misura (I)



Microelettronica

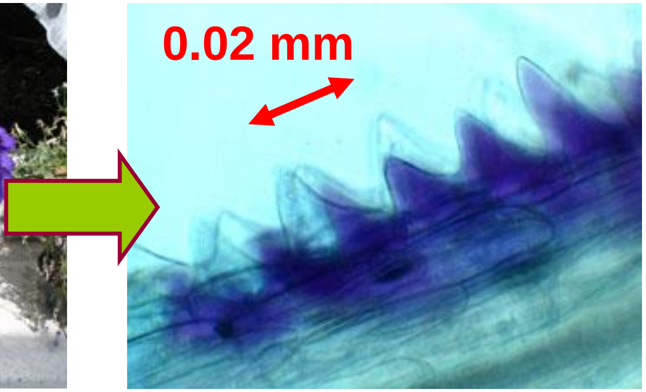


Pinguini

Il mondo che ci circonda e la sua misura (II)

Morpho: un es. di *interferenza* (le ali *non* contengono un pigmento blu!)

Un altro es. di *interferenza*: lamina di acqua saponata



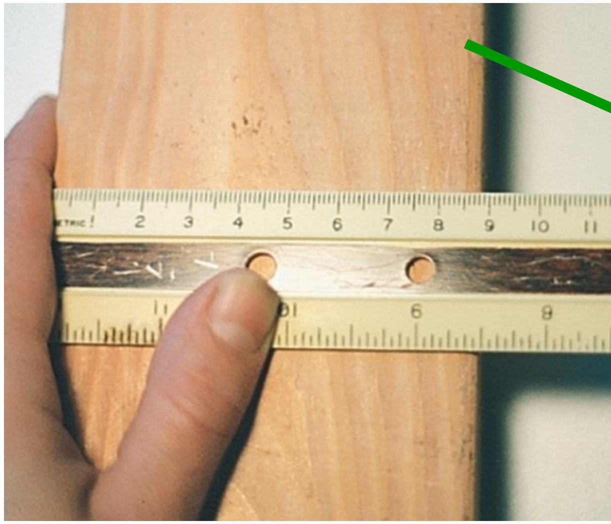
Quello che la fisica <u>è</u>

- Fisica (dal greco φυσικός (*phusikos*) = *naturale*, φύσις = *natura*), si basa su due assiomi:
  - le leggi della natura sono valide ovunque (in qualsiasi tempo e luogo)
  - l'osservazione porta ad una decisione sulla validità di modelli per una descrizione di eventi naturali
- Sperimentazione sulla natura a tutti i livelli, dai complessi ai più elementari, effettuata partendo dalla nozione di <u>misura</u> (quantitativa, riproducibile) e dalla <u>definizione operativa di grandezza fisica attraverso il processo di misura</u>

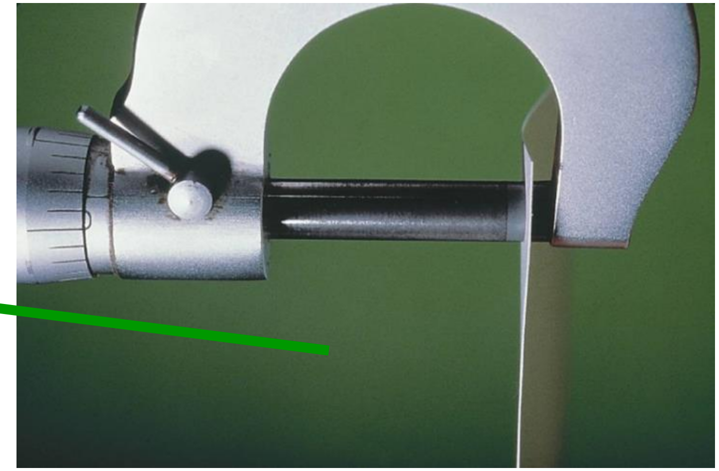
  $\Rightarrow$ <u>misura quantitativa</u>, quindi suscettibile di correlazione numerica con altre misure (entro gli errori statistici di misura)

  $\Rightarrow$ <u>misura riproducibile</u>, cioè indipendente dal soggetto che sperimenta e dall'apparato utilizzato (tenuto conto degli errori sistematici e della sensibilità dell'apparato)

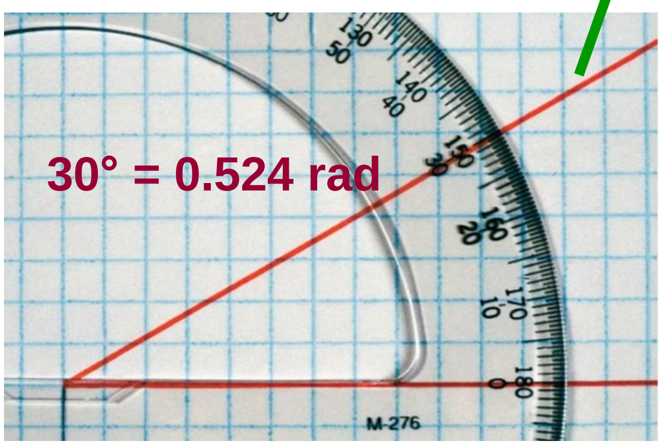
Definizione operativa di una grandezza fisica, processi di misura diretta (confronto) e indiretta



Misure dirette

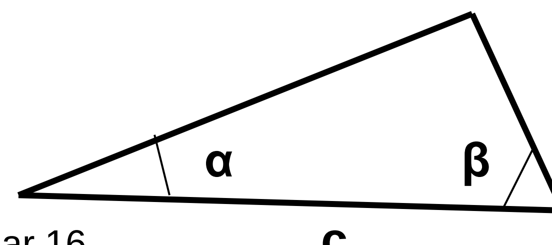


0.07 mm → ←



Misura indiretta: altezza delle montagne mediante triangolazione, temperatura attraverso una misura di resistenza etc.

1a triangolazione della superficie
(della Francia): Jean Picard, 1668
c = 11 km diritti a Parigi in periferia



$$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$

b = ?

Misure dirette e indirette

Misura diretta quando si confronta direttamente la grandezza misurata con un campione di misura nota.

Esempio: misura di lunghezza con un regolo graduato.

Misura indiretta se ciò che si misura non è la grandezza che interessa, ma altre che siano legate a essa da relazioni funzionali.

Esempio: misura della *distanza* di un oggetto con un sonar.

ovvero

misura del *tempo* percorso dall'onda sonora per andare e tornare dall'oggetto; conoscendo la velocità di propagazione dell'onda posso ricavare la distanza dell'oggetto che l'ha riflessa.

Misura/definizione operativa di grandezza (2)

- Il processo di misura è centrale, fondamentale; per parlare di grandezza fisica occorre dire come si misura:

$\Rightarrow$ scelta dell'unità di misura (arbitraria, comoda)

$\Rightarrow$ procedimento di confronto con l'unità di misura

$\boxed{G = g\ U_g}$ $G' = g'\ U_g$ etc. ossia $G/U_g = g$ etc.

$l = 8.8$ cm ; $s = 0.07$ mm ; $\gamma = 30°$

G - grandezza, g - numero puro che esprime il rapporto con l'unità di misura U_g

$\Rightarrow$ misurando G con unità di misura diverse si ha

$\boxed{G = g\ U_g = g'\ U_g'}$ $\rightarrow$ $g' = g\ U_g/\ U_g'$

quindi se l'unità di misura è più piccola G è espressa da un numero più grande etc. $l = 8.8$ cm $= 88$ mm

Dimensioni delle grandezze fisiche

- una lunghezza, uno spessore, una distanza, uno spazio percorso Δx sono tutte grandezze fisiche omogenee con una lunghezza, cioè hanno tutti la stessa dimensione che si indica con [L] – NB si prescinde dal valore numerico
- allo stesso modo una qualsiasi superficie (cerchio, quadrato etc.) è omogenea con il quadrato di una lunghezza e si indica con $[L^2]$ – sia 15 km^2 che 0.7 μm^2 etc.
- il tempo misurato a partire da un istante iniziale ed un intervallo di tempo Δt sono omogenei con un tempo: [T]
- in generale in meccanica: $\boxed{[G] = [L^\alpha M^\beta T^\gamma]}$ con α,β,γ +vi,-vi,0
- *tutte le relazioni in fisica devono essere dimensionalmente corrette*; qualsiasi sia la combinazione di grandezze che compare nella relazione, *le dimensioni a dx dell'= devono essere le stesse di quelle a sx dell'=* : $[v] = [s/t] = [LT^{-1}]$

Prefissi e notazioni

- I risultati delle misure possono essere espressi da numeri molto più grandi o più piccoli di 1 - dipende dall'unità di misura scelta - si usano quindi i prefissi, comunemente:

[atto (a) 10^{-18}; femto (f) 10^{-15},] pico (p) 10^{-12}; nano (n) 10^{-9}; micro(μ) 10^{-6}; milli (m) 10^{-3}; centi (c) 10^{-2}; deci (d) 10^{-1}; deca (da o D) 10^{1}; etto (h) 10^{2}; chilo (k) 10^{3}; mega (M) 10^{6}; giga (G) 10^{9}; tera (T) 10^{12}; peta (P) 10^{15}; [exa (E) 10^{18}]

- Le grandezze sono espresse mediante lettere (ad es. iniziale in italiano o in inglese) ma l'alfabeto latino esteso spesso non è sufficiente ad evitare confusione di notazioni, così si usano anche lettere greche, comunemente:

minuscole: α,β,γ,δ,ε,η,θ,λ,μ,ν,π,ρ,σ,τ,φ,χ,ψ,ω

maiuscole: Γ,Δ,Π,Σ,Φ,Ω

- Le unità di misura abbreviate si indicano con una lettera maiu-scola quando corrispondono alla 1a lettera di un nome proprio - 1 A = 1 ampère, 1 N = 1 newton, 1 Hz = 1 hertz etc.

Leggi, modelli, teorie

- misure contemporanee di diverse grandezze permettono di ottenere, entro gli errori di misura, relazioni fra le grandezze misurate (ad es. temperatura esterna ed ora del giorno, tempo e distanza di caduta per un corpo in un fluido)

  $\Rightarrow$ leggi esprimibili in linguaggio matematico

  ad es. funzioni elementari, eq. fra grandezze finite, eq. differenziali etc.

  in generale informazione/correlazione sotto forma di tabella, grafico, n-tupla, database $\leftrightarrow$ calcolatrice, PC etc.

