



Truth is ever to be found in simplicity, and not in the multiplicity and confusion of things [Isaac Newton \(1642-1727\)](#)

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen.

[Immanuel Kant \(1724-1804\)](#)



Corso di Fisica per CTF

AA 2017/18



F.-L. Navarra
francesco.navarria@unibo.it
<http://www.bo.infn.it/ctf/eser>



Corso di Fisica per CTF

- struttura del corso
 - lezioni ~32h (F.-L. Navarra), ~32h (N. Lanconelli)
- orario delle lezioni
 - lun 11-13h; mar 11-13h; mer 11-13h [Aula 2D, Via della Beverara 123/1]
- ricevimento (FLN, Dipart. Fisica e Astronomia, V.le C. Berti Pichat 6/2, 2° piano)
 - lun 14-15h; mar 14-15h e mer 14-15h (verificare prima con un'e-mail che non siano sopraggiunti impegni)
- tutorato (studenti):
[Via della Beverara]
 - [elisa.fontanesi4 at unibo.it](mailto:elisa.fontanesi4@unibo.it)
 - [fabio.iemmi2 at unibo.it](mailto:fabio.iemmi2@unibo.it)
 - [sunny.pradhan at studio.unibo.it](mailto:sunny.pradhan@studio.unibo.it)
 - [eugenia.boldrini at studio.unibo.it](mailto:eugenia.boldrini@studio.unibo.it)
 - [domenico.soluri at studio.unibo.it](mailto:domenico.soluri@studio.unibo.it)



URL consigliati - Fisica

- pagina principale per gli studenti di CTF
<http://www.bo.infn.it/ctf/eser>
- programma del corso
<http://www.farbiomot.unibo.it/it/corsi/insegnamenti/insegnamento/2017/349729>
- **eserciziario elettronico** (collegamento nella pag. princ.)
- **copie dei lucidi delle lezioni** (collegamento nella pag. princ.)
- ~~iscrizione all'orale per chi ha la suff. nei parziali (coll. nella pag. princ.)~~

- [meccanica dei fluidi] <http://ishtar.df.unibo.it/mflu/html/cover.html>
- [diffusione nelle soluzioni] <http://ishtar.df.unibo.it/dif/html/diffu/index.html>

- [corrente elettrica e circuiti] <http://ishtar.df.unibo.it/em/elet/cover.html>
- [modelli atomici] <http://ishtar.df.unibo.it/ma/index.htm>



Lo scritto: i parziali (consigliati)

- sono previsti due scritti p., uno a ½ corso (Termodin. inclusa) ~ metà-fine Aprile, l'altro fine Maggio-inizio Giugno alla fine del corso, ciascuno con tre esercizi e 45 min di durata
- i p. si superano con tre + ε esercizi *corretti* (*) su sei in complesso [avendo quindi partecipato a *tutti e due* i p.]
- i p. hanno validità un anno (→ Luglio 2019)

Compito di Esame di Fisica - Facoltà di Farmacia - A.A. 2014/15
Sede di: Bologna-CTF - parsi Appello 20 04 2015
Cognome e Nome..... N.Matr.....

46

1) Quale potenza, in watt, deve esprimere un corridore, di massa uguale $m = 0.707E+02$ kg, che partendo con una velocità $v_0 = 0.292E+02$ dm/s, raggiunge, in $t = 0.745$ sec, una velocità $v_1 = 26.81$ km/h?

2) Un cilindro di legno di raggio $r = 0.7720E+01$ cm e di altezza $h = 0.3265E+01$ dm emerge per una frazione $f = 0.4603E+02$ % del suo volume in acqua di mare. Trovare la densità del legno. La densità relativa dell'acqua di mare è 1.03.

3) Un tratto di una arteria è ristretto da una placca arteriosclerotica al 21.94% della sua sezione trasversale. Qual è la diminuzione percentuale di pressione in questo punto? La pressione del sangue in una arteria sana è 100 mm Hg e la velocità è 0.120 m/s. La densità del sangue è 940 kg/m³.

esempio

(*) vedi lucido successivo

fln mar 18

4



Lo scritto: unico

- lo scritto globale consiste di sei esercizi da completare in 1h30 durante gli appelli di esame
- si supera con un minimo di tre esercizi corretti su sei [formula risolutiva (quella che permette di estrarre il risultato sostituendo le grandezze note), risultato con unità di misura e 3 cifre significative]
- è valutato solo *suff./insuff.*
- lo scritto g. vale tre mesi

Compito 2

Scuola di Farmacia, ScMot e BioTec - Sede di Bologna
Corso di Chimica e Tecnologia Farmaceutica - A.A.2014/15
Compito di esame di Fisica
Appello 8o 2016/02/19

Cognome e nome..... N.Matricola.....

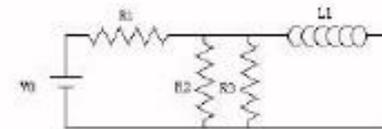
1) Un bambino lancia dei sassi contro una parete quadrata di lato 8.69 m in cui sono stati praticati 477 fori circolari del diametro di 6.95 cm. Se il bambino non mira e i sassi sono piccoli rispetto alle dimensioni dei fori, qual è il numero più probabile di sassi che passerà oltre la parete ogni 349 lanci?

2) L'area superficiale di una membrana cellulare è $0.5143E-06 \text{ m}^2$ e il suo spessore è $0.1342E-07 \text{ m}$. Assumendo che la membrana si comporti come un condensatore piano con costante dielettrica relativa pari a 5.0 e che il potenziale sulla superficie esterna sia di 53.31 mV più grande che sulla superficie interna, qual è la carica che si trova sulla superficie esterna?

3) Si calcoli la lunghezza d'onda associata ad elettroni la cui velocità è $1/0.8075E+02$ della velocità della luce in un mezzo di indice di rifrazione $n = 0.1418E+01$.

4) Una forza di $0.305E+04 \text{ N}$ è applicata ad un estremo di una sbarra metallica rigida. Se la sbarra è fissata all'altro estremo e la direzione della forza forma un angolo $\theta = 0.33E+01$ gradi con l'asse della sbarra e ancora il momento della forza è di 14.7 newton-metro, qual è la lunghezza della sbarra?

5) Si calcoli la corrente continua I che attraversa la batteria nel circuito in figura ($V_0 = 0.848E+02 \text{ V}$, $R_1 = 0.5 \cdot R_2 = 0.25 \cdot R_3 = 0.144E+04 \text{ ohm}$, $L_1 = 16.879 \text{ mH}$).



6) Si calcoli la lunghezza d'onda λ , in cm, di un'onda elettromagnetica che si propaga in un mezzo avente indice di rifrazione $n = 1.42$ con frequenza $f = 0.2430E+13 \text{ Hz}$.



Esempio pag. 5 / soluzioni

Es. di soluzioni
prodotte
dall'eserciziario
elettronico

Compito 2.

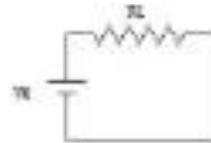
Formula risolutiva: $N_p = N_{max} \cdot s / S$
con s = superficie totale dei fori e S = superficie della parete
Numero più probabile sassi = 8

Formula risolutiva: $q = S \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \Delta V / d$
con S = area membrana, d = spessore, ϵ_0 = costante dielettrica del vuoto, ϵ_r = costante dielettrica relativa, ΔV = differenza di potenziale
Carica = $0.9040E-12$ C

Formula risolutiva: $\lambda = h / (m \cdot v / n)$
con h = costante di Planck, m = massa elettrone, v = velocità
 λ De Broglie (non relativistica) = $0.278E-09$ m

Formula risolutiva: $l = M / [F \cdot \sin(\theta)]$
con M = momento della forza
Lunghezza stoma = $0.827E-01$ m

In corrente continua L_1 è un corto circuito, quindi non passa corrente in R_1 e R_2
Formula risolutiva: $I = V_s / R_3$



Intensità corrente = $0.589E-01$ ampere

Formula risolutiva: $\lambda = c / (n \cdot f)$
con c = velocità della luce nel vuoto
Lunghezza d'onda = $0.993E-04$ cm



Programma a blocchi - Fisica

- Modulo 1 [F.L. Navarra]
 - grandezze fisiche e loro misura [le fondamentali] (5 h)
 - meccanica (punto, corpi, fluidi) [il modello di tutta la fisica] (15 h), NB escluse oscillazioni [moto armonico]
 - termodinamica [la meccanica dei grandi numeri] (8 h)
- Modulo 2 [N. Lanconelli]
 - elettromagnetismo [la meccanica delle cariche elettriche] (10 h)
 - oscillazioni [moto armonico], onde, ottica [onde meccaniche etc. etc.] (10 h)
 - microfisica (fisica atomica) [micromeccanica] (4 h)
- Esercizi (>12 h)

[margine di incertezza ± 2 h]



Testi (consigliati) - Fisica

- F. Borsa e A. Lascialfari, *Principi di Fisica per indirizzo biomedico e farmaceutico*, EdiSES (ad es.)
- D.C. Giancoli, *Fisica*, Casa Ed. Ambrosiana (ad es.)
- R.A. Serway e J.W. Jewett Jr , *Principi di Fisica*,EdiSES (ad es.)
- ...
- (J.W. Kane e M.M. Sternheim, *Fisica biomedica*, Ed. E.M.S.I.)
- (D.M. Burns e S.G.G. MacDonald, *Fisica per gli studenti di biologia e medicina*, Ed. Zanichelli)
- [F.R. Cavallo e F.-L. Navarra, *Appunti di Probabilità e Statistica per un corso di Fisica*, Ed. CLUEB]

An interviewer asked novelist and Nobel laureate William Faulkner.:
“Some of your readers claim they still cannot understand your work after reading it two or three times. What approach would you advise them to adopt?” Faulkner replied, “Read it a fourth time.”



Fisica: una storia sintetica

- VI secolo a.C.: nascita del pensiero scientifico, approccio naturalistico (abbandono del mito), atomisti greci, Democrito (v. De Rerum Natura)
- Platone (matematica), Aristotele (fisica*): il mondo serve un fine (regresso rispetto al naturalismo)
- XVII secolo: rivoluzione, tecnologia → metodo galileiano, Newton (cause del moto, unificazione del terrestre e del celeste)
- XIX secolo: unificazione e.m. (Faraday, Maxwell) → applicazioni tecnologiche **
- XX secolo: altre rivoluzioni (radioattività, relatività, meccanica quantistica, antimateria → applicazioni tecnologiche) **



telescopio

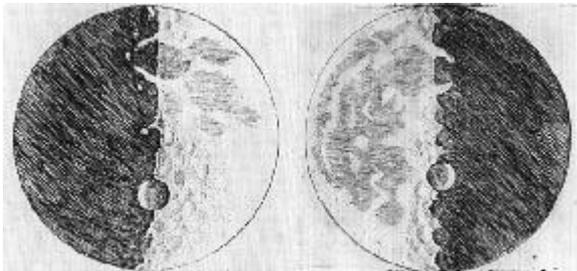


sistema a raggi X per piccole molecole

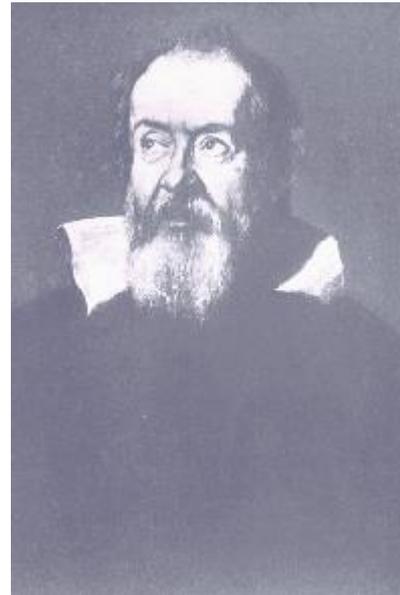
* purtroppo: **nihil est quod videtur**

** vedi 2a parte del corso

- una 1a rivoluzione – si perdono corpi celesti perfetti e centralità della terra (Harriot, Galilei, Keplero)
 - l'imperfezione della superficie lunare
 - satelliti che ruotano intorno a Giove (7 gennaio 1610)
 - anelli di Saturno, fasi di Venere (11 dicembre 1610), macchie solari



La luna disegnata da Galilei



fino a ~1610
osservazione
a occhio nudo,
~1 mm → 1 km,
poi **telescopio**
e **microscopio**:
il mondo appare
molto diverso



(Ancora) sul '600

- **Il '600 è il secolo delle rivoluzioni**
 - Giordano Bruno: l'universo è infinito (ora sappiamo che non è così [età $13.7 \cdot 10^9$ anni, $r_U = 4.4 \cdot 10^{26}$ m], ma che è molto più grande di quanto appare ad occhio nudo o con un telescopio)
 - **la misura e il metodo**, Galilei; prime misure precise di tempo (G., Kepler, Huygens, Newton)
 - **le leggi della meccanica**, (Galilei) Newton, e la gravitazione universale, saldatura fra terra e cielo, Newton
 - **il calcolo infinitesimale** (Newton, Leibnitz): le grandezze variano
 - la perdita della certezza e la nascita del **calcolo delle probabilità** (B. Pascal, Lettera del 24 Agosto 1654 a P. de Fermat sul gioco incompiuto): il futuro non è più imprevedibile, possiamo pianificare le nostre attività e la nostra vita sulla base della probabilità di verificarsi dei più svariati eventi – **nozione di rischio**, utile per le assicurazioni e in tutti i casi di imperfezione, quindi **sempre** – **nozione di incertezza**, fondamentale per la misura (e per la meccanica quantica)
- **Tecnologia: telescopio, microscopio, orologio a pendolo, termometro, barometro, pompa da vuoto**