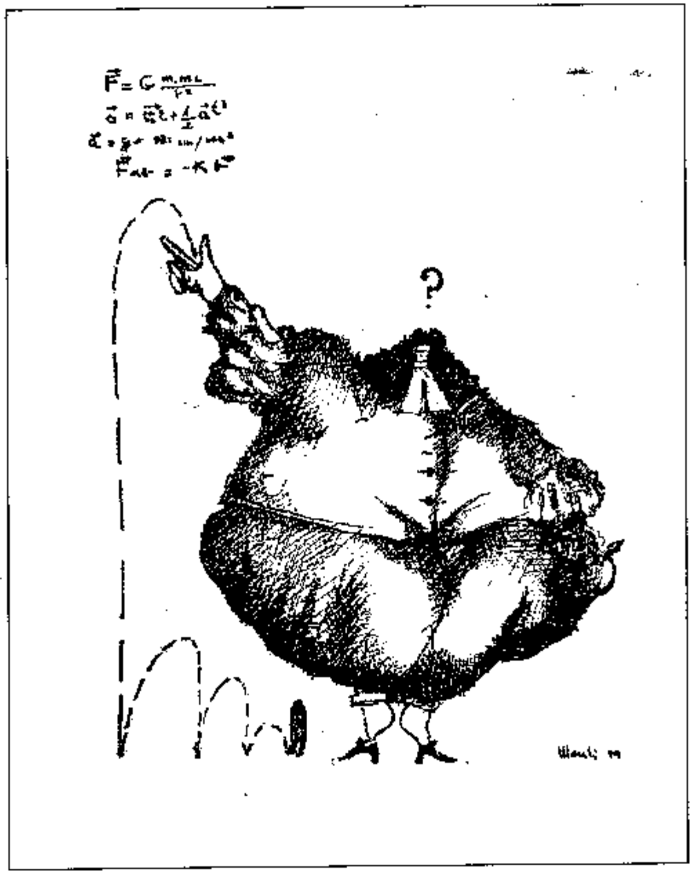
  $\Rightarrow$ (diverse) leggi $\rightarrow$ modello/teoria da confrontare con ulteriori misure (verifica o falsificazione sperimentale, metodo sperimentale galileiano)

Probabilità, preliminari

- Prima di discutere ulteriormente la misura di una grandezza fisica e la precisione di misura, si premette la nozione di probabilità (ed il relativo calcolo), che serve a quantificare l'‘incertezza nelle misure: il valore ‘vero’ di una grandezza *non* è conoscibile, ma solo stimabile
- Probabile: dal verbo latino *probare* (provare, verificare) e dal suffisso –*ilis* (che può essere) → “che può essere verificato”, dove la verifica è empirica

Probabilità

- perchè?
- si lancia una moneta (*evento, esperimento*) e si potrebbe scomodare Newton (e un PC)
- oppure si può dire che non sappiamo esattamente cosa accadrà in un dato *caso*, ma che mediamente P(T) = P(C) = ½ = 50% dove P è la *probabilità* – nel 50%(50%) dei *casi* esce T(C)
- *a fortiori*, seguire, una ad una, le molecole di un gas è impossibile anche con una 'farm' di 10^5 PC (ad es. centro di calcolo del CERN)



Un lancio di moneta potrebbe essere seguito in modo deterministico usando le equazioni di Newton ...

Definizioni di probabilità

Formalizziamo il concetto, associando a ogni evento x un numero P(x), probabilità, tale che:

- **P(evento certo) = 1**
- **P(evento impossibile) = 0**
- Per ogni evento x: $\mathbf{0 \le P(x) \le 1}$
- Se x_1 e x_2 sono due eventi **mutuamente escludentesi**

  $$\mathbf{P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)}$$
- Se $\{x_i, i=1,N\}$ è un **gruppo completo di eventi mutuamente escludentesi**

  $$\mathbf{\Sigma_i\, P(x_i) = 1}$$

Esistono diverse definizioni possibili di probabilità che soddisfano questi assiomi

Probabilità condizionata

- Probabilità che accada A *dopo che* è accaduto l'evento B, si indica con

  $P(A|B)$

- es. A = superare lo scritto di Fisica, B_j = risolvere correttamente j esercizi, chiaramente

  $P(A|B_3) > P(A|B_2)$

  (la prima è 1, la seconda è 0)

- può succedere che P(A) sia piccola mentre P(A|B) è grande: A = la squadra ultima in classifica vince il campionato, B = le altre squadre sono tutte squalificate per illecito sportivo

Relazione fra eventi

L'evento A è **dipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada dipende dal fatto che accada B.

Esempio: A = "Il Venezia vince lo scudetto del basket",
B = "I più forti giocatori del Venezia si infortunano durante i play-off"

$P(A) \neq P(A|B)$ con $P(A|B)$ probabilità condizionata

L'evento A è **indipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada non dipende da B

Esempio: A = "Il Bologna vince lo scudetto del basket"
B = "Il Bologna vince il campionato di calcio di serie A"

per eventi indipendenti $P(A|B) = P(A)$

Due eventi A e B sono **mutuamente escludentesi (incompatibili)** se non possono verificarsi insieme.

Esempio: A = "Il Reggio E. vince lo scudetto del basket"
B = "Il Pesaro vince lo scudetto del basket"

per eventi incompatibili $P(A|B) = 0$

Altre definizioni

Eventi casuali formano un **gruppo completo di eventi** se **almeno uno** di essi deve **necessariamente** accadere.
(Esempio: $A_1 \dots A_{16}$ = "L'i-esima squadra del campionato vince lo scudetto")

Eventi contrari sono due eventi mutuamente escludentesi che formano un gruppo completo.
Esempio: A = "Nel lancio di una moneta esce Testa"
B = "Nel lancio di una moneta esce Croce" A = non B

$$P(A) = P(\text{non } B) = P(\overline{B}) = 1 - P(B)$$

Due o più eventi casuali si dicono **equiprobabili** se la **simmetria** dell'esperimento permette di supporre che essi abbiano tutti la **stessa probabilità** di accadere.
(Esempio: $A_1 \dots A_6$ = "Nel lancio di un dado non truccato esce la faccia *i*")

- **In un gruppo completo di N eventi equiprobabili e mutualmente escludentisi la probabilità di ciascuno di essi è** $\boxed{P = 1/N}$
  (Lotto: 1/90, monete: ½, dado/cubo: 1/6)

Somma e prodotto di eventi

Somma di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A o di B o di entrambi** (varie notazioni $\cup$, +, o)

$P(C) = P(A \cup B) = P(A+B) = P(A \text{ o } B)$

Somma di un numero qualsiasi di eventi: l'evento che consiste nel verificarsi di *almeno uno* di essi.

Prodotto di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A e di B "contemporaneamente"** ($\cap$, $\cdot$, e)

$P(C) = P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A \text{ e } B)$

Prodotto di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di *tutti* loro "contemporaneamente".

Variabili aleatorie, distribuzioni di probabilità

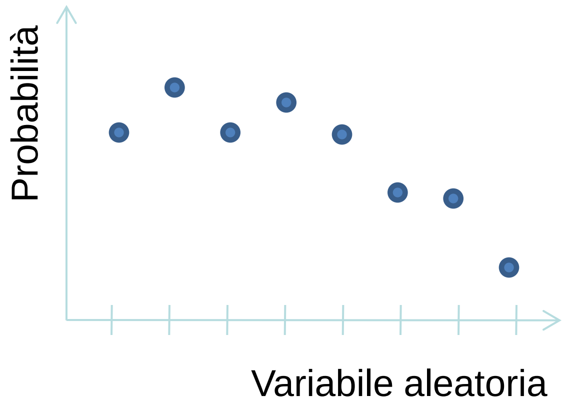
Variabili aleatorie : grandezze che, nel corso di una prova, possono assumere un valore sconosciuto a priori (es. risultato di una misura).

Si distinguono in:

discrete : se possono assumere solo un insieme di valori numerabile
es: il numero estratto da un urna del lotto

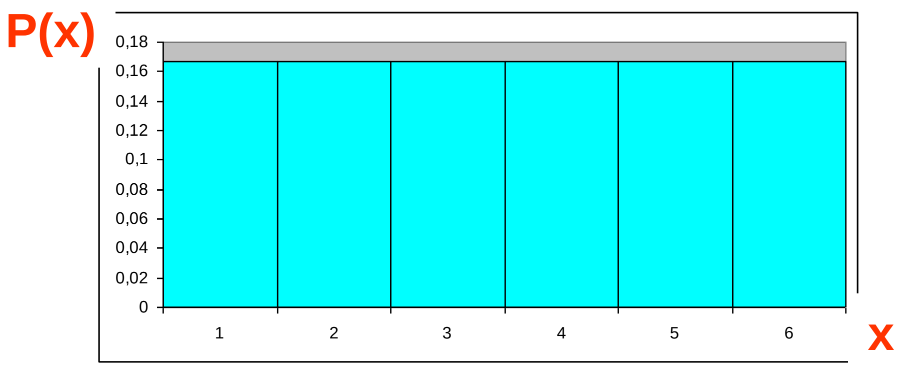
continue : se possono assumere un insieme di valori continuo
es: il punto in cui una freccetta colpisce un bersaglio

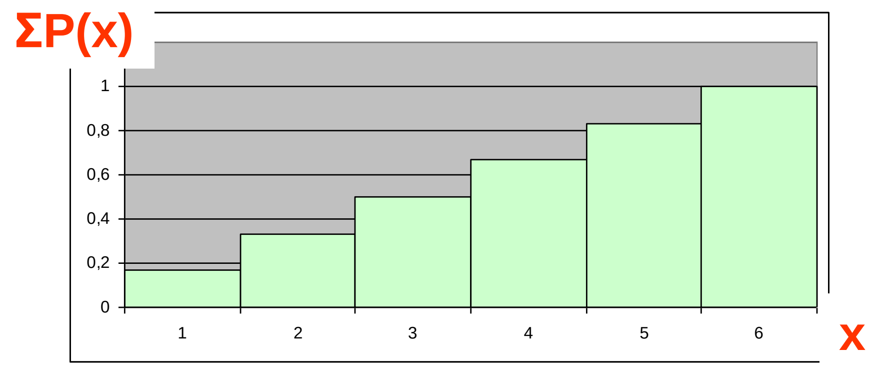
Distribuzione di probabilità :
<ins>funzione</ins> che associa a ciascun possibile valore assunto dalla variabile aleatoria la corrispondente probabilità.



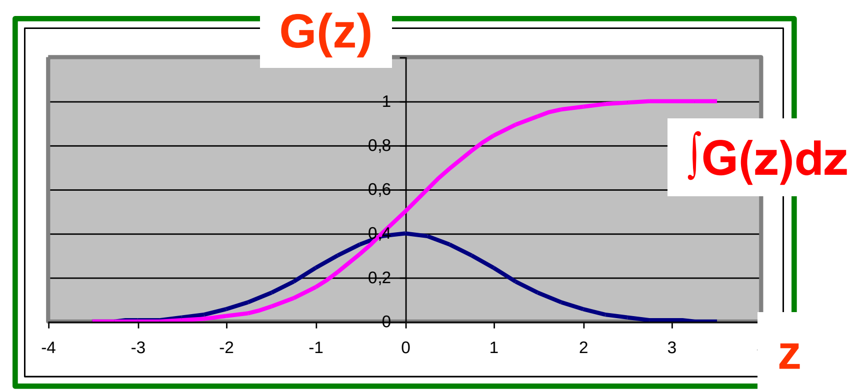
Distribuzioni di probabilità cumulative(*)

- sia $P(x_i)$ con i=1,N una distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta x_i, si dice cumulativa la distribuzione $\Sigma_{i=1,j} P(x_i)$, tale che $\Sigma_{i=1,N} P(x_i) = 1$ (la certezza, per es. una qualsiasi faccia del dado deve per forza uscire)





- per una variabile aleatoria continua basta sostituire la Σ con un ∫ (per es. per la funzione di Gauss, vedi più avanti, $G(z) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-z^2/2)$, l'integrale fra -∞ e 0 vale 0.5, cioè c'è una probabilità del 50% che z capiti in quell'intervallo: curva fucsia = area sotto la curva blu)



- l'area fra z = -1 e z = +1 vale 0.683 (da ricordare)

(*) non mostrato a lezione (nmal), facoltativo, ma utile

Valore atteso

Valore atteso (o **speranza matematica**) di una variabile aleatoria : somma (o integrale) di tutti i possibili valori della variabile aleatoria moltiplicati per la loro probabilità.