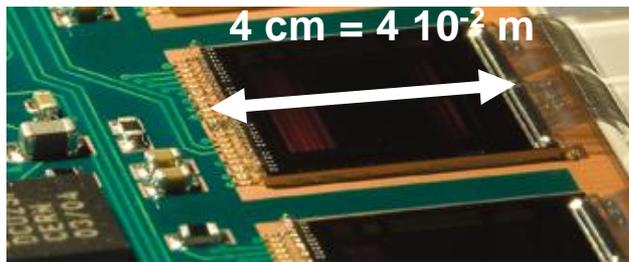
Quello che la fisica è

- Fisica (dal greco φυσικός (*phusikos*) = *naturale*, φύσις = *natura*), si basa su due assiomi:
 - le leggi della natura sono valide ovunque (in qualsiasi tempo e luogo)
 - l'osservazione porta ad una decisione sulla validità di modelli per una descrizione di eventi naturali
- **Sperimentazione** sulla natura a tutti i livelli, dai complessi ai più elementari, effettuata partendo dalla nozione di misura (quantitativa, riproducibile) e dalla definizione operativa di grandezza fisica attraverso il processo di misura
 - ⇒ misura quantitativa, quindi suscettibile di correlazione numerica con altre misure (entro le **incertezze statistiche** di misura)
 - ⇒ misura riproducibile, cioè indipendente dal soggetto che sperimenta e dall'apparato utilizzato (tenuto conto delle incertezze **sistematiche** e della **sensibilità dell'apparato**)



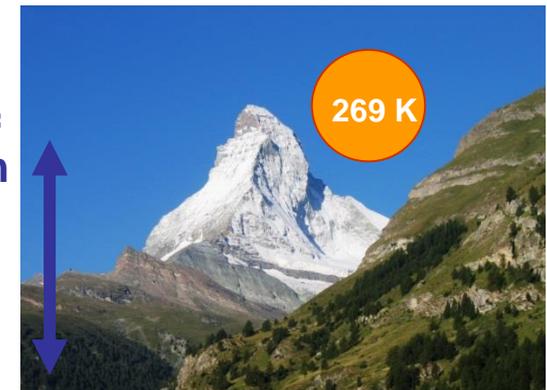
Misura e def. operativa di grandezza fisica

- La misura di una grandezza fisica è l'operazione di confronto *quantitativa e riproducibile* con una unità di misura ('opportuna' grandezza della stessa specie)
- Il risultato dell'operazione di misura è un numero puro (il rapporto fra la grandezza misurata e l'unità di misura)
- Una qualsiasi grandezza fisica è definita operativamente mediante la sua misura



wafer di Si

3 km =
 $3 \cdot 10^3$ m

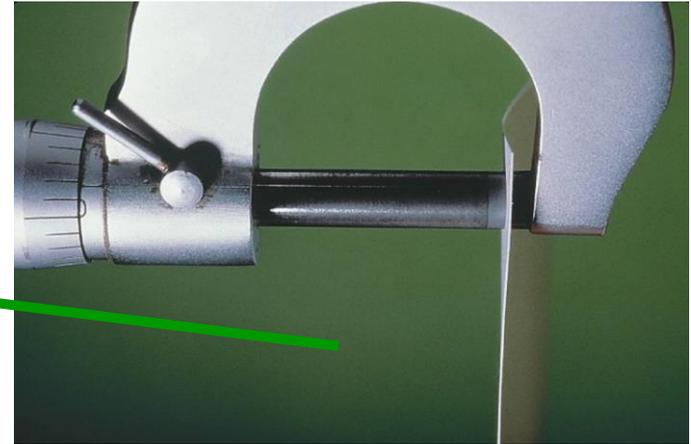




Definizione operativa di una grandezza fisica, processi di misura diretta (confronto) e indiretta

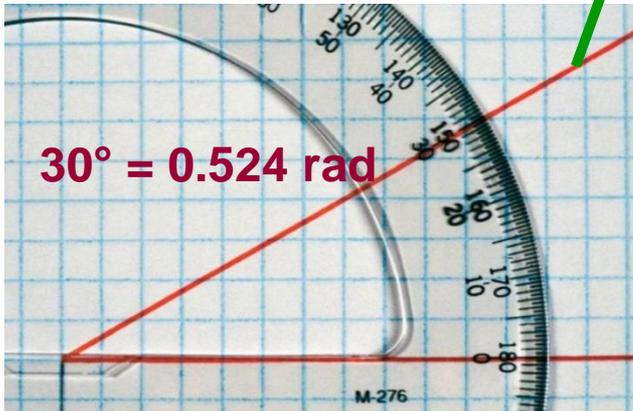


Misure dirette

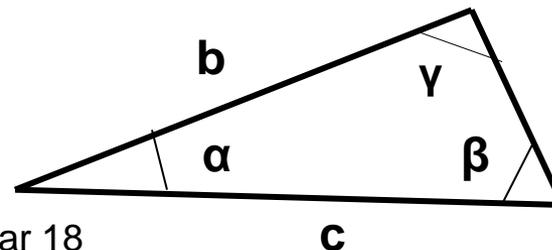


0.07 mm → ←

Misura indiretta: altezza delle montagne mediante triangolazione; temperatura attraverso una misura di resistenza (→ calibrazione) etc.



1a triangolazione della superficie (della Francia): Jean Picard, 1668



$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}$$

b = ?

Trovare **b** è lasciato come esercizio

fln mar 18

c

14



Misure dirette e indirette

Misura diretta quando si confronta direttamente la grandezza misurata con un campione di misura nota.

Esempio: misura di lunghezza con un regolo graduato.

Misura indiretta se ciò che si misura non è la grandezza che interessa, ma altre che siano legate a essa da relazioni funzionali.

Esempio: misura della *distanza* di un oggetto con un sonar.

ovvero

misura del *tempo* percorso dall'onda sonora per andare e tornare dall'oggetto; conoscendo la velocità di propagazione dell'onda posso ricavare la distanza dell'oggetto che l'ha riflessa.



Misura

- Due caratteristiche sono inseparabili dal concetto di misura (di una grandezza fisica)
 - Gli **ordini di grandezza** (\rightarrow notazione scientifica): le **unità di misura** sono comunque scelte ‘arbitrariamente’/spesso indipendentemente dal valore della grandezza misurata
 - L’**incertezza** (ossia l’**errore**) di misura (che si può capire, ridurre, rendere trascurabile, ma non eliminare), stimata ed espressa in forma probabilistica (in particolare, se casuale)
- In (quasi) tutte le discipline scientifiche, un esperimento implica la raccolta e la successiva analisi di dati: spesso si tratta di estrarre un qualche parametro e stimarne l’incertezza.



Domande e risposte



(*)

- 1) Quanto è alta la torre Eiffel? 2) Qual'è l'età dell'universo? 3) E' più bello un quadro astratto o uno figurativo? 4) Sono più veloci i neutrini o la luce nel vuoto? 5) Profuma più una violetta o una rosa? 6) E' più caldo in cima al Cervino o accanto alle piramidi di Gizah? 7) E' più musicale un *la* (440.0 Hz) o un *do* (261.6 Hz)? - Sono tutte domande che ci possiamo porre riguardo a quello che ci circonda.
- La fisica può dare risposta ad alcune domande: quelle suscettibili di una risposta **quantitativa** (1, 2, 4, 6) attraverso un procedimento di **misura/confronto** dopo aver stabilito una opportuna **unità di misura** – E' difficile stabilire l'unità di misura di **bellezza**, di **profumo** o di **musicalità** (anche se è possibile stabilire relative scale).
- Parafrasando W.Shakespeare, Hamlet (1.5.167-8): c'è più fisica nell'ala di una farfalla dalle ali blu di quanto si possa immaginare (riflessione, cambiamento di fase, interferenza) – nihil est quod videtur.



(*) non mostrato a lezione (nmal) fln mar 18

Morpho: es. di interferenza (le ali non contengono un pigmento blu!)



Misura/definizione operativa di grandezza (2)

- Il processo di misura è **centrale**, **fondamentale**; per parlare di grandezza fisica occorre dire come si misura:
 - ⇒ scelta dell'unità di misura (arbitraria, comoda)
 - ⇒ procedimento di confronto con l'unità di misura

$$G = g U_g \quad G' = g' U_{g'} \text{ etc.} \quad \text{ossia} \quad G/U_g = g \text{ etc.}$$

$$l = 8.8 \text{ cm} = 0.088 \text{ m} ; s = 0.07 \text{ mm} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ m} ; \gamma = 30^\circ$$

G - grandezza, g - numero puro che esprime il rapporto con l'unità di misura U_g

- ⇒ misurando una stessa G con unità di misura diverse si ha

$$G = g U_g = g' U_{g'} \quad \rightarrow \quad g' = g U_g / U_{g'}$$

quindi **se l'unità di misura è più piccola G è espressa da un numero più grande, etc.** $l = 8.8 \text{ cm} = 88 \text{ mm}$



Dimensioni delle grandezze fisiche

- una lunghezza, uno spessore, una distanza, uno spazio percorso Δx sono tutte grandezze fisiche omogenee con una lunghezza, cioè hanno tutti la stessa dimensione che si indica con $[L]$ – ***NB si prescinde dal valore numerico***
- **allo stesso modo una qualsiasi superficie (cerchio, quadrato etc.) è omogenea con il quadrato di una lunghezza e si indica con $[L^2]$ – sia 15 km^2 che $0.7 \text{ }\mu\text{m}^2$ etc.**
- il tempo misurato a partire da un istante iniziale ed un intervallo di tempo Δt sono omogenei con un tempo: $[T]$
- in generale, in meccanica: $[G] = [L^\alpha M^\beta T^\gamma]$ con $\alpha, \beta, \gamma +vi, -vi, 0$
- ***tutte le relazioni in fisica devono essere dimensionalmente corrette; qualsiasi sia la combinazione di grandezze che compare nella relazione, le dimensioni a dx dell' = devono essere le stesse di quelle a sx dell' = : $[v] = [s/t] = [LT^{-1}]$***

+vi – positivi
-vi – negativi
0 - nulli

v – velocità

fln mar 18

s – spazio percorso
t – tempo impiegato



Prefissi e notazioni

- **I risultati delle misure possono essere espressi da numeri molto più grandi o più piccoli di 1** - *dipende dall'unità di misura scelta* - si può usare quindi un **prefisso**, **comunemente**:
[atto (a) 10^{-18} ; femto (f) 10^{-15} ,] pico (p) 10^{-12} ; nano (n) 10^{-9} ;
micro(μ) 10^{-6} ; milli (m) 10^{-3} ; centi (c) 10^{-2} ; deci (d) 10^{-1} ; deca (da o D) 10^1 ; etto (h) 10^2 ; chilo (k) 10^3 ; mega (M) 10^6 ; giga (G) 10^9 ; tera (T) 10^{12} ; peta (P) 10^{15} ; [exa (E) 10^{18}]
- Le grandezze sono espresse mediante lettere (ad es. iniziale in italiano o in inglese: v per velocità, c per celerity) ma l'alfabeto latino esteso spesso **non** è sufficiente ad evitare confusione di notazioni, così si usano anche lettere greche, **comunemente**:
minuscole: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta, \theta, \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma, \tau, \varphi, \chi, \psi, \omega$
maiuscole: $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Phi, \Omega$
- Le unità di misura si indicano con la maiuscola se abbreviano un nome proprio - **1 A = 1 ampère**, **1 N = 1 newton** (ma con la minuscola iniziale, se scritte per intero) .