Variabile aleatoria discreta (distribuzione di probabilità discreta):

$$\langle x \rangle = \Sigma_{i=1,N} \; x_i \cdot P(x_i)$$

Variabile aleatoria continua (distribuzione di probabilità continua):

$$\langle x \rangle = \int_{\text{tutti gli } x} x \cdot P(x) \cdot dx$$

Si dimostra che **il <u>valor medio</u>** $\boxed{x_{medio} = (\Sigma_{i=1,K} x_i)/K}$ **dei valori misurati di una variabile aleatoria in un numero molto grande di "esperimenti" <u>tende al valore atteso</u> della variabile aleatoria**.

Esercizio sulla media

Si effettuano diverse misure del raggio di base (R) e dell'altezza (H) di uno **stesso** cilindro, ottenendo le seguenti coppie di valori:

R_1 = 23.92 cm, H_1 = 17.59 cm
R_2 = 0.2406 m, H_2 = 0.1747 m
R_3 = 238.3 mm, H_3 = 175.4 mm

Trovare il valor medio del volume del cilindro.

Formula risolutiva: $V_{medio} = (V_1+V_2+V_3)/3 = \pi\ [(R_1^2H_1+R_2^2H_2+R_3^2H_3)/3]$
con $V_i = \pi \cdot R_i \cdot R_i \cdot H_i$, dove R_i = raggio base, H_i = altezza

Ad es. nel Sistema Internazionale una lunghezza si esprime in m:
R_1 = 0.2392 m, H_1 = 0.1759 m → $V_1/\pi = 0.1006\ 10^{-1}\ m^3$ [0.010064]
R_2 = 0.2406 m, H_2 = 0.1747 m → $V_2/\pi = 0.1011\ 10^{-1}\ m^3$ [0.010113]
R_3 = 0.2383 m, H_3 = 0.1754 m → $V_3/\pi = 0.0996\ 10^{-1}\ m^3$ [0.009960]

Valor medio del volume = $0.316 \cdot 10^{-1}\ m^3$ (= $3.16 \cdot 10^{-2}\ m^3$ = 0.316E-01 m^3 = 0.0316)

(NB la stessa unità!)

Probabilità classica

La probabilità, P(x), di un evento x è il rapporto tra il numero M di casi "favorevoli" (cioè il manifestarsi di x) e il numero totale N di risultati ugualmente possibili e mutuamente escludentesi (già incontrata a pag. 31).

Detta anche **probabilità oggettiva** o **probabilità a priori**: stima della probabilità di un evento dalla simmetria del problema.

Esempio: lancio di un dado non truccato – la probabilità, di avere un numero qualsiasi compreso fra 1 e 6, è 1/6:

$$P(x) = \frac{\text{Numero di volte in cui può uscire x}}{\text{Numero di risultati possibili}} = \frac{1}{6}$$

Probabilità empirica

Definizione **sperimentale** di probabilità come **limite della frequenza** misurabile in una serie di esperimenti.

La probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero di prove.

Nota : rispetto alla definizione classica sostituiamo il rapporto

$$\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

con

$$\frac{\text{numero di esperimenti con esito favorevole}}{\text{numero complessivo di esperimenti effettuati}}$$

Probabilità empirica/2

In pratica, se abbiamo un esperimento ripetuto N volte ed un certo risultato x che accade M volte, la probabilità di x è data dal limite della **frequenza** (M/N) quando N tende all'infinito

$$P(x) = \lim_{N \to \infty} M/N$$

<u>Vantaggio</u>: possiamo applicare la definizione anche a:

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è uniforme

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è ricavabile a priori da una simmetria dell'esperimento.

Probabilità empirica/3

N1: la probabilità empirica …non è una proprietà solo dell'esperimento ma... **dipende del particolare gruppo su cui viene calcolata**.

Es: la probabilità di sopravvivenza ad una certa età, calcolata su diversi campioni di popolazione a cui una stessa persona appartiene (maschi, femmine, fumatori, non fumatori, deltaplanisti, ecc.), risulta diversa.

N2: … **si può rigorosamente applicare soltanto agli esperimenti ripetibili** per i quali il limite per N che tende all'infinito ha senso.

Es: Il risultato di una partita di calcio, il tempo atmosferico di domani e molte altre situazioni della vita quotidiana **non** sono soggette all'uso di questa definizione di probabilità.

N3: necessità di "operatività“:
(quasi) tutti sono concordi nel definirla come
il valore della frequenza relativa di successo su un numero di prove sufficientemente grande

non necessariamente tendente all'infinito!!!!

Come si usa la probabilità – predizione

- al di là della particolare definizione di probabilità, se conosco la probabilità P(x) di un evento x, posso inferire che cosa succederà, cioè quante volte (M) uscirà il risultato x, in una serie di N esperimenti/prove – cioè si inverte la definizione di probabilità

  $M = P(x)N$

  è il valore più probabile (*intero, se la variabile aleatoria x è intera*)

- es. dado, 100 lanci, $M = P(5)N = 100/6 = 17$

  NB 16.66... sarebbe il valor medio su un gran numero di serie di 100 lanci ciascuna

Esercizio - predizione

Un bambino lancia sassi contro una parete circolare di raggio 0.514 m in cui sono stati praticati N_f = 26 fori circolari del diametro di 5.70 cm. Se il bambino non mira e i sassi sono piccoli rispetto alle dimensioni dei fori, qual è il numero più probabile di sassi che passerà oltre la parete ogni N_l = 3670 lanci? Qual è la probabilità che un sasso rimbalzi ?

Soluzione:

Simmetria del problema → ogni cm^2 ha la stessa probabilità di essere colpito → probabilità *p* di passare dall'altra parte è data dall'area favorevole (dei fori) *s* diviso l'area totale *S*:

$p = s/S = N_f \cdot [d/(2R)]^2$

con s = superficie totale dei fori = $N_f \cdot \pi \cdot d^2/4$

S = superficie della parete = $\pi \cdot R^2$

d = diametro dei fori = $0.570 \; 10^{-1}$ m

R = raggio della parete = 0.514 m

N. più probabile sassi = $N_l \cdot p = N_l \cdot s/S = N_l \cdot N_f \cdot [d/(2R)]^2 = 293$ **(NB: intero!!!)**

Probabilità di un rimbalzo: $q = 1 - p = 1 - s/S = 0.920$ etc.

Probabilità soggettiva(*)

La probabilità di un evento x è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di x.

Definizione meno rigorosa, ma più spesso usata per formulare giudizi:

Es: “credo che domenica la mia squadra riuscirà a vincere”,
“è facile che mi capiti una domanda sulla probabilità all’esame di fisica”,

Nota:
Talvolta siamo forzati a assegnare un determinato grado di fiducia all’avverarsi di un evento.

Esempio:
il grado di fiducia che diamo al fatto che il gruppo su cui abbiamo calcolato la frequenza di un evento sia effettivamente rappresentativo del campione totale.

(*) nmal, facoltativo

Teoremi sulla probabilità

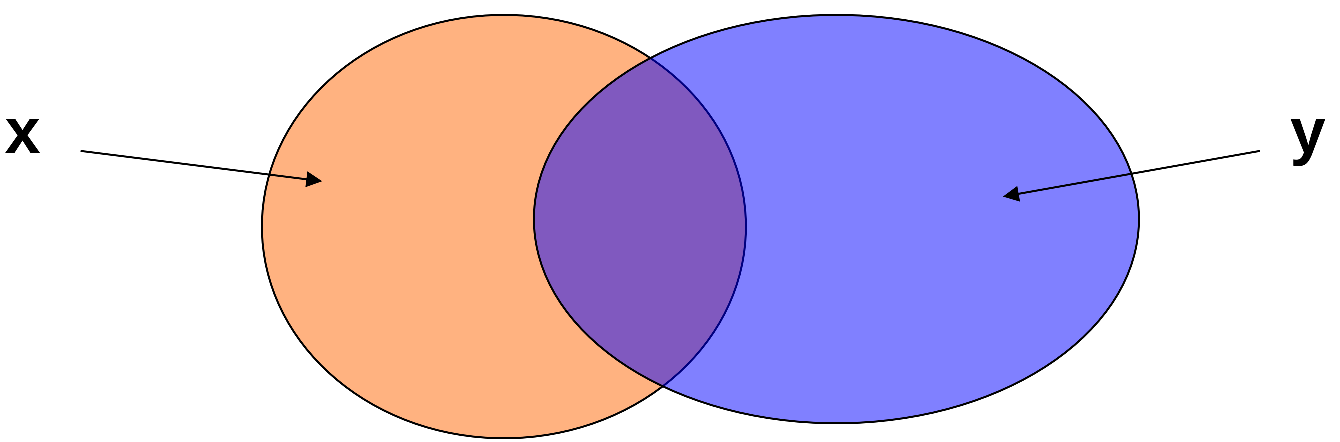
- Teorema della somma
- Teorema del prodotto
- Teorema della probabilità composta
- Teorema della probabilità totale
- Teorema di Bayes

Teorema della somma

Per due eventi qualsiasi x e y, non necessariamente mutuamente escludentesi, la prob. che avvenga x **o** y vale

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$$

(ovvero $\boxed{P(x+y) = P(x) + P(y) - P(x \cdot y)}$)

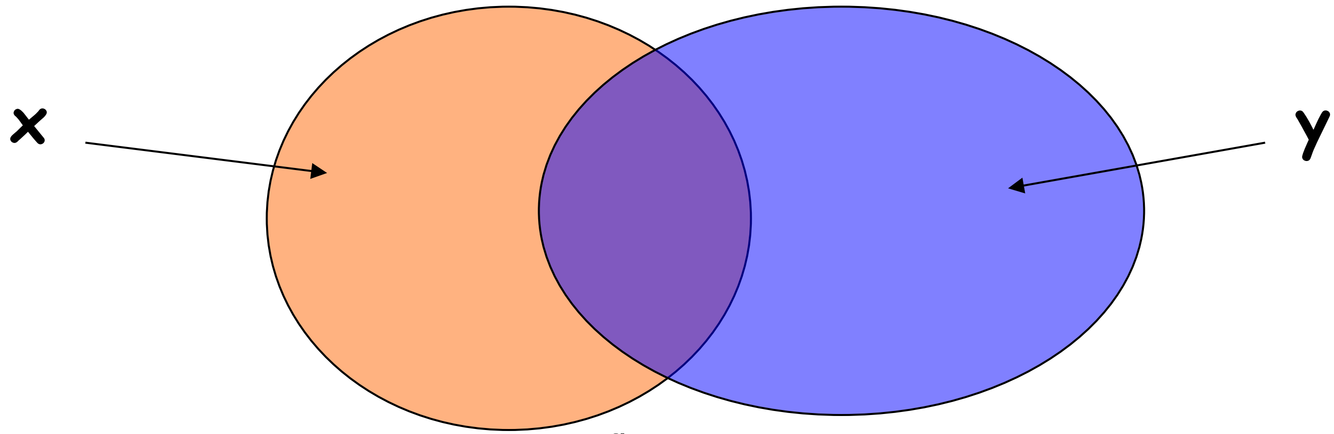


Teorema del prodotto(*)

Per due eventi qualsiasi x e y, non necessariamente mutuamente escludentesi, la prob. che avvenga x **e** y vale

$$P(x \cap y) = P(x) + P(y) - P(x \cup y)$$

(ovvero $P(x \cdot y) = P(x) + P(y) - P(x+y)$)



(*) nmal, facoltativo

Teorema della probabilità composta

Altro modo per esprimere il teorema del prodotto :

la probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro calcolata a condizione che il primo abbia luogo:

$$\mathbf{P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y|x)\ [= P(y) \cdot P(x|y)\ ]}$$

Si noti che:

- se x e y sono mutuamente escludentesi $P(y|x)=0$ e $P(x \cap y) = 0$;
- se x e y sono indipendenti, $P(y|x) = P(y)$ e $\boxed{P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y).}$

Esercizi

Un tiratore ha una probabilità uguale a 0.168 di fare centro ad un qualsiasi colpo. Se prende un autobus per recarsi al poligono di tiro qual è la probabilità che riceva un biglietto dell'autobus con un numero divisibile per 19 **e al tempo stesso** (**oppure**) di fare centro al secondo colpo?

P_1 (biglietto dell'autobus con numero divisibile per 19) = 1/19 = 0.0526 *(Ad es., per numeri casuali di 7 cifre, uno ogni 19 sarà divisibile per 19)*

P_2 (fare centro al secondo colpo) = 0.168 (*Al secondo colpo P_2 è la stessa che ad ogni altro colpo)*

NB Gli eventi sono indipendenti!

1) P = Probabilità che avvengano contemporaneamente (**prodotto**)

$P = P_1 \cdot P_2 = 0.00884$ ($= 8.84 \cdot 10^{-3}$ = 0.884E-02)

2) P' = Probabilità che avvenga l'uno o l'altro (**somma**)

$P' = P_1 + P_2 - P_1 \cdot P_2 = 0.212$ ($= 2.12 \cdot 10^{-1}$ = 0.212E+00)

Teorema della probabilità totale(*)

Dato un gruppo completo di N eventi mutuamente escludentesi $\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ (**insieme delle ipotesi**)

la probabilità di un evento x che può avvenire contemporaneamente a esse:

$$\mathbf{P(x) = \Sigma_{i=1,N}\, P(x|A_i) \cdot P(A_i)}$$

cioè

probabilità dell'evento x = la somma dei prodotti delle probabilità di ciascuna delle ipotesi per la probabilità condizionata dell'evento con tali ipotesi

(*) nmal facoltativo

Teorema di Bayes(*)

Osserviamo un evento x. Esiste un insieme delle ipotesi $\{A_i\}$. Come viene modificata la probabilità che assegnamo all'ipotesi A_i dopo l'osservazione x? (In altre parole: qual è la probabilità condizionata dell'ipotesi A_i data l'osservazione x?)

Per il teorema della moltiplicazione:

$$\mathbf{P(x \cdot A_i) = P(x) \cdot P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i)}$$

$$\rightarrow \qquad \mathbf{P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i) \,/\, P(x)}$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{P(A_i|x) = \frac{P(A_i) \cdot P(x|A_i)}{\Sigma_{i=1,N}\, P(A_i) \cdot P(x|A_i)}}}$$

(*) nmal, facoltativo

Esercizio sul teorema di Bayes(*)

Per facilitare un'identificazione precoce dei tumori al seno, le donne da una certa età in poi sono incoraggiate a sottoporsi a mammografia, anche se non presentano sintomi. Per donne senza sintomi fra i 40 e i 50 anni valgano le seguenti informazioni: la probabilità di avere un tumore al seno è dell'1% (incidenza della malattia); se sono effettivamente malate, la probabilità che il tumore sia visto dalla mammografia è dell'80% (efficienza del test); se non sono malate, la probabilità di una mammografia positiva è comunque del 10% (falsi positivi).
Supponiamo che una donna di questo gruppo risulti positiva a una mammografia: qual'è la probabilità che essa sia effettivamente malata?

(*) nmal, facoltativo

Soluzione(*)

Probabilità di essere malati: **$P(M) = 1\% = 0.01$**
Probabilità di essere sani: **$P(S) = 1 - 1\% = 99\% = 0.99$**
Probabilità di avere il test positivo se malati (prob. condizionata):
$P(+ \mid M) = 80\% = 0.80$
Probabilità di avere il test positivo se sani (prob. condizionata):
$P(+ \mid S) = 10\% = 0.10$

Per il teorema di Bayes:

$$
\begin{aligned}
P(M|+) &= P(+ \mid M) \cdot P(M) \;/\; [\, P(+ \mid M) \cdot P(M) + P(+ \mid S) \cdot P(S) \,] \\
&= 0.8 \cdot 0.01 \,/\, [\, 0.80 \cdot 0.01 + 0.10 \cdot 0.99 \,] \\
&= 0.0748 = 7.5\%
\end{aligned}
$$

Cioè la frazione di donne effettivamente malate fra quelle che risultano positive alla mammografia è del 7.5%

(*) nmal, facoltativo

Trattamento in termini di frequenza(*)

A qualcuno potrebbe risultare più semplice pensare in termini di frequenza (numero di casi possibili) invece che in termini di probabilità. Il procedimento non è concettualmente diverso.

Supponiamo un campione di 1000 donne che si sottopone al test. Avremo:

Numero medio di malati: $\mathbf{N(M) = 1000 \cdot P(M) = 1000 \cdot 0.01 = 10}$

Numero medio di sani: $\mathbf{N(S) = 1000 - 10 = 990}$

Numero di individui malati che (in media) risulteranno positivi al test:

$$\mathbf{N(+|M) = N(M) \cdot P(+|M) = 10 \cdot 0.80 = 8}$$

Numero di individui sani che (in media) risulteranno positivi al test:

$$\mathbf{N(+|S) = N(S) \cdot P(+|S) = 990 \cdot 0.10 = 99}$$

Pertanto, 8+99=107 persone su 1000 risulteranno, in media, positive al test. La frazione di queste che è effettivamente malata è:

$$\mathbf{N(+|M) / [\, N(+|M) + N(+|S)\,] = 8/107 = 0.0748 = 7.5\%}$$

Cioè la **frazione** di persone effettivamente malate fra quelle che risultano positive al test in oggetto è del 7.5% (come si è trovato col teorema di Bayes).

(*) nmal, facoltativo

Misura di grandezze fisiche

La misura di una grandezza fisica è descrivibile tramite <u>tre elementi</u>:

• **valore più probabile**; **(tendenza del campione)**

• **incertezza** (o “**errore**”), la precisione con cui il valore più probabile approssima il valore vero; **(dispersione del camp.)**

• **unità di misura**. **[la misura è confronto]**

V**alore più probabile, errore e unità di misura** danno una descrizione completa e accurata di una grandezza misurata.

L’errore sulla misura determina il **numero di cifre significative** (v. pag. 68) con cui riportare il valore più probabile. Non ha senso scrivere la quarta cifra significativa se già c’è una indeterminazione sulla terza cifra!

Se una grandezza è riportata, senza scrivere esplicitamente l’errore, con n cifre significative, convenzionalmente si assume un errore di ±1 sulla n-esima cifra.

Misure ed errori di misura (incertezze)

La **misura** è la stima del **valore vero** di una **grandezza**.

Limiti alla precisione di questa stima:

- **Sensibilità dello strumento di misura**
  l'ultima cifra che può essere letta
  oppure
  la frazione di divisione che può essere apprezzata;

- **Fluttuazioni casuali del valore misurato**

- Possibilità di **errori** nella **procedura** e/o nello **strumento** (errori sistematici: i più difficili da trattare).

$$X_{mis} = X_{vero} + \varepsilon$$

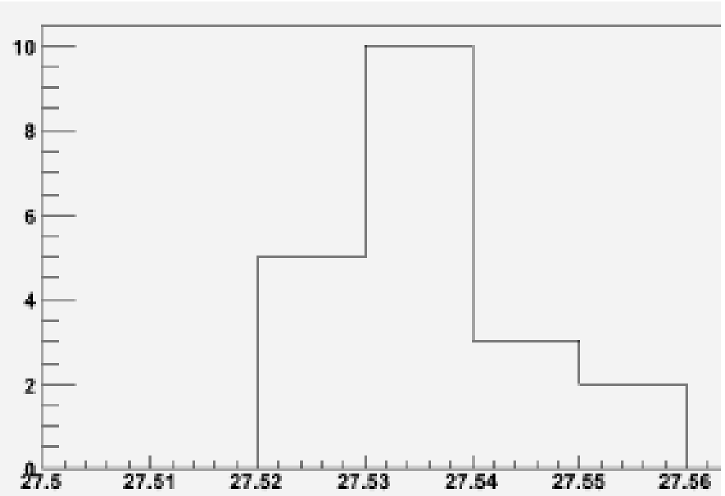
Istogrammi di frequenza

Il risultato della misura di una grandezza fisica è una *variabile aleatoria*. (v. pag. 30)

Possiamo **ripetere la misura** molte volte per studiare le variazioni del risultato (se ce ne sono) dovute agli errori (cioè ottenere la *distribuzione di probabilità* della variabile aleatoria).

Queste distribuzioni possono essere riassunte in Tabelle o in Istogrammi o ulteriormente condensate in un numero minore di parametri.

n.prova	risultato
0	27.525
1	27.531
2	27.539
3	27.529
4	....



Media aritmetica

- Se faccio la media aritmetica delle misure

  $x_m = (\Sigma_{i=1,N} x_i)/N = (N x_{vero} + \Sigma_{i=1,N} \varepsilon_i)/N = x_{vero} + \varepsilon_m$
- La media degli scarti rispetto al valore «vero», $\varepsilon_m \rightarrow 0$ per N grande: gli ε_i sono casuali, ±vi.
- Quindi, se le misure sono ugualmente attendibili, la migliore stima di x_{vero} (che **non** può essere conosciuto) è proprio x_m che per definizione annulla la media degli scarti (rispetto a se stesso).
- Gli scarti, ±vi(*), non permettono di valutare la dispersione; gli $(\text{scarti})^2$, sempre +vi, sì → scarto quadratico medio.

(*) +vo = positivo etc.