Leggi, modelli, teorie

- Misure contemporanee di diverse grandezze permettono di ottenere, entro gli errori di misura, **relazioni fra le grandezze misurate** (ad es. temperatura esterna ed ora del giorno, tempo e distanza di caduta per un corpo in un fluido)
 - ⇒ **leggi esprimibili in linguaggio matematico**
(ad es. funzioni elementari, eq. fra grandezze finite, eq. differenziali etc., più in generale informazione/correlazione sotto forma di **tabella, grafico, n-tupla, database** ↔ **calcolatrice, PC etc.**)
 - ⇒ (diverse) leggi → **modello/teoria da confrontare con ulteriori misure** (verifica o falsificazione sperimentale, **metodo sperimentale galileiano**)
 - ⇒ analogie fra diversi fenomeni portano a leggi sostanzialmente simili (e a migliore comprensione)
- Le leggi fisiche, per loro intrinseca natura, non sono mai definitive

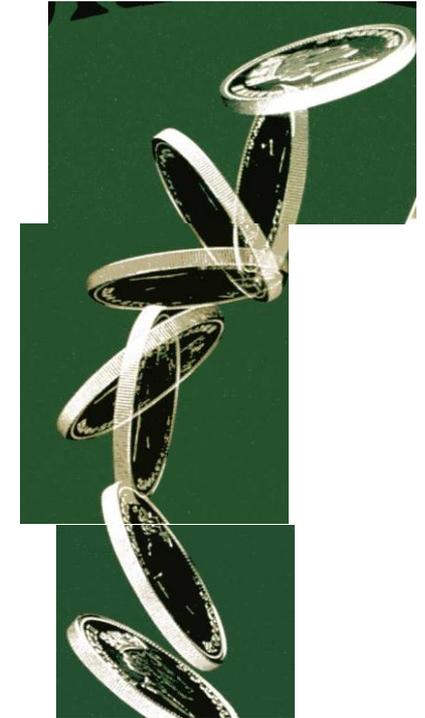


Probabilità, preliminari

... il mondo è dissolto in una pullulante nuvola di probabilità ...
Carlo Rovelli, Sette brevi lezioni di fisica, ADELPHI, 2014

To us, probability is
the very source of
life (Joseph Butler,
1692-1752)

- Prima di discutere ulteriormente la misura di una grandezza fisica e la precisione di misura, si premette la nozione di probabilità (ed il relativo calcolo), che serve, *ma non solo**, a quantificare l'incertezza nelle misure (in fisica e nella scienza in generale)
- Probabile: dal verbo latino *probare* (provare, verificare) e dal suffisso *-ilis* (che può essere) → “che può essere verificato”, dove la verifica è empirica

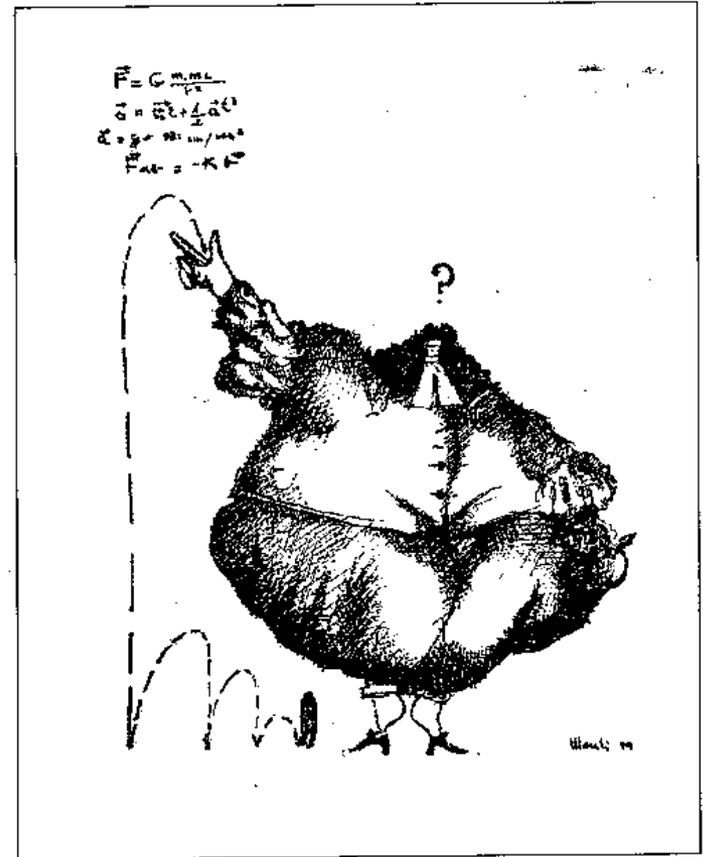


* a livello microscopico la probabilità impera 18



Probabilità

- testa o croce? perchè?
- si lancia una moneta (*evento*, *esperimento*) e si potrebbe scomodare Newton (e un PC)
- oppure si può dire che non sappiamo esattamente cosa accadrà in un dato *caso*, ma che mediamente $P(T) = P(C) = \frac{1}{2} = 50\%$ dove P è la *probabilità* – nel 50% (50%) dei *cas*i esce T(C)
- *a fortiori*, seguire, una ad una, le molecole di un gas è **impossibile** anche con una 'farm' di 10^5 PC (ad es. centro di calcolo del CERN)



Un lancio di moneta potrebbe essere seguito in modo deterministico usando le equazioni di Newton ...



Definizioni di probabilità

Formalizziamo il concetto, associando a ogni evento x un numero $P(x)$, probabilità, tale che:

1. **$P(\text{evento certo}) = 1$**
2. **$P(\text{evento impossibile}) = 0$**
3. Per ogni evento x : **$0 \leq P(x) \leq 1$**
4. **Se x_1 e x_2 sono due eventi mutuamente esclusivi (*)**
 $P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)$
5. **Se $\{x_i, i=1, N\}$ è un gruppo completo (**) di eventi mutuamente esclusivi**
 $\sum_i P(x_i) = 1$

Esistono diverse definizioni possibili di probabilità che soddisfano questi assiomi. Si premettono alcune definizioni.

(*) Due ev. sono mutuamente esclusivi se non possono verificarsi insieme
(**) Un gruppo di ev. si dice completo se almeno uno di essi deve necessariamente accadere



Probabilità condizionata

- La probabilità condizionata è la probabilità che accada l'evento A *una volta che* è accaduto l'evento B (**NB** non c'è una connotazione strettamente temporale), si indica con

$$P(A|B)$$

- es. A = superare lo scritto di Fisica, B_j = risolvere correttamente j esercizi, chiaramente

$$P(A|B_{\geq 3}) > P(A|B_{\leq 2})$$

(la prima è 1, la seconda è 0)

- può succedere che $P(A)$ sia piccola mentre $P(A|B)$ è grande: A = la squadra ultima in classifica vince il campionato, B = le altre squadre sono tutte squalificate per illecito sportivo



Relazione fra eventi

L'evento A è **dipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada dipende dal fatto che accada B.

Esempio: A = "L'Umana Reyer Venezia vince lo scudetto del basket",
B = "I più forti giocatori dell'URVenezia si infortunano durante i play-off"

$P(A) \neq P(A|B)$ con $P(A|B)$ probabilità condizionata

L'evento A è **indipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada non dipende da B

Esempio: A = "la Segafredo Virtus Bologna vince lo scudetto del basket"
B = "Il Bologna FC vince il campionato di calcio di serie A"

per eventi indipendenti $P(A|B) = P(A)$

Due eventi A e B sono **mutuamente esclusivi** (**incompatibili**) se non possono verificarsi insieme.

Esempio: A = "Il Grissini Bon Reggjo E. vince lo scudetto del basket"
B = "Il VL Pesaro vince lo scudetto del basket"

per eventi incompatibili $P(A|B) = 0$



Altre definizioni ed esempi (v. assiomi 4,5 a pag. 24)

Eventi casuali formano un **gruppo completo di eventi** se **almeno uno** di essi deve **necessariamente** accadere (*)

(Esempio: $A_1 \dots A_{30}$ = «L'i-esimo sciatore ammesso alla 2° manche di uno slalom arriva 1° della gara»; in questo caso ci possono anche essere ex-equo, quindi A_i non esclude A_j .)

Eventi contrari sono due eventi mutuamente esclusivi che formano un gruppo completo.

Esempio: A = “Nel lancio di una moneta esce Testa”

B = “Nel lancio di una moneta esce Croce”

A = non B

$$P(A) = P(\text{non B}) = P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$

Due o più eventi casuali si dicono **equiprobabili** se la **simmetria** dell'esperimento permette di supporre che essi abbiano tutti la **stessa probabilità** di accadere.

(Esempio: $A_1 \dots A_6$ = “Nel lancio di un dado non truccato esce la faccia i”)

- In un **gruppo completo di N eventi equiprobabili e mutuamente esclusivi** la probabilità di ciascuno di essi è:

$$P = 1/N$$

(Esempi - Lotto: 1/90, monete: 1/2, dado/cubo: 1/6)

(*) **NB** Gli eventi non sono in generale anche mutualmente esclusivi, v. esempio.



Somma e prodotto di eventi

Somma di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A o di B o di entrambi** (varie notazioni \cup , $+$, \circ)

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A+B) = P(A \circ B)$$

Somma di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di almeno uno di essi, $P(Z) = P(A \cup B \cup C \cup \dots) = P(A+B+C+\dots) = P(A \circ B \circ C \circ \dots)$.

Prodotto di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A e di B “contemporaneamente”** (\cap , \cdot , e)

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A e B)$$

Prodotto di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di tutti loro “contemporaneamente”, $P(Z) = P(A \cap B \cap C \cap \dots) = P(A \cdot B \cdot C \cdot \dots) = P(A e B e C e \dots)$.



Variabili aleatorie, distribuzioni di probabilità

Variabili aleatorie : grandezze che, nel corso di una prova, possono assumere un valore sconosciuto a priori (es. risultato di una misura, estrazione di un numero della lotteria).

Si distinguono in:

discrete : se possono assumere solo un insieme di valori numerabile

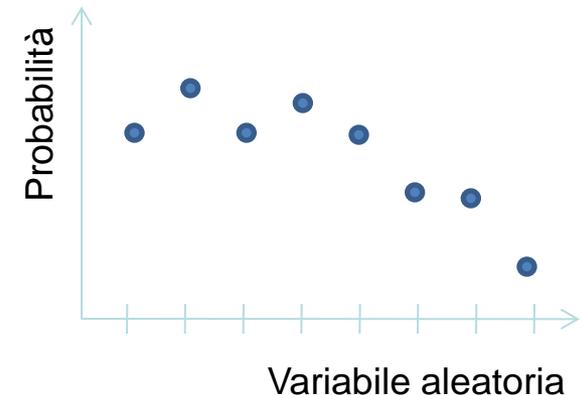
es: il numero estratto da un'urna del lotto, $P(x_i) = 1/90$ ($i = 1, 2, \dots, 90$); $\sum_{i=1,90} P(x_i) = 1$

continue : se possono assumere un insieme di valori continuo

es: il punto in cui una freccetta colpisce un bersaglio, il risultato di una misura

Distribuzione di probabilità :

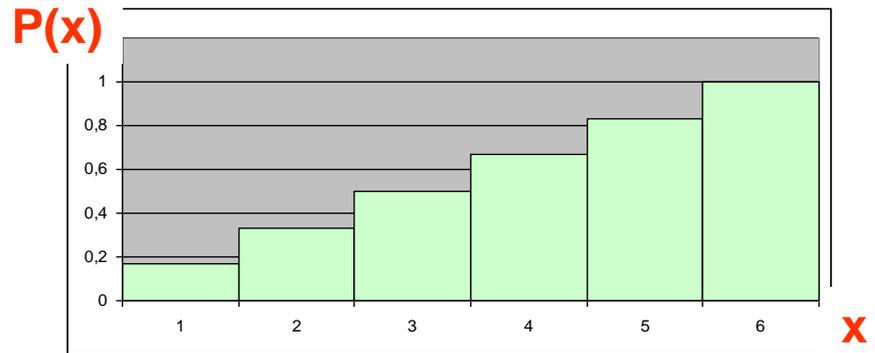
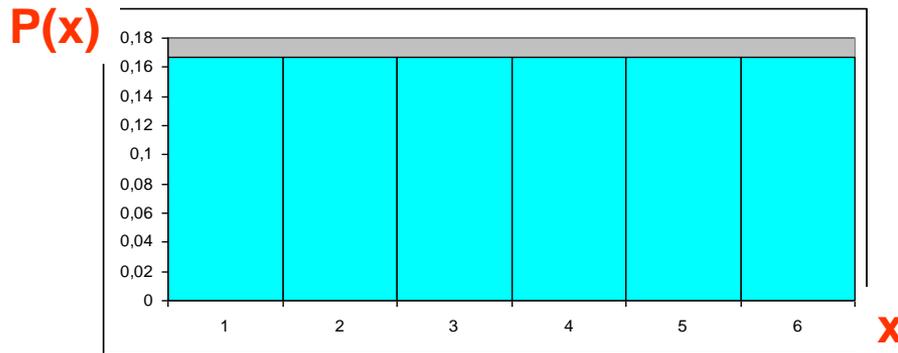
funzione che associa a ciascun possibile valore assunto dalla variabile aleatoria la corrispondente probabilità. La somma (l'integrale) delle probabilità dei possibili valori è = 1 (la certezza)



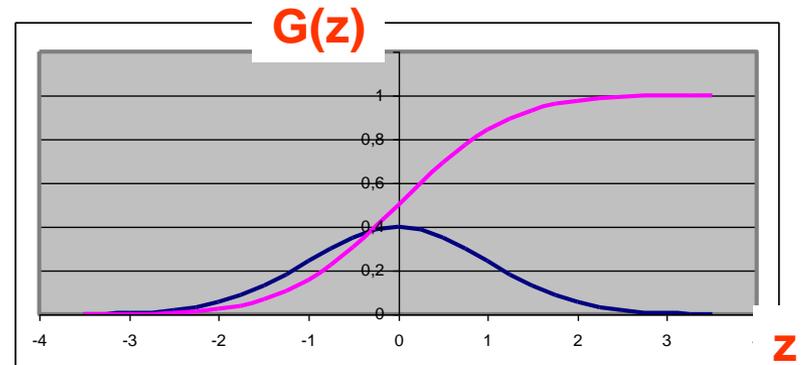


Distribuzioni di probabilità cumulative(*)

- sia $P(x_i)$ con $i=1,N$ una distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta x_i , si dice cumulativa la distribuzione $\sum_{i=1,j} P(x_i)$, tale che $\sum_{i=1,N} P(x_i) = 1$ (la certezza, per es. una qualsiasi faccia del dado deve per forza uscire)



- per una variabile aleatoria continua basta sostituire la Σ con un \int (per es. per la funzione di Gauss, vedi più avanti, $G(z) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-z^2/2)$, l'integrale fra $-\infty$ e 0 vale 0.5, cioè c'è una probabilità del 50% che z capiti in quell'intervallo: curva fucsia = area sotto la curva blu)



- l'area fra $z = -1$ e $z = +1$ vale 0.683 (da ricordare)



Valore atteso

Valore atteso (o **speranza matematica**) di una variabile aleatoria : somma (o integrale) di tutti i possibili valori della variabile aleatoria moltiplicati per la loro probabilità.

Variabile aleatoria discreta (distribuzione di probabilità discreta):

$$\langle X \rangle = \sum_{i=1, N} x_i \cdot P(x_i)$$

Variabile aleatoria continua (distribuzione di probabilità continua):

$$\langle X \rangle = \int_{\text{tutti gli } x} x \cdot P(x) \cdot dx$$

Si dimostra che il valor medio $x_{\text{medio}} = (\sum_{i=1, K} x_i) / K$ dei valori misurati di una variabile aleatoria in un numero molto grande di “esperimenti” tende al valore atteso della variabile aleatoria.



Esercizio

Si effettuano **diverse misure** del raggio di base (R) e dell'altezza (H) di uno **stesso** cilindro, ottenendo le seguenti coppie di valori:

$$\begin{aligned}R_1 &= 23.92 \text{ cm}, & H_1 &= 17.59 \text{ cm} \\R_2 &= 0.2406 \text{ m}, & H_2 &= 0.1747 \text{ m} \\R_3 &= 238.3 \text{ mm}, & H_3 &= 175.4 \text{ mm}\end{aligned}$$

NB R_i, H_i di uno stesso V misurati in diverse operazioni saranno più o meno uguali

Trovare il **valor medio** del volume del cilindro.

Formula risolutiva: $V_{\text{medio}} = (V_1 + V_2 + V_3)/3 = \pi [(R_1^2 H_1 + R_2^2 H_2 + R_3^2 H_3)/3]$
con $V_i = \pi \cdot R_i \cdot R_i \cdot H_i$, dove R_i = raggio base, H_i = altezza

Ad es. nel Sistema Internazionale una lunghezza si esprime in m:

$$\begin{aligned}R_1 &= 0.2392 \text{ m}, & H_1 &= 0.1759 \text{ m} & \rightarrow & V_1/\pi = 0.1006 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3 & [0.010064] \\R_2 &= 0.2406 \text{ m}, & H_2 &= 0.1747 \text{ m} & \rightarrow & V_2/\pi = 0.1011 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3 & [0.010113] \\R_3 &= 0.2383 \text{ m}, & H_3 &= 0.1754 \text{ m} & \rightarrow & V_3/\pi = 0.0996 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3 & [0.009960]\end{aligned}$$

Valor medio del volume = $0.316 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$ (= $3.16 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ = $0.316\text{E}-01 \text{ m}^3$ = 0.0316 m^3)

(NB si deve usare la stessa unità!)



Probabilità classica

La probabilità, $P(x)$, di un evento x è il rapporto tra il numero M di casi "favorevoli" (cioè il manifestarsi di x) e il numero totale N di risultati ugualmente possibili e mutuamente esclusivi.

Detta anche **probabilità oggettiva** o **probabilità a priori**: stima della probabilità di un evento a partire dalla simmetria del problema.

Esempio: lancio di un dado non truccato – la probabilità, di avere un numero qualsiasi compreso fra 1 e 6, è $1/6$:

$$P(x) = \frac{\text{Numero di volte in cui può uscire } x}{\text{Numero di risultati possibili}} = \frac{1}{6}$$



Probabilità empirica

Definizione **sperimentale** di probabilità come **limite della frequenza** misurabile in una serie di esperimenti.

La probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero di prove.

Nota : rispetto alla definizione classica sostituiamo il rapporto

$$\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

con

$$\frac{\text{numero di esperimenti con esito favorevole}}{\text{numero complessivo di esperimenti effettuati}}$$



Probabilità empirica/2

In pratica, se abbiamo un esperimento ripetuto N volte ed un certo risultato x che accade M volte, la probabilità di x è data dal limite della **frequenza** (M/N) quando N tende all'infinito

$$P(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} M/N$$

Vantaggio: possiamo applicare la definizione anche a

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è uniforme
- casi in cui la distribuzione di probabilità non è ricavabile a priori dalla simmetria dell'esperimento.



Probabilità empirica/3

N1: **la probabilità empirica** ...non è una proprietà solo dell'esperimento ma...
dipende del particolare gruppo su cui viene calcolata.

Es: la probabilità di sopravvivenza ad una certa età, calcolata su diversi campioni di popolazione a cui una stessa persona appartiene (maschi, femmine, fumatori, non fumatori, deltaplanisti, ecc.), risulta diversa.

N2: ... **si può rigorosamente applicare soltanto agli esperimenti ripetibili** per i quali il limite per N che tende all'infinito ha senso.

Es: Il risultato di una partita di calcio, il tempo atmosferico di domani e molte altre situazioni della vita quotidiana **non** sono soggette all'uso di questa definizione di probabilità.

N3: necessità di "operatività": (quasi) tutti sono concordi nel definirla come **il valore della frequenza relativa di successo su un numero di prove sufficientemente grande** (l'incertezza su P dopo N prove è calcolabile in ogni caso):
grande, ma non necessariamente tendente all'infinito!!!!



Come si usa la probabilità – predizione

- al di là della particolare definizione di probabilità, **se conosco la probabilità $P(x)$** di un evento x , posso inferire che cosa succederà, cioè **quante volte (M) uscirà il risultato x , in una serie di N esperimenti/prove** – cioè si inverte la definizione di probabilità

$$M = P(x)N$$

è il valore più probabile (NB intero, se la variabile aleatoria x è intera)



- es. dado, 100 lanci, $M = P(5)N = 100/6 = 17$

NB 16.66... sarebbe il valor medio su un gran numero di serie di 100 lanci ciascuna



Esercizio - predizione

Un bambino lancia sassi contro una parete circolare di **raggio** 0.514 m in cui sono stati praticati $N_f = 26$ fori circolari del **diametro** di 5.70 cm. Se il bambino non mira e i sassi sono piccoli rispetto alle dimensioni dei fori, qual è il numero più probabile di sassi che passerà oltre la parete ogni $N_l = 3670$ lanci? Qual è la probabilità che un sasso rimbalzi ?

Soluzione:

Simmetria del problema \rightarrow ogni cm^2 ha la stessa probabilità di essere colpito \rightarrow probabilità p di passare dall'altra parte è data dall'area favorevole (dei fori) s diviso l'area totale S :

$$p = s/S = N_f \cdot [d/(2R)]^2 = 0.0799$$

con $s =$ superficie totale dei fori $= N_f \cdot \pi \cdot d^2/4$

$$S = \text{superficie della parete} = \pi \cdot R^2$$

$$d = \text{diametro dei fori} = 0.570\text{E-}01 \text{ m}$$

$$R = \text{raggio della parete} = 0.514\text{E+}00 \text{ m}$$

$$N. \text{ più probabile sassi} = N_l \cdot p = N_l \cdot s/S = N_l \cdot N_f \cdot [d/(2R)]^2 = 293 \quad \text{(NB: intero!!!)}$$

Probabilità di un rimbalzo: $q = 1 - p = 1 - s/S = 0.920$ etc.



Probabilità soggettiva(*)

La probabilità di un evento x è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di x .

Definizione meno rigorosa, ma spesso usata per formulare giudizi:

Es: “credo che domenica la mia squadra riuscirà a vincere”,
“è facile che mi capiti una domanda sulla probabilità all'esame di fisica”,

Nota:

Talvolta siamo forzati a assegnare un determinato grado di fiducia all'avverarsi di un evento.

Esempio:

il grado di fiducia che diamo al fatto che il gruppo su cui abbiamo calcolato la frequenza di un evento sia effettivamente rappresentativo del campione totale.



Teoremi sulla probabilità

- Teorema della somma ←
- Teorema del prodotto
- Teorema della probabilità composta ←
- Teorema della probabilità totale
- Teorema di Bayes



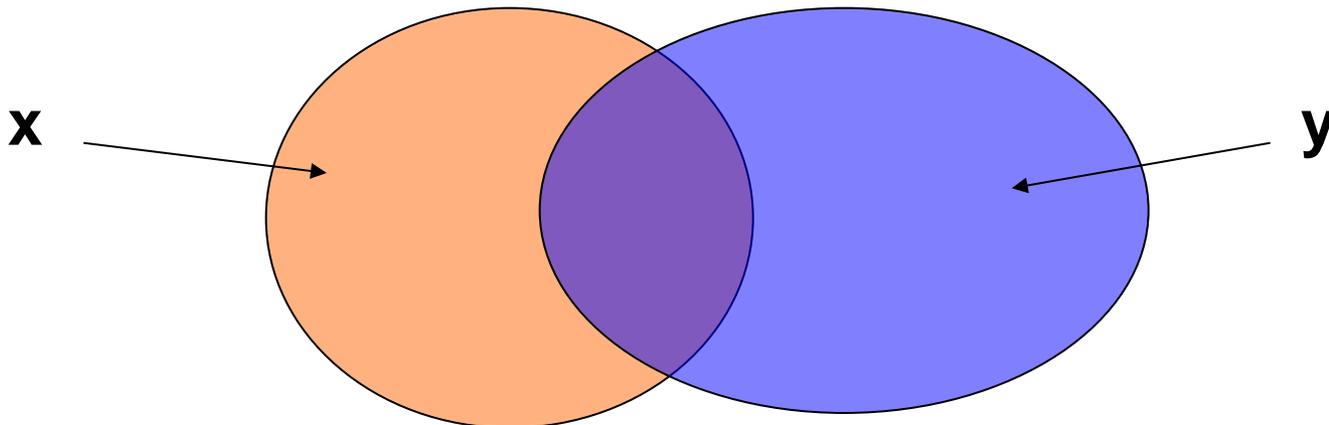
Teorema della somma

Per due eventi qualsiasi, x , y , non necessariamente mutuamente esclusivi, la prob. che avvenga $x \circ y$ vale

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$$

(ovvero $P(x+y) = P(x) + P(y) - P(x \cdot y)$)

(ovvero $P(x \circ y) = P(x) + P(y) - P(x \text{ e } y)$)





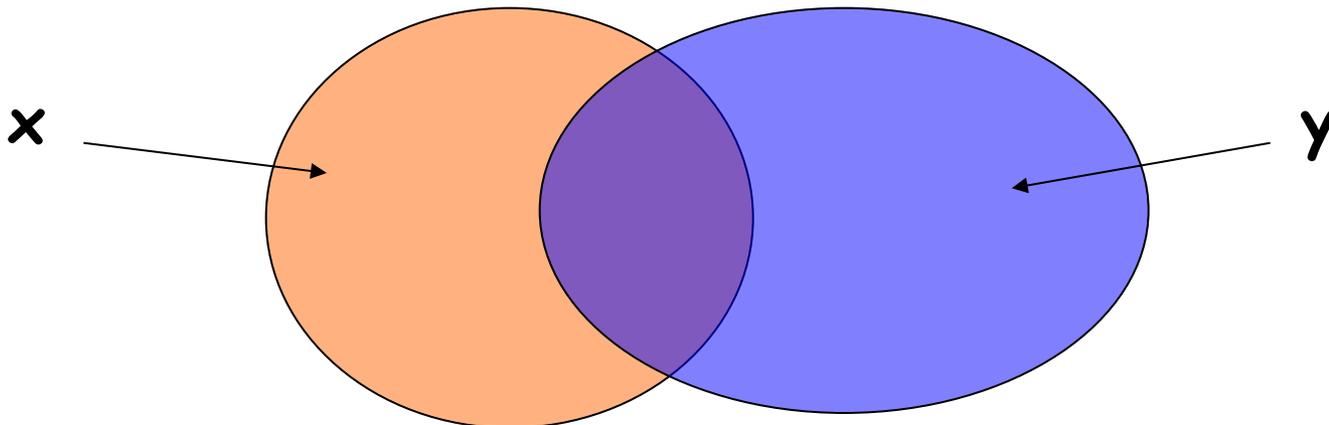
Teorema del prodotto(*)

Per due eventi qualsiasi, x , y , non necessariamente mutuamente esclusivi, la prob. che avvenga x e y vale

$$P(x \cap y) = P(x) + P(y) - P(x \cup y)$$

$$(\text{ovvero } P(x \cdot y) = P(x) + P(y) - P(x + y))$$

$$(\text{ovvero } P(x \text{ e } y) = P(x) + P(y) - P(x \text{ o } y))$$





Teorema della probabilità composta

Altro modo per esprimere il teorema del prodotto :

la probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro calcolata a condizione che il primo abbia luogo:

$$P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y|x) [= P(y) \cdot P(x|y)]$$

Si noti che:

- **se x e y sono mutuamente esclusivi** $P(y|x)=0$ e $P(x \cap y) = 0$;
- **se x e y sono indipendenti**, $P(y|x) = P(y)$ e $P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y)$.



Esercizi

Un tiratore ha una probabilità uguale a 0.178 di fare centro ad un qualsiasi colpo. Se prende un autobus per recarsi al poligono di tiro qual è la probabilità che riceva un biglietto dell'autobus con un numero divisibile per 20 **e al tempo stesso (oppure)** di fare centro al secondo colpo?

 P_1 (biglietto dell'autobus con numero divisibile per 20) = $1/20 = 0.05$ (Ad es., per numeri interi casuali di 7 cifre, uno ogni 20 sarà divisibile per 20)

P_2 (fare centro al secondo colpo) = 0.178 (Al secondo colpo P_2 è la stessa che ad ogni altro colpo)

NB Gli eventi sono indipendenti!