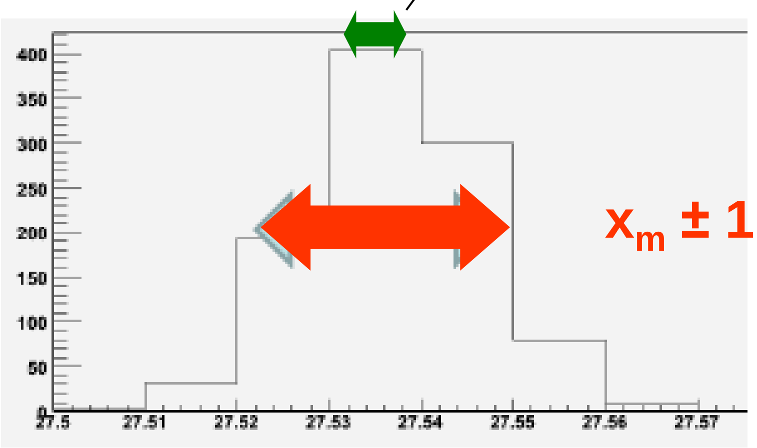
Deviazione standard

consideriamo la radice quadrata dello scarto quadratico medio (**deviazione standard**):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_m)^2}{(N-1)}}$$

NB deviazione standard della media:
$\Delta x = \sigma/\sqrt{N}$

La deviazione standard è un indicatore della larghezza della distribuzione delle misure.



$x_m \pm 1\ \sigma$

Se abbiamo delle misure distribuite in maniera casuale e centrate attorno al loro valor medio, *la deviazione standard è la stima migliore dell'errore con cui si può conoscere il valore vero della grandezza misurata partendo* ***da una singola misura***. ***L'errore da dare sulla misura è quello sulla media di N misure, ossia $\Delta x = \sigma/\sqrt{N}$***

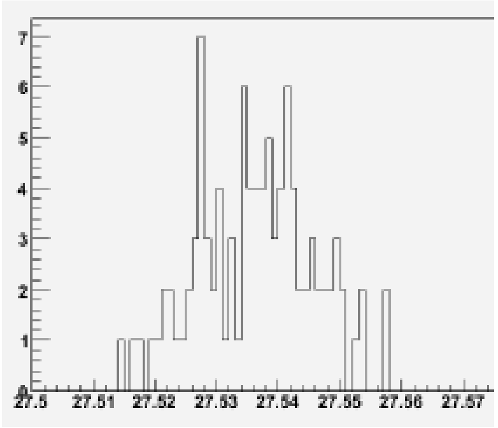
Verso un'interpretazione probabilistica

Qual è la probabilità che il valore vero si trovi nell'intervallo **valore più probabile ± errore ?**

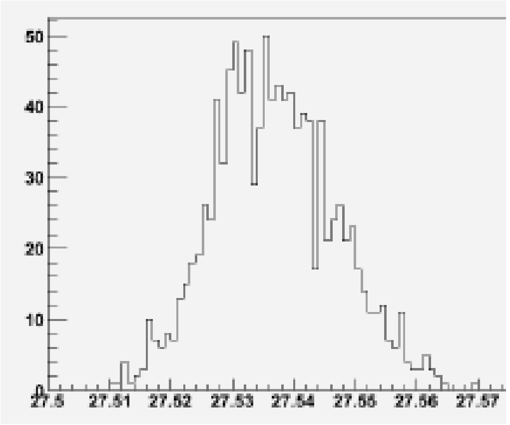
Osservazione:

Se le **misure** sono **casuali** e **indipendenti fra loro**

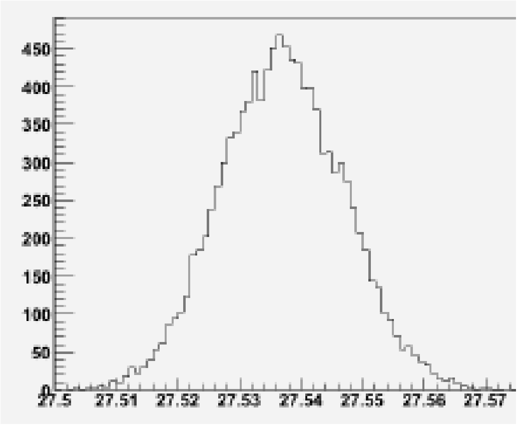
⇨ l'**istogramma di frequenza** tende ad assumere forma a campana…



100 misure



1000 misure



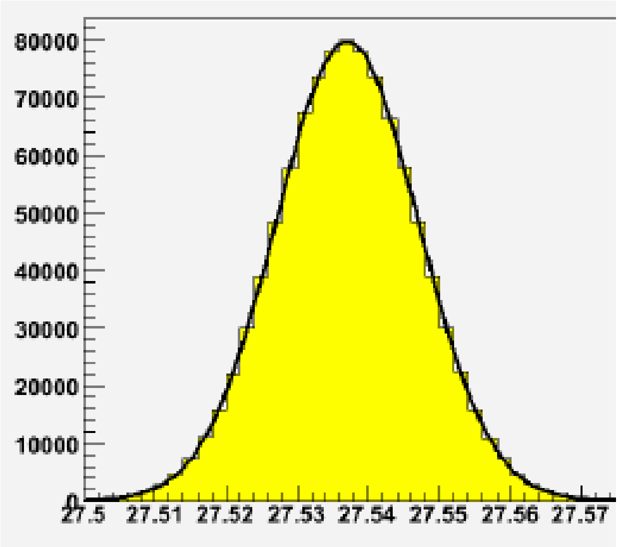
10000 misure

…centrata sul valor medio

…con larghezza dell'ordine della deviazione standard

Funzione di Gauss

…cioè secondo la **distribuzione normale** (o **di Gauss** o **gaussiana**)



$$G(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con:
N = numero di misure
μ = valor medio
σ = deviazione standard

±1σ 68.3% probabilità (area sotto G(x))
±2σ 95.4% « « « «
±3σ 99.7% « « « «

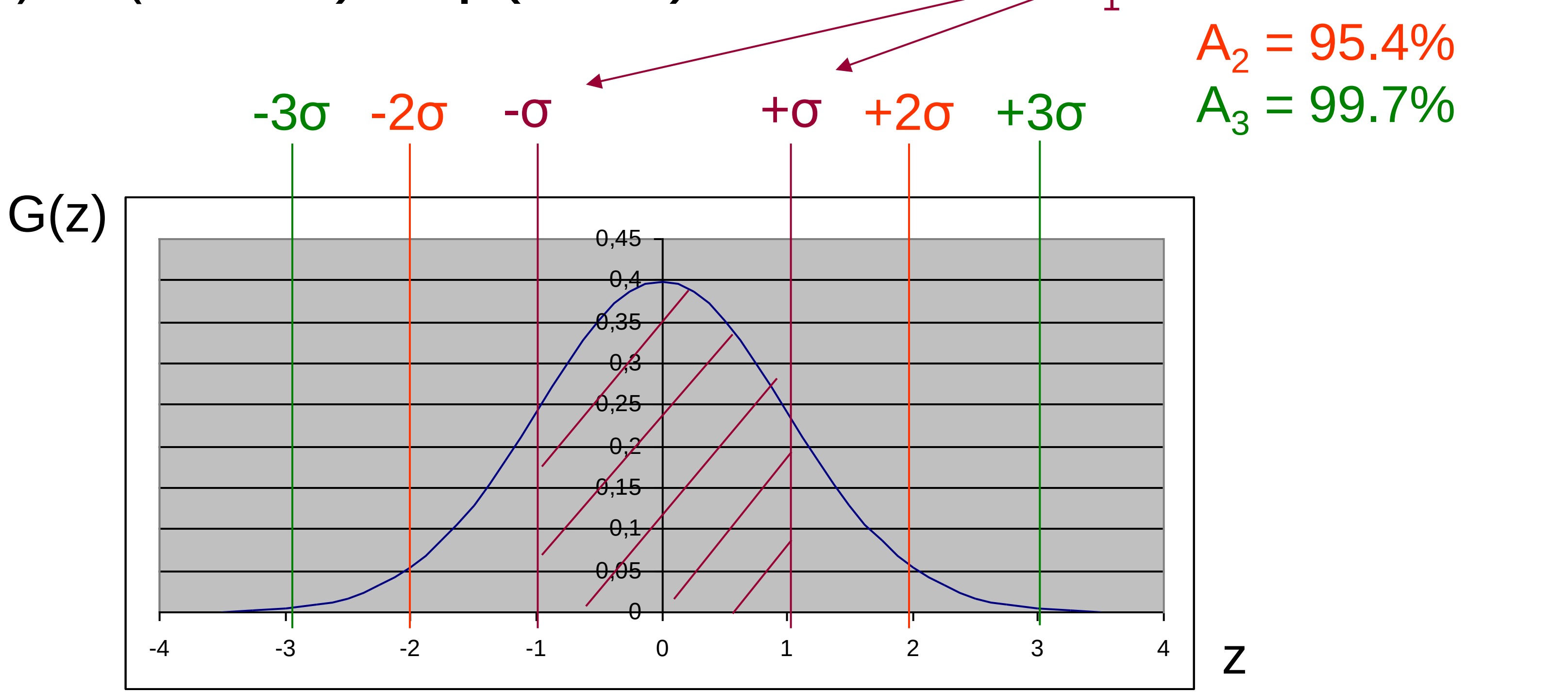
<u>Teorema del limite centrale :</u>

La distribuzione della *somma* di un numero elevato di variabili casuali indipendenti tende a distribuirsi *normalmente*, cioè una **distribuzione normale** avente come **μ** la somma dei valori medi delle misure e come $\boldsymbol{\sigma}^2$ la somma delle varianze delle misure.

La distribuzione normale standardizzata(*)

- se poniamo $(x-\mu)/\sigma = z$, la distribuzione di Gauss si potrà scrivere in forma standardizzata come

$$G(z) = (1/\sqrt{2\pi})\ \exp(-z^2/2)$$



$$A_n = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-n}^{n} \exp(-z^2/2)\, dz \qquad A_\infty = 1 = 100\%$$

(*) nmal, facoltativo, ma utile

Errore assoluto e relativo

- Sinteticamente, valor medio ed errore q.m. *sulla media* (= errore q.m. su una singole misura diviso √N), ad es. un tempo di caduta di sferette uguali in un fluido, N misure

  $t_{caduta} = t_m \pm \Delta t = (10.62 \pm 0.06)$ s

  (r.m.s. = root mean square ≈ q.m. = quadratico medio)
- N.B. l'errore è dato con una sola *cifra significativa;* l'*errore assoluto* Δt (=$\sigma/\sqrt{N}$) è una grandezza dimensionata con unità di misura s, che fissa il n. di cifre del risultato; l'*errore relativo*

  $\delta = \Delta t/t_m = 0.006 = 0.6/100 = 0.6\%$

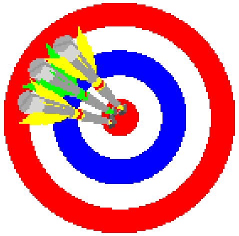
  è invece un numero puro (ci indica la precisione della misura: più piccolo = misura più precisa)

Errori di misura (4)