1) P = Probabilità che avvengano contemporaneamente (**prodotto**)

$$P = P_1 \cdot P_2 = 0.00890 (= 8.90 \cdot 10^{-3} = 0.890E-02)$$

2) P' = Probabilità che avvenga l'uno o l'altro (**somma**)

$$P' = P_1 + P_2 - P_1 \cdot P_2 = 0.219 (= 2.19 \cdot 10^{-1} = 0.219E+00)$$



Teorema della probabilità totale(*)

Dato un gruppo completo di N eventi mutuamente esclusivi $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ (**insieme delle ipotesi**)

la probabilità di un evento x che può avvenire contemporaneamente a esse:

$$P(x) = \sum_{i=1, N} P(x|A_i) \cdot P(A_i)$$

cioè

probabilità dell'evento x = la somma dei prodotti delle probabilità di ciascuna delle ipotesi per la probabilità condizionata dell'evento con tali ipotesi



Teorema di Bayes(*)

Osserviamo un evento x . Esiste un insieme delle ipotesi $\{A_i\}$. Come viene modificata la probabilità che assegnamo all'ipotesi A_i dopo l'osservazione x ? (In altre parole: qual è la probabilità condizionata dell'ipotesi A_i data l'osservazione x ?)

Per il teorema della moltiplicazione:

$$P(x \cdot A_i) = P(x) \cdot P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i)$$

$$\rightarrow P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i) / P(x)$$

$$\rightarrow P(A_i|x) = \frac{P(A_i) \cdot P(x|A_i)}{\sum_{i=1,N} P(A_i) \cdot P(x|A_i)}$$



Esercizio sul teorema di Bayes(*)

Per facilitare un'identificazione precoce dei tumori al seno, le donne da una certa età in poi sono incoraggiate a sottoporsi a mammografia, anche se non presentano sintomi. Per donne senza sintomi fra i 40 e i 50 anni valgano le seguenti informazioni: la probabilità di avere un tumore al seno è dell'1% (**incidenza della malattia**); se sono effettivamente malate, la probabilità che il tumore sia visto dalla mammografia è dell'80% (**efficienza del test**); se non sono malate, la probabilità di una mammografia positiva è comunque del 10% (**falsi positivi**).

Supponiamo che una donna di questo gruppo risulti positiva a una mammografia: qual'è la probabilità che essa sia effettivamente malata?



Soluzione(*)

Probabilità di essere malati:

$$P(M) = 1\% = 0.01$$

Probabilità di essere sani:

$$P(S) = 1 - 1\% = 99\% = 0.99$$

Probabilità di avere il test positivo se malati (prob. condizionata):

$$P(+ | M) = 80\% = 0.80$$

Probabilità di avere il test positivo se sani (prob. condizionata):

$$P(+ | S) = 10\% = 0.10$$

Per il teorema di Bayes:

$$\begin{aligned} P(M|+) &= P(+ | M) \cdot P(M) / [P(+ | M) \cdot P(M) + P(+ | S) \cdot P(S)] \\ &= 0.8 \cdot 0.01 / [0.80 \cdot 0.01 + 0.10 \cdot 0.99] \\ &= 0.0748 = 7.5\% \end{aligned}$$

Cioè la frazione di donne effettivamente malate fra quelle che risultano positive alla mammografia è del 7.5%



Trattamento in termini di frequenza(*)

A qualcuno potrebbe risultare più semplice pensare in termini di frequenza (numero di casi possibili) invece che in termini di probabilità. Il procedimento non è concettualmente diverso.

Supponiamo un campione di 1000 donne che si sottopone al test. Avremo:

Numero medio di malati: $N(M) = 1000 \cdot P(M) = 1000 \cdot 0.01 = 10$

Numero medio di sani: $N(S) = 1000 - 10 = 990$

Numero di individui malati che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+|M) = N(M) \cdot P(+|M) = 10 \cdot 0.80 = 8$$

Numero di individui sani che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+|S) = N(S) \cdot P(+|S) = 990 \cdot 0.10 = 99$$

Pertanto, $8+99=107$ persone su 1000 risulteranno, in media, positive al test. La frazione di queste che è effettivamente malata è:

$$N(+|M) / [N(+|M) + N(+|S)] = 8/107 = 0.0748 = 7.5\%$$

Cioè la **frazione** di persone effettivamente malate fra quelle che risultano positive al test in oggetto è del 7.5% (come si è trovato col teorema di Bayes).



Misura di grandezze fisiche e probabilità

La misura di una grandezza fisica è descrivibile tramite tre elementi:

- **valore più probabile;** (tendenza del campione)
- **incertezza** (o “errore”), la precisione con cui il valore più probabile approssima il valore vero; (dispersione del camp.)
- **unità di misura.** [la misura è confronto]

Valore più probabile, errore e unità di misura danno una descrizione completa e accurata di una grandezza misurata.

L'errore sulla misura determina il numero di cifre significative (v. pag. 63) con cui riportare il valore più probabile. **Non ha senso scrivere la quarta cifra significativa se già c'è una indeterminazione sulla terza cifra!**

Se una grandezza è riportata, senza scrivere esplicitamente l'errore, con n cifre significative, convenzionalmente si assume un errore di ± 1 sulla n -esima cifra.



Misure ed errori di misura (incertezze)

La **misura** è la stima del **valore vero** di una **grandezza**.

Limiti alla precisione di questa stima:

- **Sensibilità dello strumento di misura**

l'ultima cifra che può essere letta

oppure

la frazione di divisione che può essere apprezzata;

- **Fluttuazioni casuali del valore misurato**

- Possibilità di **errori** nella **procedura** e/o nello **strumento** (errori sistematici: i più difficili da trattare).

NB il valore vero di una grandezza **non** può essere conosciuto (e **non** solo in fisica)

$$X_{\text{mis}} = X_{\text{vero}} + \epsilon$$



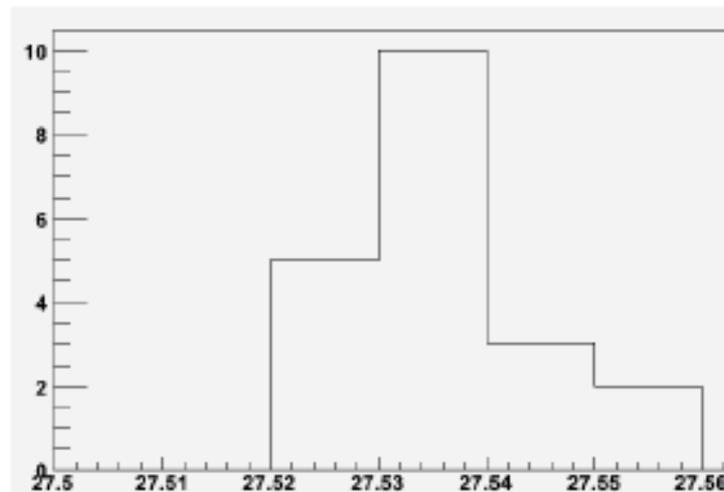
Istogrammi di frequenza

Il risultato della misura di una grandezza fisica è una *variabile aleatoria*. (v. pag. 29)

Possiamo **ripetere la misura** molte volte per studiare le variazioni del risultato (se ce ne sono) dovute agli errori (cioè ottenere la *distribuzione di probabilità* della variabile aleatoria).

Queste distribuzioni possono essere riassunte in Tabelle o in Istogrammi o ulteriormente condensate in un numero minore di parametri.

n.prova	risultato
0	27.525
1	27.531
2	27.539
3	27.529
4



fln mar 18



Media aritmetica

- Se faccio la media aritmetica delle misure

$$x_m = (\sum_{i=1, N} x_i) / N = (N x_{\text{vero}} + \sum_{i=1, N} \varepsilon_i) / N = x_{\text{vero}} + \varepsilon_m$$

- La media degli scarti $\varepsilon_m \rightarrow 0$ per N grande: gli ε_i sono casuali, $\pm v_i$ (*).
- Quindi, se le misure sono ugualmente attendibili, **la migliore stima di x_{vero} (che non può essere conosciuto) è proprio x_m** che per definizione annulla la media degli scarti (rispetto a se stesso).
- Gli scarti, essendo $\pm v_i$, non permettono di valutare la dispersione; invece gli $(\text{scarti})^2$, sempre $+v_i$, sì \rightarrow **scarto quadratico medio**.

(*) +vo = positivo etc.



Deviazione standard

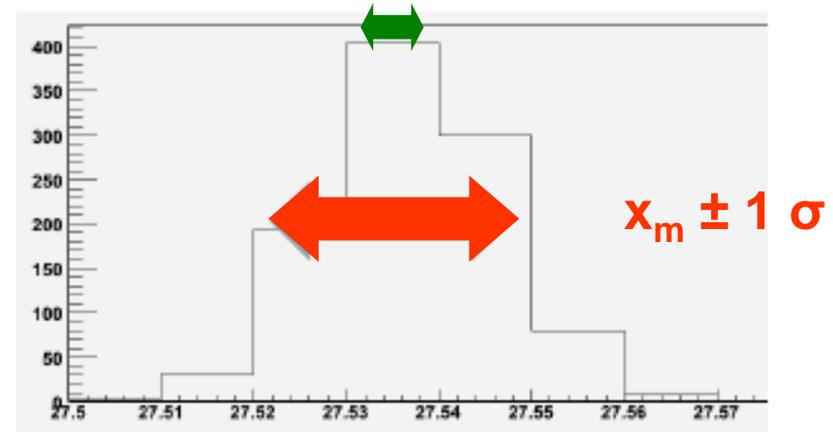
consideriamo la radice quadrata dello scarto quadratico medio (**deviazione standard**):

Si può dimostrare che, se la dev. std. della misura è σ , la dev. std. della media di N misure è $\Delta x = \sigma/\sqrt{N}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - X_{me})^2}{(N-1)}}$$

sulla media:
 $\Delta x = \sigma/\sqrt{N}$

La deviazione standard è un indicatore della larghezza della distribuzione delle misure.



Se abbiamo delle misure distribuite in maniera casuale e centrate attorno al loro valor medio, la deviazione standard è la stima migliore dell'errore con cui si può conoscere il valore vero della grandezza misurata partendo **da una singola misura**.



Verso un'interpretazione probabilistica

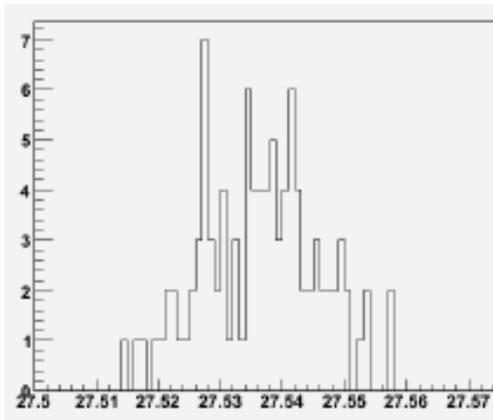
Qual è la probabilità che il valore vero si trovi nell'intervallo **valore più probabile \pm errore** ?

(errore o, se si ha paura del significato negativo, **incertezza**)

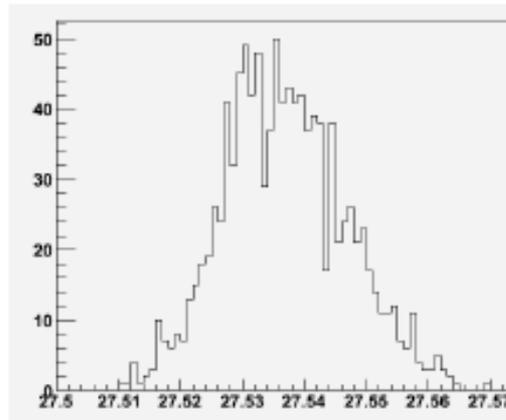
Osservazione:

Se le **misure** sono **casuali e indipendenti fra loro**

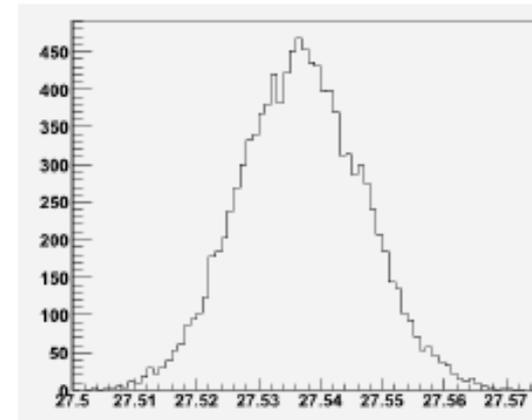
⇒ l'**istogramma di frequenza** tende ad assumere forma a **campana...**



100 misure



1000 misure



10000 misure

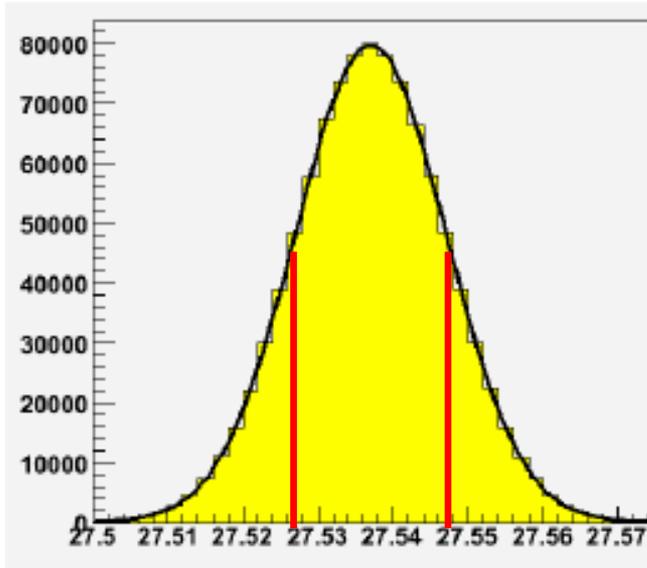
...centrata sul valor medio

...con larghezza dell'ordine della deviazione standard



Funzione di Gauss

...cioè secondo la **distribuzione normale** (o di Gauss o gaussiana)



$\mu \pm 1\sigma$

$$G(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con:

N = numero di misure

μ = valor medio

σ = deviazione standard

$\pm 1\sigma$	68.3%	probabilità	(area sotto G(x))
$\pm 2\sigma$	95.4%	«	«
$\pm 3\sigma$	99.7%	«	«

Teorema del limite centrale :

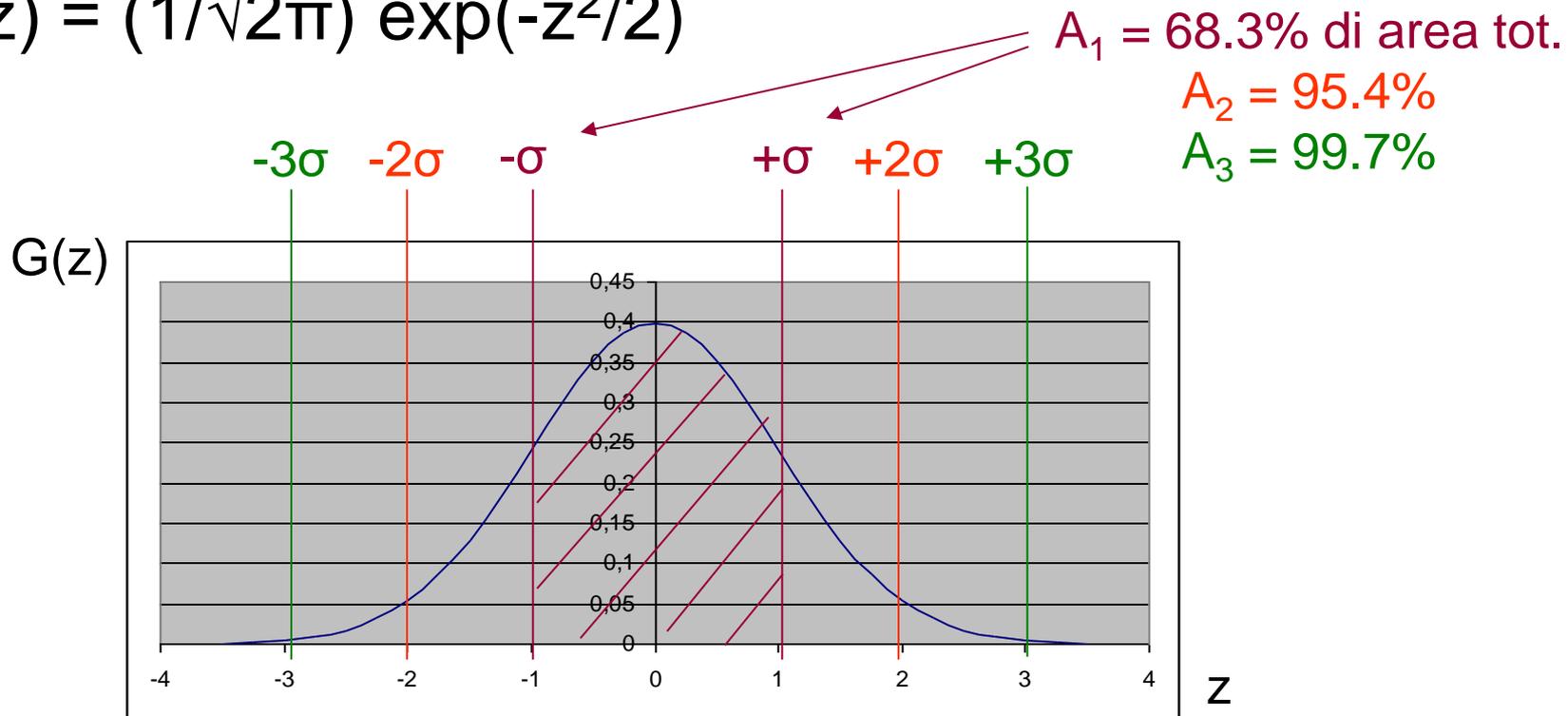
La distribuzione della *somma* di un numero elevato di variabili casuali indipendenti tende a distribuirsi *normalmente*, cioè una **distribuzione normale** avente come μ la somma dei valori medi delle misure e come σ^2 la somma delle varianze delle misure.



La distribuzione normale standardizzata(*)

- se poniamo $(x-\mu)/\sigma = z$, la distribuzione di Gauss si potrà scrivere in forma standardizzata come

$$G(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-z^2/2)$$



$$A_n = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-n}^n \exp(-z^2/2) dz$$

$$A_\infty = 1 = 100\%$$

fln mar 18

(*) nmal, facoltativo, ma utile



Errore (incertezza) assoluto e relativo

- Sinteticamente, valor medio ed errore q.m. *sulla media* (= errore q.m. su una singola misura diviso \sqrt{N}), ad es. un tempo di caduta di sferette uguali in un fluido, N misure
 $t_{\text{caduta}} = t_m \pm \Delta t = (10.62 \pm 0.06) \text{ s}$
(r.m.s. = root mean square \approx q.m. = quadratico medio)
- NB l'errore è dato di norma con una sola *cifra significativa*
- l'*errore assoluto* Δt ($=\sigma/\sqrt{N}$) è una *grandezza dimensionata* con unità di misura di t ossia s, nell'esempio, che *fissa il n. di cifre del risultato*; l'*errore relativo*
 $\delta = \Delta t/t_m = 0.006 = 0.6/100 = 0.6\%$
è invece un *numero puro* (ci indica la precisione della misura: più piccolo = misura più precisa)
- *Non esiste una misura fisica senza errore*



Errori di misura casuali e sistematici

- Oltre agli **errori casuali o statistici** vi sono gli **errori sistematici**, ad es. errori di calibrazione, errori di parallasse etc. – in questo caso si può parlare di **accuratezza**, si può fare un tiro al bersaglio ben raggruppato ma non al centro del bersaglio: serie precisa ma non accurata etc. **le cose non migliorano aumentando il numero di tentativi**
- Se gli errori casuali sono piccoli rispetto alla **sensibilità** dello strumento di misura, la lettura sarà sempre la stessa, anche in questo caso non serve aumentare il numero di misure, l'errore è dato dalla sensibilità dello strumento (per es. metà della cifra meno significativa leggibile)



Precisione e accuratezza

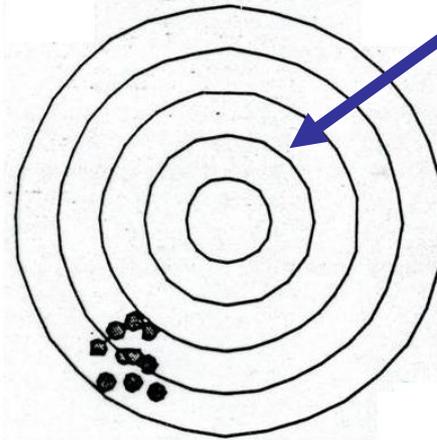
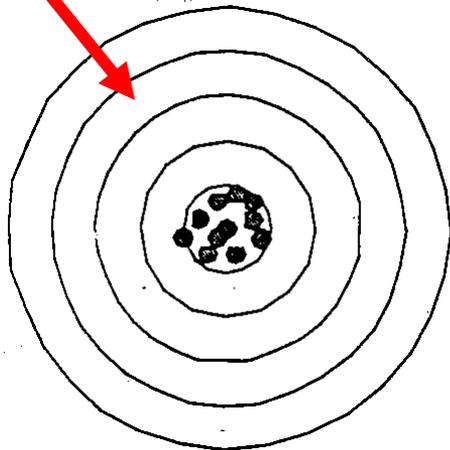
Es.: tiro al bersaglio



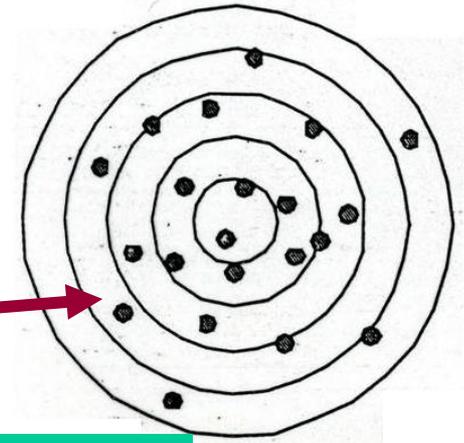
mira: **precisa**, **non accurata**
errore casuale piccolo
“ **sistematico grande**

mira: **precisa**, **accurata**
errore casuale piccolo
“ **sistematico piccolo**

l'err. sistem. può essere corretto



mira: **non precisa**, **accurata**
errore casuale grande
“ **sistematico piccolo**



basta insistere ($\sim 1/\sqrt{n}$)

IV possibilità ?
né precisa né accurata



Notazione scientifica e cifre significative

- In seguito alla scelta dell'unità di misura potremo avere grandezze con rapporti molto più grandi (piccoli) di 1; ad es. sono scomode da scrivere

$$\lambda_D = 0.000000589 \text{ m} \quad (\text{riga del Na, giallo})$$

$$d_{TS} = 149600000000 \text{ m} \quad (<d> \text{ terra-sole})$$

- Si usa la notazione scientifica separando le cifre significative dalla potenza di 10 (ordine di grandezza), si scrive la cifra più significativa $\neq 0$ (quella che corrisponde alla potenza di 10 più elevata) prima del . (punto) e le altre cifre significative dopo il .

$$\lambda_D = 5.89 \times 10^{-7} \text{ m} \quad (3 \text{ cifre significative})$$

$$d_{TS} = 1.4960 \times 10^{11} \text{ m} \quad (5 \text{ cifre significative})$$

NB uno 0 indicato a dx è significativo



Notazione scientifica e cifre significative (2)

- contare gli zeri è perverso (specie quando sono molti) e produce errori di ordini di grandezza (specie quando sono molti), molto più gravi degli errori sulla 3a cifra significativa – assumendo uno stipendio mensile di 4 cifre, è preferibile subire una riduzione di 10 E o di un fattore 10 ? (*)
- usate la notazione scientifica quando serve – è inutile scrivere $2.36 \cdot 10^0$ visto che $n^0 = 1 \forall n$
- ricordate però che somme/sottrazioni si fanno in colonna: $3.45 - 8.32 \cdot 10^{-1} = 34.5 \cdot 10^{-1} - 8.32 \cdot 10^{-1} = 26.2 \cdot 10^{-1} = 2.62$ (il n.o di posti decimali nel risultato è = al n.o più piccolo di cifre decimali di ciascun termine nell'operaz.)

(*) impossibile non capire!



Cifre significative (3)

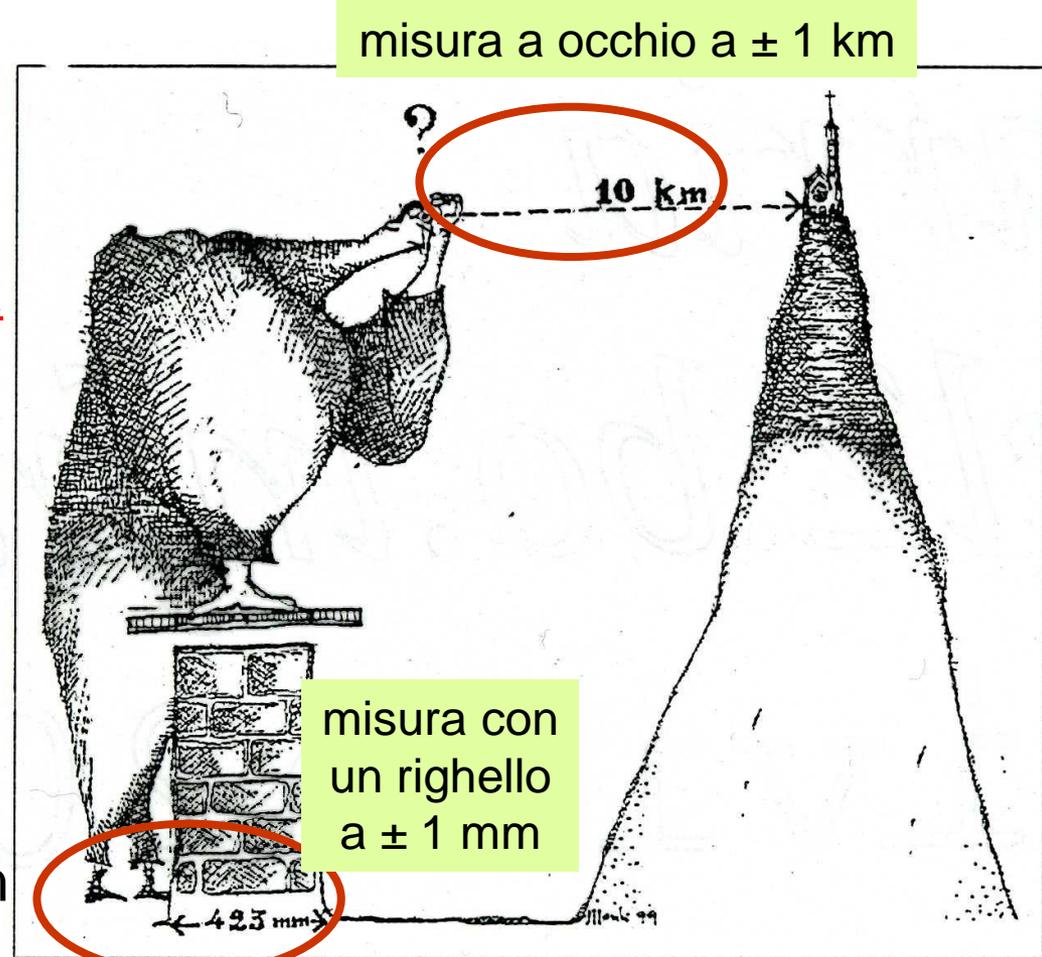
- Ad es. il valore del numero di Avogadro è misurato con grande precisione
 $N_A = (6.022140859 \pm 0.000000072) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
cioè è noto/misurato con 8 cifre significative, l'incertezza cade sulla 9a (con un errore relativo di 12 parti per miliardo o ppb) quindi scriverlo con 10 o più cifre non ha senso fisico – posso sempre però arrotondarlo (se non mi serve con tutte le cifre note, v. paragrafo successivo) per es. a sole 4 cifre, scelgo le prime 4 a sx: $6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ etc. – una scrittura equivalente è $0.6022 \times 10^{24} \text{ mol}^{-1}$
- Negli esercizi di fisica normalmente i dati sono forniti con 3 o 4 cifre significative, quindi non è sensato dedurre risultati con un numero di cifre maggiore – NB inoltre, in generale, combinando vari numeri noti con una certa precisione il risultato ha una precisione peggiore
- => nella soluzione degli esercizi si chiedono i risultati (se sono numeri reali) con 3 cifre significative