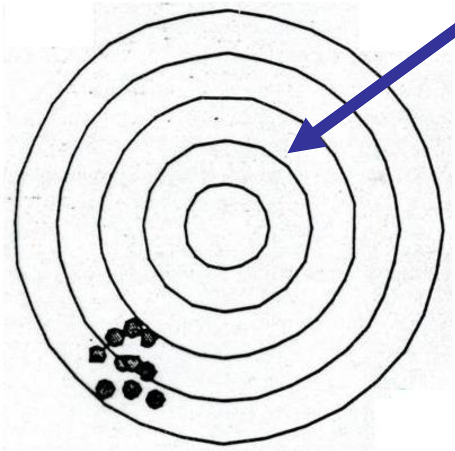
- Oltre agli errori casuali o statistici vi sono gli errori sistematici, ad es. errori di calibrazione, errori di parallasse etc. – in questo caso si può parlare di accuratezza, si può fare un tiro al bersaglio ben raggruppato ma non al centro del bersaglio: serie precisa ma non accurata etc. le cose non migliorano aumentando il numero di tentativi
- Se gli errori casuali sono piccoli rispetto alla sensibilità dello strumento di misura, la lettura sarà sempre la stessa, anche in questo caso non serve aumentare il numero di misure, l'errore è dato dalla sensibilità dello strumento (per es. metà della cifra meno significativa leggibile)

Precisione e accuratezza

Es.: tiro al bersaglio

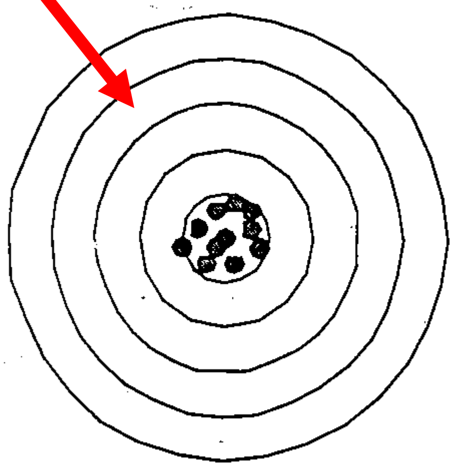


mira: precisa, non accurata
errore casuale piccolo
" sistematico grande

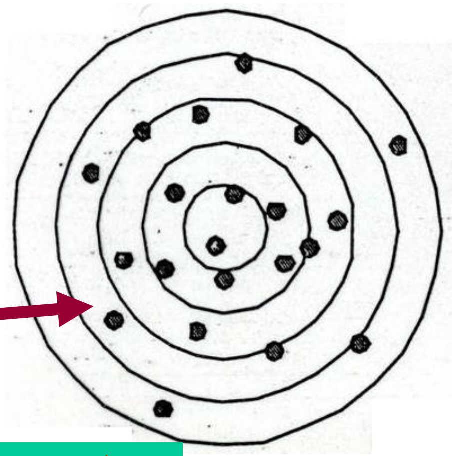


l'err. sistem. può essere corretto

mira: precisa, accurata
errore casuale piccolo
" sistematico piccolo



mira: non precisa, accurata
errore casuale grande
" sistematico piccolo



basta insistere (~1/√n)

IV possibilità ?

Notazione scientifica e cifre significative

- In seguito alla scelta dell'unità di misura potremo avere grandezze con rapporti molto più grandi (piccoli) di 1; ad es. sono scomode da scrivere

  $\lambda_D = 0.000000589$ m (riga del Na, giallo)

  $d_{TS} = 149600000000$ m (<d> terra-sole)

- Si usa la notazione scientifica separando le cifre significative dalla potenza di 10 (ordine di grandezza), si scrive la cifra più significativa ≠ 0 (quella che corrisponde alla potenza di 10 più elevata) prima del **.** (punto) e le altre cifre significative dopo il **.**

  $\lambda_D = 5.89 \times 10^{-7}$ m (3 cifre significative)

  $d_{TS} = 1.4960 \times 10^{11}$ m (5 cifre significative)

NB se uno 0 è indicato a dx è significativo

Notazione scientifica e cifre significative (2)

- *<u>contare gli zeri è perverso</u>* (specie quando sono molti) e produce errori di ordini di grandezza (specie quando sono molti), molto più gravi degli errori sulla 3a cifra significativa – assumendo uno stipendio mensile di 4 cifre, è preferibile subire una riduzione di 100 E o di un fattore 100?
- usate la notazione scientifica quando serve – è inutile scrivere $2.36 \cdot 10^0$ visto che $n^0 = 1 \; \forall \; n$
- ricordate però che somme/sottrazioni si fanno in colonna: $3.45 - 8.32 \cdot 10^{-1} = 34.5 \cdot 10^{-1} - 8.32 \cdot 10^{-1} = 26.2 \cdot 10^{-1} = 2.62$ (il n.o di posti decimali nel risultato è = al n.o più piccolo di cifre decimali di ciascun termine nell'operaz.)

Cifre significative (3)

- Ad es. il valore del numero di Avogadro è stato misurato con grande precisione

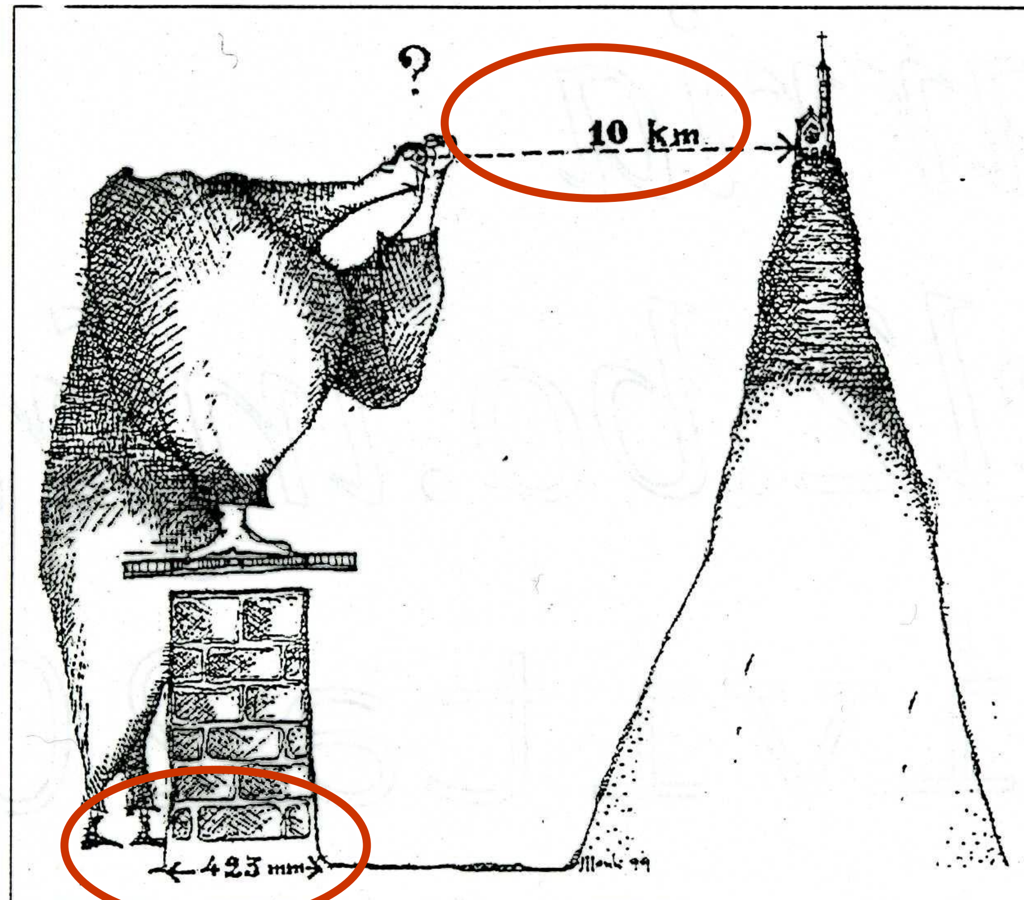
  $N_A = (6.0221413 \pm 0.0000003) \times 10^{23}$ moli^{-1}

  cioè è noto/misurato con 8 cifre significative (con un errore relativo di 44 parti per miliardo o ppb) quindi scriverlo con 10 o più cifre non ha alcun senso fisico – posso sempre però arrotondarlo (v. paragrafo successivo) per es. a sole 4 cifre, scelgo le prime 4 a sx: **6.022** x 10^{23} moli^{-1} etc. – una scrittura equivalente è 0.6022 x 10^{24} moli^{-1}

- Negli esercizi di fisica normalmente i dati sono forniti con 3 o 4 cifre significative, quindi non è sensato dedurne risultati con un numero di cifre maggiore – NB infatti, in generale, combinando vari numeri noti con una certa precisione il risultato ha una precisione peggiore
- => nella soluzione degli esercizi si chiedono i risultati (se sono numeri reali) con 3 cifre significative

Cifre significative (4)

NB1, v. p. 69, nella somma o sottrazione di grandezze di precisione diversa, la meno precisa (quella con l'errore più grande) domina l'errore del risultato (e tutte le cifre della grandezza più precisa risultano illusorie ossia inutili:
(10±1) km + (423±1) mm =
(10±1) km [errore assoluto]
NB2 prodotto/divisione: il n.o di cifre significative del ris. è lo stesso di quello del termine con minor n.o di cifre: (10±1) km x (423±1) mm = (4.2±0.4) 10^{-3} km^2 [conta errore relativo]



.. (10 ± 1) km + (423 ± 1) mm = (10.000423 ± 1) km:
... le cifre successive a quella su cui cade l'errore non hanno alcun significato!

Appendice sull'uso della calcolatrice/PC (*)

Supponiamo di fare una divisione con la calcolatrice tascabile:

$$\frac{1.03}{1.01} = 1.019801980....?$$

(con la calcolatrice del PC ottenete ancora più cifre, ad es. 29!). Sarebbe sensato partendo da numeri conosciuti con 3 cifre fabbricarne uno di 10 (o più) cifre? **No**, in realtà dei due numeri non conosciamo la 4a cifra, possiamo solo dare un intervallo

$$\frac{1.025 \div 1.035}{1.005 \div 1.015} = 1.0098.... \div 1.0298.... = 1.01 \div 1.03$$

quindi il risultato deve essere arrotondato al massimo a 3 cifre, 1.02 coerentemente con la precisione iniziale, $1/103 \sim 10^{-2}$ – *la calcolatrice (PC) non può essere una fabbrica di cifre*: una operazione aritmetica non può aumentare in genere la precisione

(*) nmal, ma utile da capire

Grandezze fondamentali e derivate

- Una volta definite operativamente alcune grandezze relative ai fenomeni di interesse, le altre grandezze possono essere definite in funzione delle prime – ad es. $v = s/t$
- Si distingue quindi fra grandezze fondamentali (nel minor numero possibile/conveniente) e grandezze derivate
- Le definizioni fanno sì che la scelta di quali siano le grandezze fondamentali è arbitraria
- In meccanica bastano 3 grandezze fondamentali (ad es. lunghezza [L], tempo [T], massa [M])

Le grandezze fondamentali della meccanica: L, T, M

- lunghezza – non località, non coincidenza: distanza fra due punti; si misura ad es. con una riga graduata etc.; unità: metro (m), cm, ...
- tempo – non simultaneità: si misura ad es. con un fenomeno periodico, orologio etc.; unità: secondo (s), minuto, ore (h), ...
- massa – quantità di materia di un corpo, inerzia del corpo rispetto alle cause del moto; si misura ad es. con una bilancia etc.; unità: grammo (g), chilogrammo (kg), tonnellata (t), ...