Cifre significative e propagazione delle incertezze(4)

NB1, v. p. 62, nella somma o sottrazione di grandezze di precisione diversa, la meno precisa (quella con l'incertezza più grande) domina l'incertezza del risultato (e tutte le cifre della grandezza più precisa risultano **illusorie** ossia **inutili**):
 $(10 \pm 1) \text{ km} + (423 \pm 1) \text{ mm} = (10 \pm 1) \text{ km}$ [incertezza assoluta]

NB2 prodotto/divisione: il n.o di cifre significative del ris. è lo stesso di quello del termine con minor n.o di cifre: $(10 \pm 1) \text{ km} \times (423 \pm 1) \text{ mm} = (4.2 \pm 0.4) 10^{-3} \text{ km}^2$ [conta incertezza relativa]



.. $(10 \pm 1) \text{ km} + (423 \pm 1) \text{ mm} = (10.000423 \pm 1) \text{ km}$:
... le cifre successive a quella su cui cade l'errore non hanno alcun significato!



Appendice sull'uso della calcolatrice/PC (*)

Supponiamo di fare una divisione con la calcolatrice tascabile:

$$\frac{1.03}{1.01} = 1.019801980 \dots ?$$

(con la calcolatrice del PC ottenete ancora più cifre, ad es. 29).

Sarebbe sensato partendo da numeri conosciuti con 3 cifre fabbricarne uno di 10 (o più) cifre? In realtà dei due numeri non conosciamo la 4a cifra, possiamo solo dare un intervallo

$$\frac{1.025 \div 1.035}{1.005 \div 1.015} = 1.0098 \dots \div 1.0298 \dots = 1.01 \div 1.03$$

quindi **il risultato deve essere arrotondato al massimo a 3 cifre,**

1.02 coerentemente con la precisione iniziale, $1/103 \sim 10^{-2}$

– **la calcolatrice non può essere una fabbrica di cifre: una operazione aritmetica non aumenta in genere la precisione**

(*) nmal, ma utile da capire



Grandezze fondamentali e derivate

- Una volta definite operativamente alcune grandezze relative ai fenomeni di interesse, le altre grandezze possono essere definite in funzione delle prime – ad es. $v = s/t$ (*)
- Si distingue quindi fra **grandezze fondamentali** (nel minor numero possibile/conveniente) e **grandezze derivate**
- Le definizioni fanno sì che **la scelta di quali siano le grandezze fondamentali è arbitraria**
- In meccanica bastano 3 grandezze fondamentali (ad es. lunghezza [L], tempo [T], massa [M])

(*) $[V] = [LT^{-1}]$ v. pag. 19



Le grandezze fondamentali della meccanica: L, T, M

- **lunghezza** – non località, non coincidenza: distanza fra due punti; si misura ad es. con una riga graduata etc.; unità: **metro (m)**, cm,
- **tempo** – non simultaneità: si misura ad es. con un fenomeno periodico, orologio etc.; unità: **secondo (s)**, minuto, ore (h),
- **massa** – quantità di materia di un corpo, inerzia del corpo rispetto alle cause del moto; si misura ad es. con una bilancia etc.; unità: grammo (g), **chilogrammo (kg)**, tonnellata (t),



Unità di misura delle grandezze fondamentali (*)

- **metro**, unità di misura delle distanze – a partire dal 1983, 1 m = distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $1/299792458$ s
- **secondo**, unità di misura dei tempi – 1 s = tempo necessario per 9.192631770×10^9 vibrazioni di una particolare riga dell'atomo del ^{133}Cs [1 giorno solare medio = 86400 s]
- **chilogrammo**, unità di misura della massa – 1 kg = 5.0188×10^{25} atomi di ^{12}C [1 mole = 12 g ^{12}C , contiene N_{Av} atomi] **➔** in futuro, Si



(*) accennato a lezione, facoltativo fln mar 18



Sistemi di unità di misura

- Scelte le grandezze fondamentali si devono scegliere le loro unità di misura: quelle delle grandezze derivate sono determinate in conseguenza → sistemi di unità di misura
- In meccanica si usa MKS (m, kg, s), ma si usa anche CGS (cm, g, s) e sistema degli ingegneri (m, kgpeso, s)
- Nella CE dal 1978 è in vigore il Sistema Internazionale (SI) ossia 7 grandezze e relative unità (m, kg, s, A, K, cd, mole)
- a queste unità vanno aggiunti i radianti (rad) per gli angoli piani e gli steradiani (srad) per quelli solidi
- **NB** esistono poi numerose grandezze usate dalle nostre parti comunemente che non fanno parte di alcuno dei sistemi precedenti (senza poi andare negli US)



Sistemi di unità di misura (2)

- Riassumendo:

Grandezze fondamentali => Scelta delle unità di misura fondamentali => Sistemi di unità di misura

- Ad es. per la meccanica

MKS	spazio:	m	= 10^2 cm
	tempo:	s	
	massa:	kg	= 10^3 g
CGS	spazio	cm	= 10^{-2} m
	tempo	s	
	massa	g	= 10^{-3} kg

NB s è l'abbreviazione di spazio, ma anche di secondo, l di lunghezza, ma anche di litro, etc. etc.

$$l = 5.1 \text{ m} = 5.1 \cdot 10^2 \text{ cm}$$

$$s^{-1} = 2 \text{ m}^{-1} = 0.02 \text{ cm}^{-1}$$

etc.

conversione di unità :
si moltiplica per

$1 = 100 \text{ cm}/1 \text{ m}$
(numeratore)
per convertire $\text{m} \rightarrow \text{cm}$

$1 = 1 \text{ m}/100 \text{ cm}$
per $\text{m}^{-1} \rightarrow \text{cm}^{-1}$
(denominatore, $1/\text{m}$)



Quello che la fisica non è (*)

- non tenta di dare risposte a domande di tipo ontologico:
 - qual'è l'essenza di tempo, spazio, massa, carica elettrica ...?
 - => le questioni di tipo filosofico esulano dal campo della fisica
- non è un catalogo di casi:
 - tutte le mele che cascano, tutte le stelle di una certa magnitudo, tutte le molecole in un volume di gas ...
 - => (poche) leggi generali che inglobano moltissimi/tutti i casi conosciuti
- non è una descrizione storica delle scoperte in fisica
 - => le scoperte sono stimulate dalla tecnologia/scoperte precedenti e stimolano applicazioni tecnologiche/scoperte
- non è affatto un puro esercizio matematico
 - => usa il linguaggio matematico per esprimere sinteticamente misure, relazioni, leggi

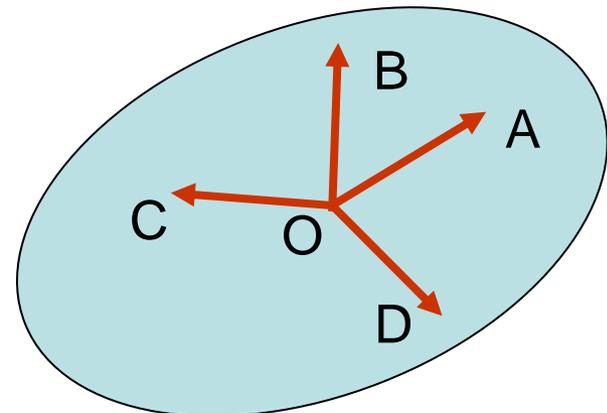
(*) nmal, facoltativo, ma utile da ricordare!!!



Grandezze scalari e vettoriali

- grandezze quali temperatura, volume, massa, pressione etc. sono **scalari**: completamente specificate da un numero $\pm vo$ – per esse valgono le regole dell'aritmetica ordinaria, **\pm : solo se hanno le stesse dimensioni, \times e $/$: liberamente**
- grandezze quali forza, quantità di moto, spostamento etc. sono **vettoriali**: occorre specificare la direzione (e il verso) oltre al modulo o intensità – per esse valgono regole speciali
- ad es., per dare informazioni stradali **non** basta la distanza (quantità scalare), occorre una direzione

A,B,C,D sono a **distanza uguale** da O,
 $|OA| = |OB| = |OC|$ etc.,
ma gli **spostamenti** sono diversi,
 $OA \neq OB \neq OC$ etc.



$|OA|$ indica il valore assoluto (o modulo), scalare, del vettore OA



Aule di V. della Beverara ed es. di spostamenti (→) per arrivarci in bici

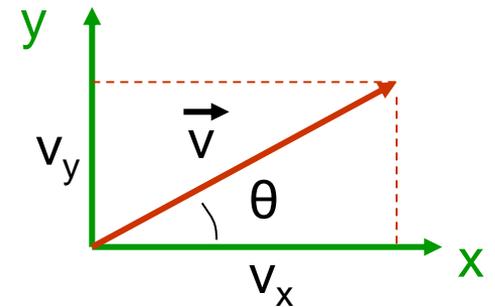
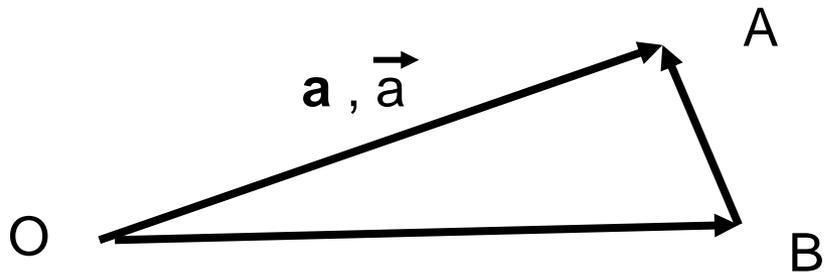


fin mar 18
— = — ~ — (lavori in corso)



Vettori (OA, in **grassetto** o con la \rightarrow sopra)

- vettori nel piano(spazio): **2(3)** componenti [2(3) numeri, $\pm v_i$]
- [v. in una dimensione: 1 componente (1 numero, $\pm v_0$)]
- versori: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ vettori di modulo unitario (solo direzione)



- vettori (in alternativa)
 - modulo (o valore assoluto): $|\mathbf{a}|$, $|\vec{a}|$, a
 - direzione [e verso]: nel piano cartesiano θ

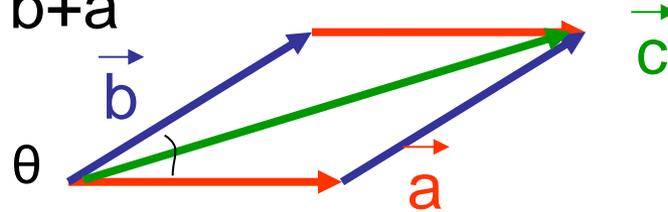
NB1 le componenti di un vettore sono $\pm ve$; *il modulo è sempre +vo*

NB2 un vettore può dipendere solo dalla direzione di un altro, v. attrito cinet.

Operazioni con i vettori

1. somma/differenza di vettori omogenei

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

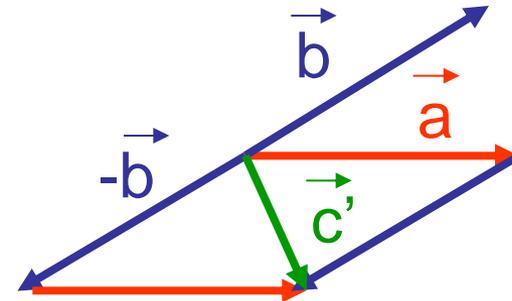
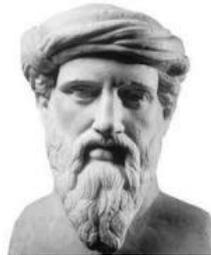


**Regola del
parallelogramma**

- il vettore \vec{c} è equivalente ad \vec{a} seguito da \vec{b} o viceversa (evidente nel caso di uno spostamento)
- modulo quadro del risultante (Legge dei coseni(*))

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \theta) = a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta$$

- $\vec{c}' = \vec{a} - \vec{b}$





Operazioni coi vettori (2)

– in generale il risultante di più vettori chiude la poligonale

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 + \vec{s}_4$$

etc.