Unità di misura delle grandezze fondamentali (*)

- metro, unità di misura delle distanze – a partire dal 1983, 1 m = distanza percorsa dalle luce nel vuoto in 1/299792458 s
- secondo, unità di misura dei tempi – 1 s = tempo necessario per 9.192631770 x 10^9 vibrazioni di una particolare riga dell'atomo del ^{133}Cs [1 giorno solare medio = 86400 s]
- chilogrammo, unità di misura della massa – 1 kg = 5.0188 x 10^{25} atomi di ^{12}C [1 mole = 12 g ^{12}C, contiene N_{Av} atomi] → in futuro, Si

(*) accennato a lezione, facoltativo

Sistemi di unità di misura

- Scelte le grandezze fondamentali si devono scegliere le loro unità di misura: quelle delle grandezze derivate sono determinate in conseguenza → sistemi di unità di misura
- In meccanica si usa MKS (m, kg, s), ma si usa anche CGS (cm, g, s) e sistema degli ingegneri
- Nella CE dal 1978 è in vigore il Sistema Internazionale (SI) ossia 7 grandezze e relative unità (m, kg, s, A, K, cd, mole)
- a queste unità vanno aggiunti i radianti (rad) per gli angoli piani e gli steradianti (srad) per quelli solidi
- **ma NB** esistono poi **numerose grandezze** usate dalle nostre parti comunemente che ***non*** fanno parte di alcuno dei sistemi precedenti (senza poi andare negli US)

Sistemi di unità di misura (2)

- Riassumendo:

Grandezze fondamentali => Scelta delle unità di misura fondamentali => Sistemi di unità di misura

- Ad es. per la meccanica

MKS	spazio:	m	$= 10^2$ cm
	tempo:	s	
	massa:	kg	$= 10^3$ g
CGS	spazio	cm	$= 10^{-2}$ m
	tempo	s	
	massa	g	$= 10^{-3}$ kg

$l = 5.1\ m = 5.1 \cdot 10^2\ cm$

$s^{-1} = 2\ m^{-1} = 0.02\ cm^{-1}$

etc.

conversione di unità :
si moltiplica per

1 = 100 cm/1 m
(numeratore)
per convertire m → cm

1 = 1 m/100 cm
per $m^{-1} \rightarrow cm^{-1}$
(denominatore, 1/m)

Quello che la fisica non è (*)

- non tenta di dare risposte a domande di tipo ontologico:
  - cos'è il tempo, lo spazio, la massa, la carica elettrica ...?

  => le questioni di tipo filosofico esulano dal campo della fisica
- non è un catalogo di casi:
  - tutte le mele che cascano, tutte le stelle di una certa magnitudo, tutte le molecole in un volume di gas ...

  => (poche) leggi generali che inglobano moltissimi/tutti i casi conosciuti
- non è una descrizione storica delle scoperte in fisica

  => le scoperte sono stimolate dalla tecnologia/scoperte precedenti e stimolano applicazioni tecnologiche/scoperte
- non è affatto un puro esercizio matematico

  => usa il linguaggio matematico per esprimere sinteticamente misure, relazioni, leggi

(*) nmal, facoltativo, ma utile da ricordare!!!

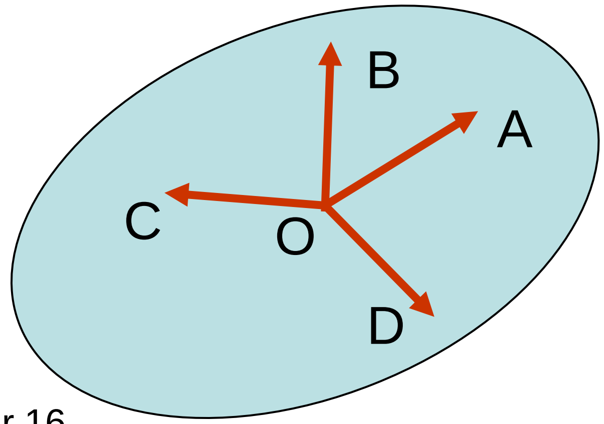
Grandezze scalari e vettoriali

- grandezze quali temperatura, volume, massa, pressione etc. sono **scalari**: completamente specificate da un numero ±vo – per esse valgono le regole dell'aritmetica ordinaria, ±: solo se hanno le stesse dimensioni, x e /: liberamente
- grandezze quali forza, quantità di moto, spostamento etc. sono **vettoriali**: occorre specificare la direzione (e il verso) oltre al modulo o intensità – per esse valgono regole speciali
- ad es., per fornire informazioni stradali non basta la distanza (quantità scalare)

A,B,C,D sono a distanza uguale da O, ma gli spostamenti sono diversi

OA ≠ OB ≠ OC etc.

|OA| = |OB| = |OC| etc.



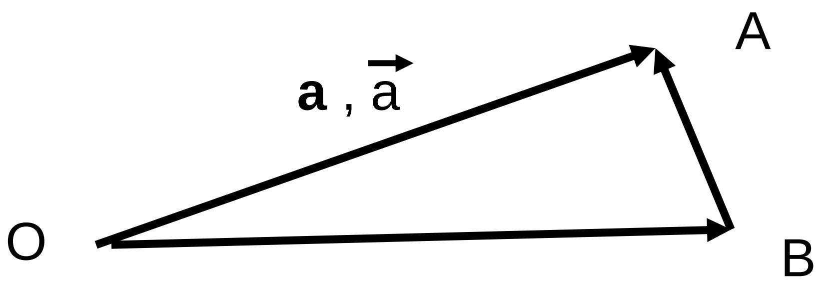
Aule di V. della Beverara ed es. di spostamenti (→) per arrivarci in bici

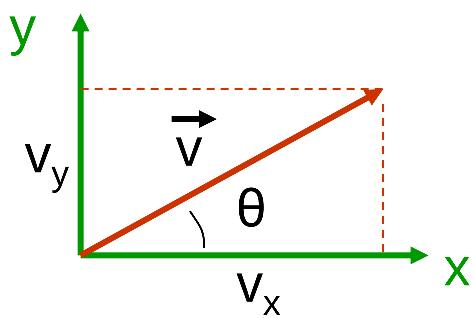
Aule di V. della Beverara ed es. di spostamenti (→) per arrivarci in bici

→ **... ci sono mappe e mappe**

Vettori (OP, in **grassetto** o con la → sopra)

- vettori nel piano(spazio): 2(3) componenti [2(3) numeri, ±vi]
- [v. in una dimensione: 1 componente (1 numero, ±vo)]
- versori: $\vec{v}/|\vec{v}|$, vettori di modulo unitario (solo direzione)





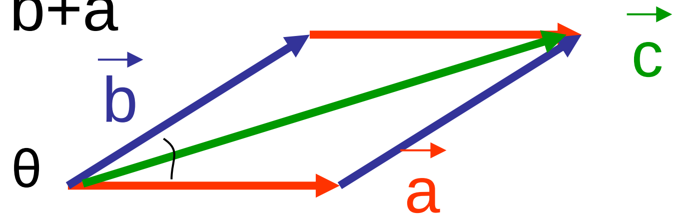
- vettori (in alternativa)
  - modulo (o valore assoluto): |**a**| , $|\vec{a}|$, a
  - direzione [e verso]: nel piano cartesiano θ

NB1 le componenti di un vettore sono ±ve; *il modulo è sempre +vo*
NB2 un vettore può dipendere solo dalla direzione di un altro, v. attrito cinet.

Operazioni con i vettori

1. <u>somma/differenza</u> di vettori omogenei

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

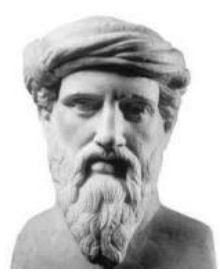


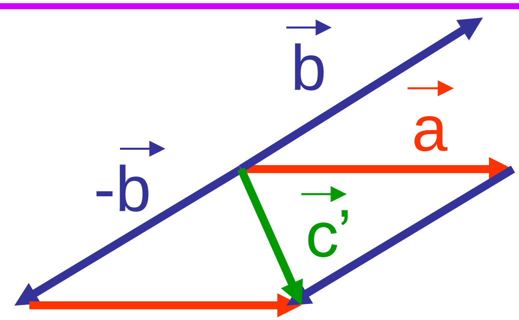
Regola del parallelogramma

- il vettore $\vec{c}$ è equivalente ad $\vec{a}$ seguito da $\vec{b}$ o viceversa (evidente nel caso di uno spostamento)
- modulo quadro del risultante (Legge dei coseni(*))

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180°-\theta) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

- $\vec{c}' = \vec{a} - \vec{b}$





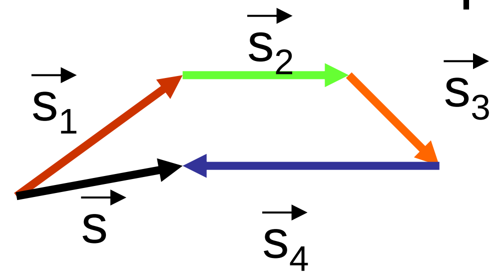
(*) Teorema di Pitagora generalizzato

Operazioni coi vettori (2)

– in generale il <u>risultante</u> di più vettori chiude la poligonale

$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 + \vec{s}_4$

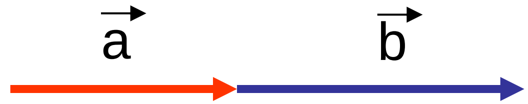
etc.



– casi particolari

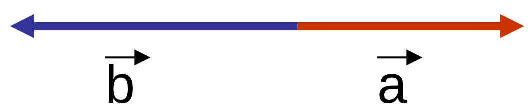
- vettori collineari paralleli

  $c = a + b$; $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$



- vettori collineari antiparalleli

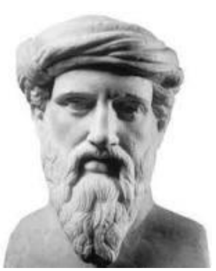
  $c = |a – b|$; $c^2 = a^2 + b^2 – 2ab$

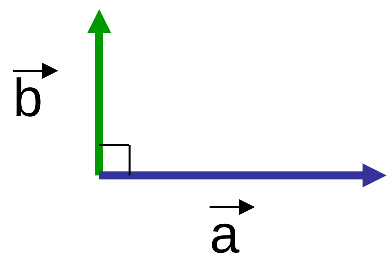


- vettori ortogonali

  $c^2 = a^2 + b^2$; $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

  (Teorema di Pitagora)

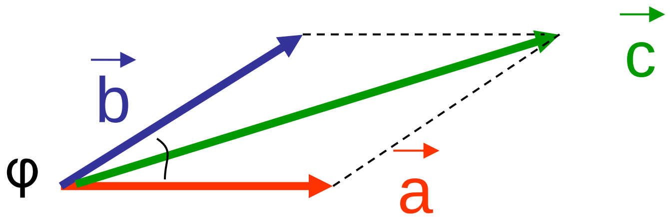




Operazioni coi vettori (3)

- 2. <u>decomposizione di vettori</u>
  - $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono le componenti di $\vec{c}$ secondo le relative direzioni

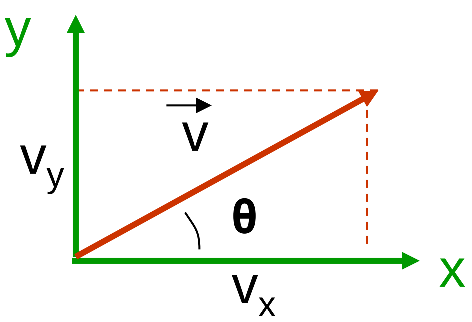
un vettore può essere sempre scomposto secondo due direz. date: si inverte la regola del parallelogr.



  - componenti cartesiane

    $v_x = v \cos\theta$

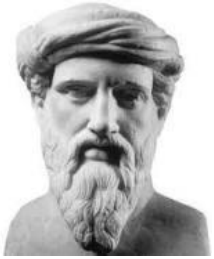
    $v_y = v \sin\theta$



  - componenti polari

    $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

    $\mathrm{tg}\theta = v_y/v_x$



versori (vettori unitari):
$\vec{i}$, $\vec{j}$, $(\vec{k})$ secondo x, y, (z)
$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}\ (+ v_z\vec{k})$

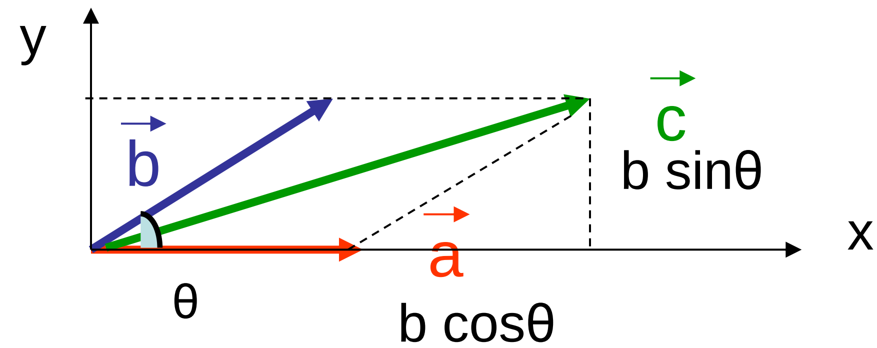
Operazioni coi vettori (4) (*)

– es.: somma in componenti di $\vec{a}$ e $\vec{b}$, scelgo $\vec{a}$ secondo x per semplicità

$a_x = a$; $a_y = 0$

$b_x = b\cos\theta$;

$b_y = b\sin\theta$



$\Rightarrow c_x = a_x + b_x = a + b\cos\theta$

$c_y = a_y + b_y = b\sin\theta$

$$\Rightarrow c^2 = c_x^2 + c_y^2 = a^2 + \underline{b^2\cos^2\theta} + 2ab\cos\theta + \underline{b^2\sin^2\theta}$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

(come già trovato; **NB** $\forall\theta$ si ha sempre $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

(*) nmal, facoltativo, immediato con i versori, $\vec{\mathbf{c}} = c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} = (a_x + b_x)\vec{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\vec{\mathbf{j}}$

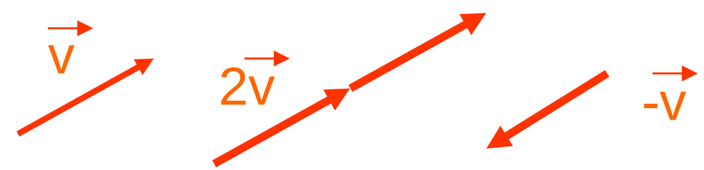
Operazioni coi vettori (5)

- 3. <u>prodotto/divis. di un vettore per uno scalare</u>

  $\vec{q} = m\vec{v}$; $\quad q = |m\vec{v}| = |m||\vec{v}| = |m|v$

  stessa direzione, il verso dipende dal fatto che lo scalare sia +vo o –vo

  es.

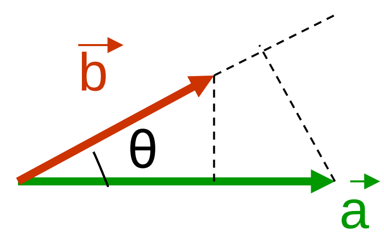


- 4. <u>prodotti fra vettori</u>
  – **prodotto scalare** o interno

    $\boxed{c = \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

    $= (a\cos\theta)b = a_b b = a(b\cos\theta) = ab_a$

    componente di a nella direzione b moltiplicata per b e viceversa



nullo per
$\theta = 90^o, 270^o$

Operazioni coi vettori (6)

- **prodotto vettoriale** o esterno

$\vec{c} = \vec{a}\ \mathbf{x}\ \vec{b} = -\ \vec{b}\ \mathbf{x}\ \vec{a}$

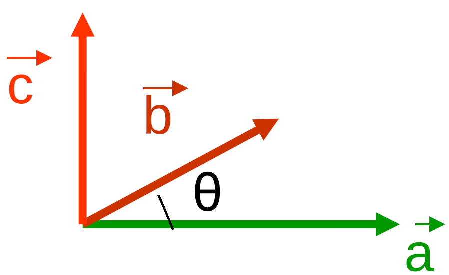
$\boxed{c = |\ \vec{a}\ \mathbf{x}\ \vec{b}\ | = ab \sin\theta}$

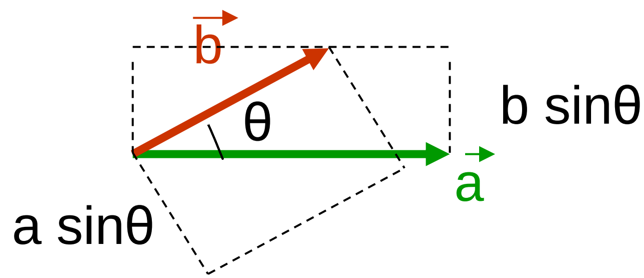
misura l'area del parallelogramma di lati a,b

$c = (a \sin\theta)b = a(b \sin\theta)$

$\vec{c}$ è perpendicolare al piano formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

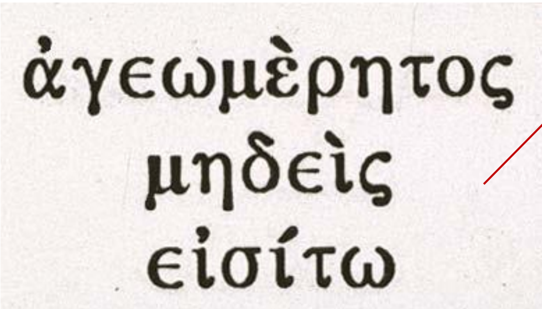
nullo per
$\theta = 0^{o}, 180^{o}$



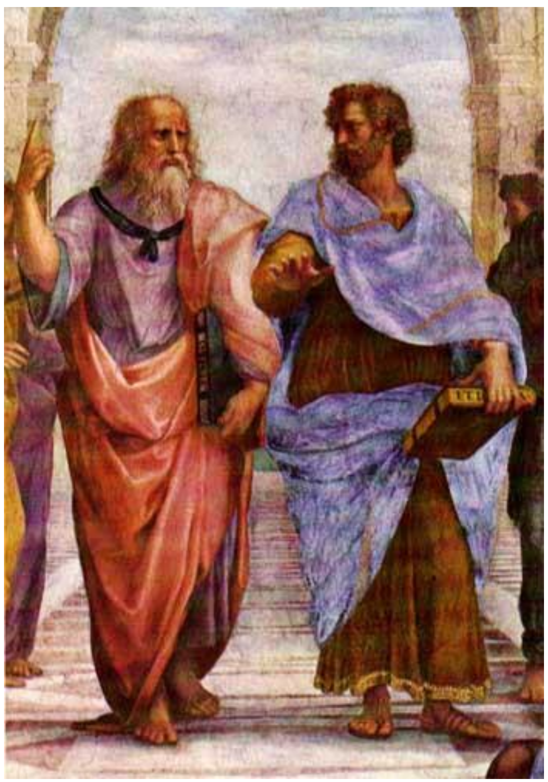


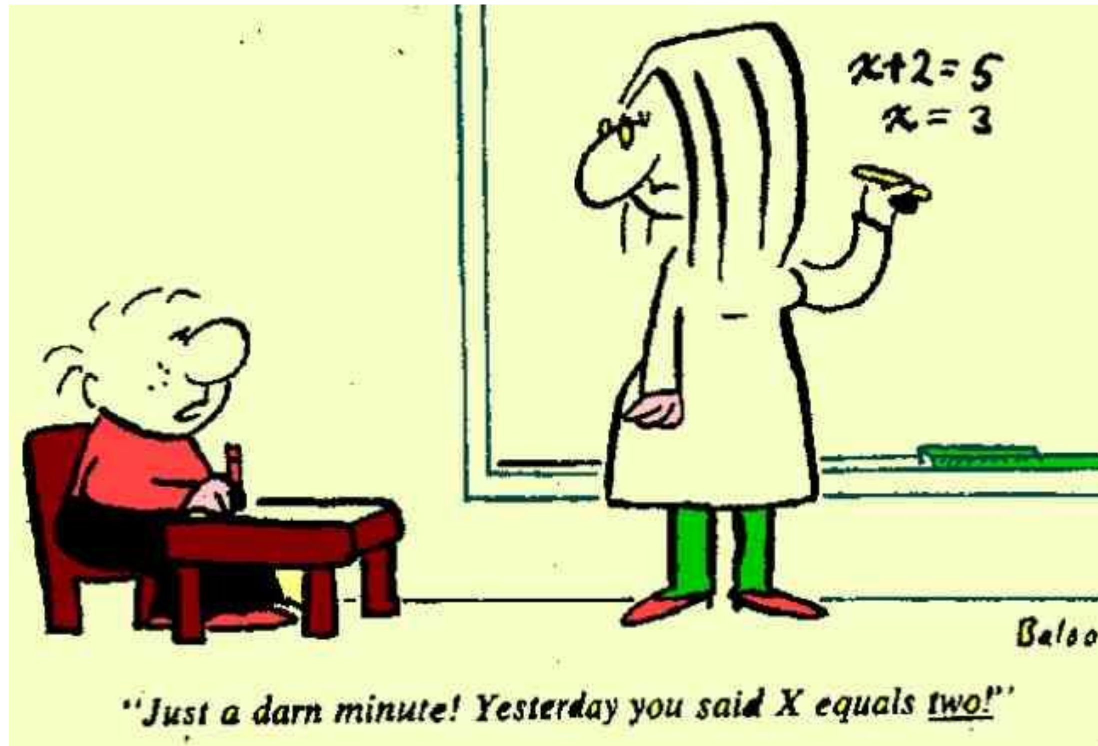
($\vec{c}$ vede $\vec{a}$ ruotare su $\vec{b}$ in senso antiorario)

Fine dell’introduzione



Non entri chi è digiuno di geometria





If you are really bad at maths,
you can go into banking.
Marcus Bridgestock 2/03/2012,
in The Graham Norton Show, BBC1