– casi particolari

- vettori collineari paralleli

$$c = a + b ; \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

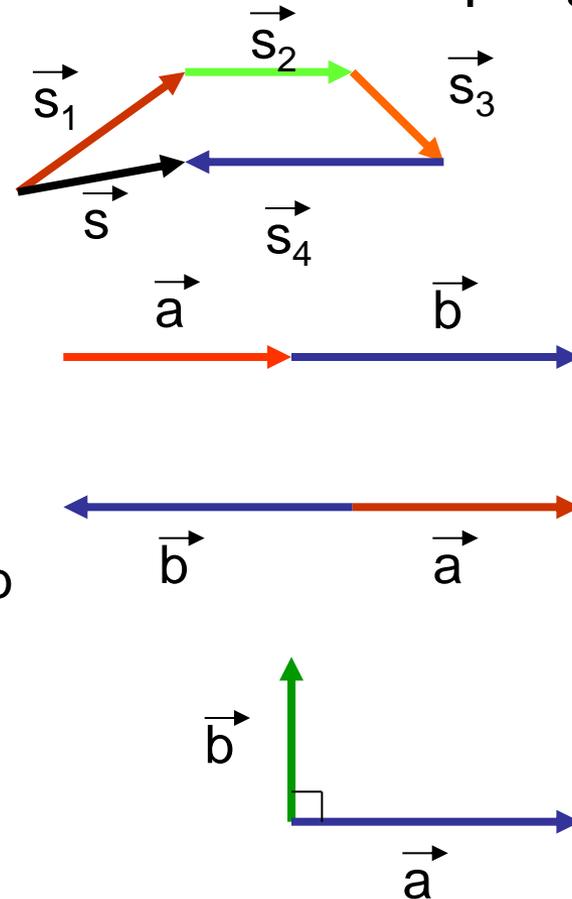
- vettori collineari antiparalleli

$$c = |a - b| ; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

- vettori ortogonali

$$c^2 = a^2 + b^2 ; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(Teorema di Pitagora)



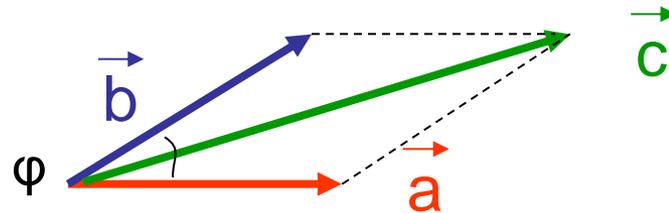


Operazioni coi vettori (3)

• 2. decomposizione di vettori

- \vec{a} e \vec{b} sono le componenti di \vec{c} secondo le relative direzioni

un vettore può essere sempre scomposto secondo due direz. date: si inverte la regola del parallelogr.



- componenti cartesiane

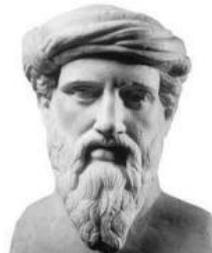
$$v_x = v \cos\theta$$

$$v_y = v \sin\theta$$

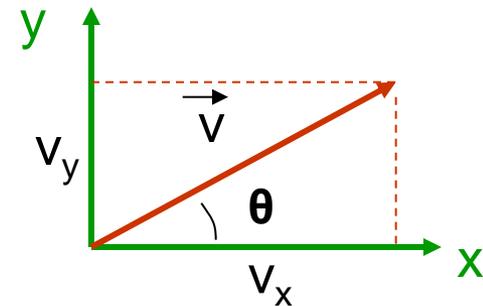
- componenti polari

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\text{tg}\theta = v_y/v_x$$



fln mar 18



versori (vettori unitari):
 \vec{i} , \vec{j} , (\vec{k}) secondo x, y, (z)
 $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ (+ $v_z\vec{k}$)



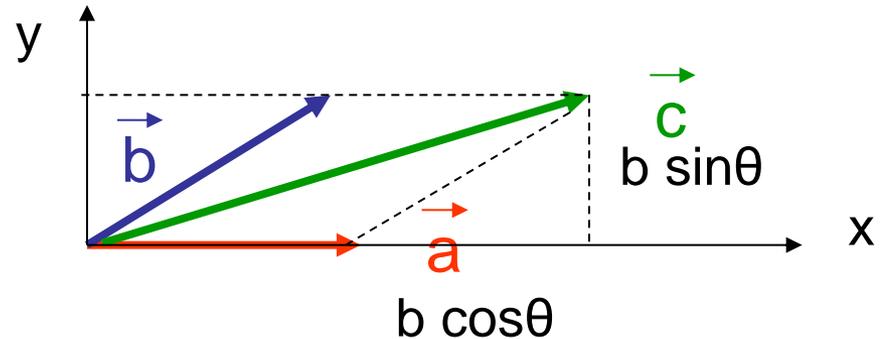
Operazioni coi vettori (4) (*)

- es.: somma in componenti di \vec{a} e \vec{b} , scelgo \vec{a} secondo x per semplicità

$$a_x = a; a_y = 0$$

$$b_x = b \cos\theta ;$$

$$b_y = b \sin\theta$$



$$\Rightarrow c_x = a_x + b_x = a + b \cos\theta$$

$$c_y = a_y + b_y = b \sin\theta$$

$$\Rightarrow c^2 = c_x^2 + c_y^2 = a^2 + \underline{b^2 \cos^2\theta} + 2ab \cos\theta + \underline{b^2 \sin^2\theta}$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta$$

(come già trovato; **NB** $\forall\theta$ si ha sempre $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

(*) nmal, facoltativo, immediato con i versori, $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j}$

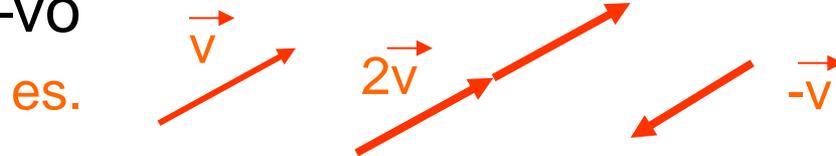


Operazioni coi vettori (5)

- 3. prodotto/divis. di un vettore per uno scalare

$$\vec{q} = m\vec{v}; \quad q = |m\vec{v}| = |m||\vec{v}| = |m|v$$

stessa direzione, il verso dipende dal fatto che lo scalare sia +vo o -vo



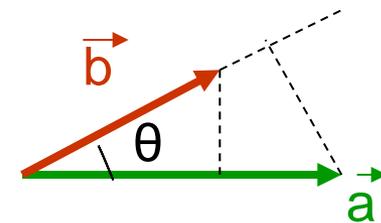
- 4. prodotti fra vettori

– **prodotto scalare** o interno

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$= (a \cos\theta)b = a_b b = a(b \cos\theta) = ab_a$$

componente di a nella direzione b moltiplicata per b e viceversa



nessuno per
 $\theta = 90^\circ, 270^\circ$



Operazioni coi vettori (6)

- **prodotto vettoriale** o esterno

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

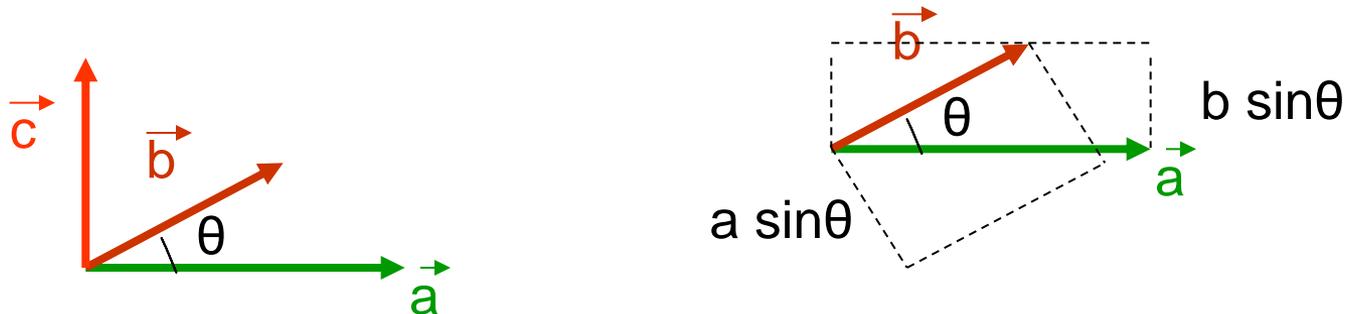
$$c = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\theta$$

nullo per
 $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

misura l'area del parallelogramma di lati a, b

$$c = (a \sin\theta)b = a(b \sin\theta)$$

\vec{c} è perpendicolare al piano formato da \vec{a} e \vec{b}

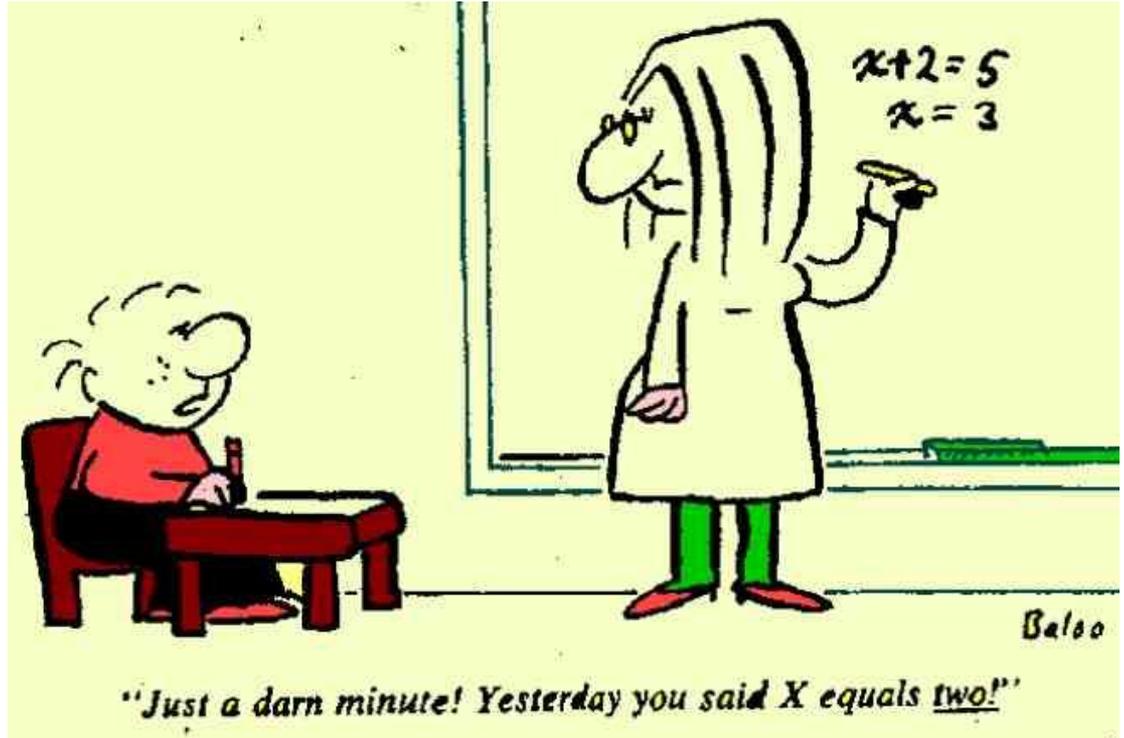
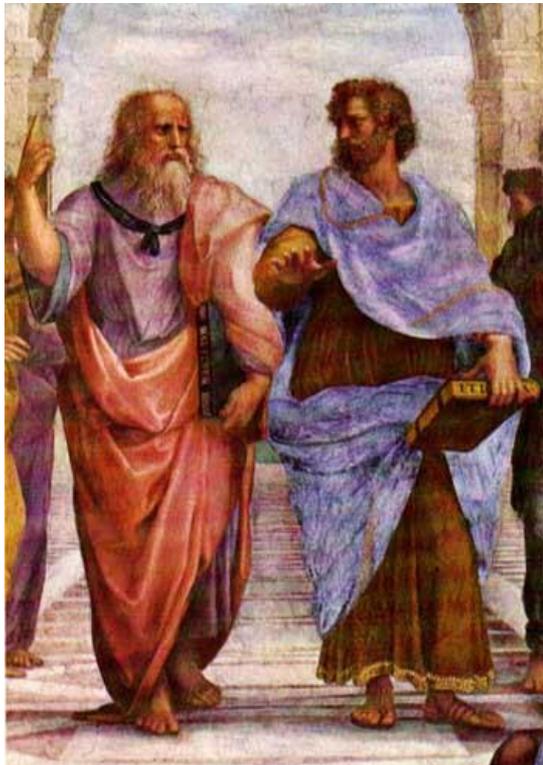


(\vec{c} vede \vec{a} ruotare su \vec{b} in senso antiorario)

Fine dell'introduzione

Non entri chi è digiuno di geometria

ἀγεωμέρητος
μηδείς
εἰσίτω



If you are really bad at maths,
you can go into banking.
Marcus Bridgestock 2/03/2012,
in The Graham Norton Show, BBC1