



Truth is ever to be found in simplicity, and not in the multiplicity and confusion of things [Isaac Newton \(1642-1727\)](#)

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen.

[Immanuel Kant \(1724-1804\)](#)



Corso di Fisica per CTF

AA 2018/19



F.-L. Navarra
francesco.navarria@unibo.it
<http://www.bo.infn.it/ctf/eser>



Corso di Fisica per CTF

- struttura del corso
 - lezioni: 32h (F.-L. Navarra), 32h (N. Lanconelli)
- orario delle lezioni
 - lun 11-13h; mar 11-13h; mer 11-13h [Aula 1D, Via della Beverara 123/1] per le prime 32h
- ricevimento (FLN, Dipart. Fisica e Astronomia, V.le C. Berti Pichat 6/2, 2° piano)
 - lun 14-15h; mar 14-15h e mer 14-15h (verificare prima con un'e-mail che non siano sopraggiunti impegni)
- tutorato (studenti):
[Via della Beverara]
 - luigi.scurto@studio.unibo.it mer. 16-18
 - kevin.denotariis@studio.unibo.it gio. 16 -18
 - emanuele.guardati@studio.unibo.it lun. 16 -18



Programma a blocchi

- Modulo 1 [F.L. Navarra]
 - grandezze fisiche e loro misura [le fondamentali] (5 h)
 - meccanica (punto, corpi, fluidi) [il modello di tutta la fisica] (13 h), NB escluse oscillazioni [moto armonico]
 - termodinamica [la meccanica dei grandi numeri] (6 h)
- Modulo 2 [N. Lanconelli]
 - elettromagnetismo [la meccanica delle cariche elettriche] (10 h)
 - oscillazioni [moto armonico], onde, ottica [onde meccaniche etc. etc.] (10 h)
 - microfisica (fisica atomica) [micromeccanica] (4 h)
- Esercizi (16 h)



URL consigliati - Fisica

- pagina principale per gli studenti di CTF
<http://www.bo.infn.it/ctf/eser>
- programma del corso
<https://www.unibo.it/it/didattica/insegnamenti/insegnamento/2018/349729>
- **eserciziario elettronico** (collegamento nella pag. princ.)
- **copie dei lucidi delle lezioni** (collegamento nella pag. princ.)
- iscrizione all'orale per chi ha la sufficienza negli scritti parziali, o anche nello scritto unico (su <https://almaesami.unibo.it>)

- [meccanica dei fluidi] <http://ishtar.df.unibo.it/mflu/html/cover.html>
- [diffusione nelle soluzioni] <http://ishtar.df.unibo.it/dif/html/diffu/index.html>

- [corrente elettrica e circuiti] <http://ishtar.df.unibo.it/em/elet/cover.html>
- [modelli atomici] <http://ishtar.df.unibo.it/ma/index.htm>



La prova scritta: i parziali (consigliati)

- sono previsti due scritti p., uno a ½ corso (Termodin. inclusa) ~ metà-fine Aprile, l'altro fine Maggio-inizio Giugno alla fine del corso, ciascuno con tre esercizi e 45 min di durata
- i p. si superano con tre + ε esercizi *corretti* (*) su sei in complesso [avendo quindi partecipato a *tutti e due* i p.]
- i p. hanno validità un anno (→ Luglio 2020)

Compito di Esame di Fisica - Facoltà di Farmacia - A.A. 2014/15
Sede di: Bologna-CTF - parsi Appello 20 04 2015
Cognome e Nome..... N.Matr.....

46

1) Quale potenza, in watt, deve esprimere un corridore, di massa uguale $m = 0.707E+02$ kg, che partendo con una velocità $v_0 = 0.292E+02$ dm/s, raggiunge, in $t = 0.745$ sec, una velocità $v_1 = 26.81$ km/h?

2) Un cilindro di legno di raggio $r = 0.7720E+01$ cm e di altezza $h = 0.3265E+01$ dm emerge per una frazione $f = 0.4603E+02$ % del suo volume in acqua di mare. Trova la densità del legno. La densità relativa dell'acqua di mare è $\rho_{rel} = 1.025$.

3) Un tratto di una arteria è ristretto da una placca arteriosclerotica al 21.94% della sua sezione trasversale. Qual è la diminuzione percentuale di pressione in questo punto? La pressione del sangue in una arteria sana è 100 mm Hg e la velocità è $v = 0.120$ m/s. La densità del sangue è 940 kg/m³.

esempio
dall'eserciziario

(*) vedi lucido successivo

fln mar 19

5



La prova scritta: unica

- lo scritto globale consiste di sei esercizi da completare in 1h30 durante gli appelli di esame
- si supera con un minimo di tre esercizi corretti su sei [formula risolutiva (**quella** che permette di estrarre il risultato sostituendo le grandezze note), risultato con unità di misura e 3 cifre significative]
- è valutato solo *suff./insuff.*
- lo scritto g. vale tre mesi

Compito 2

Scuola di Farmacia, ScMot e BioTec - Sede di Bologna
Corso di Chimica e Tecnologia Farmaceutica - A.A.2014/15
Compito di esame di Fisica
Appello 8o 2016/02/19

Cognome e nome..... N.Matricola.....

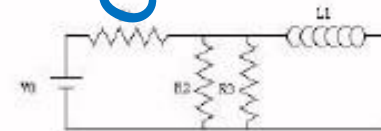
1) Un bambino lancia dei sassi contro una parete quadrata di lato 8.69 m in cui sono stati praticati 477 fori circolari del diametro di 6.95 cm. Se il bambino non mira e i sassi sono piccoli rispetto alle dimensioni dei fori, qual è il numero più probabile di sassi che passerà oltre la parete ogni 349 lanci?

2) L'area superficiale di una membrana cellulare è $0.514 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ e il suo spessore è $0.1342 \times 10^{-7} \text{ m}$. Assumendo che la membrana si comporti come un condensatore piano con costante dielettrica relativa pari a 5.0 e che il potenziale sulla superficie esterna sia di 53.31 mV più grande che sulla superficie interna, qual è la carica che si trova sulla superficie esterna?

3) Si calcoli la lunghezza d'onda associata ad elettroni la cui velocità è 0.8075×10^8 della velocità della luce in un mezzo di indice di rifrazione $n = 0.1418 \times 10^1$.

4) Una forza di $0.305 \times 10^4 \text{ N}$ è applicata ad un estremo di una sbarra metallica rigida. Se la sbarra è fissata all'altro estremo e la direzione della forza forma un angolo $\theta = 0.334 \times 10^1$ gradi con l'asse della sbarra e ancora il momento della forza è di 14.7 newton-metro, qual è la lunghezza della sbarra?

5) Si calcoli la corrente continua I che attraversa la batteria nel circuito in figura ($V_0 = 0.848 \times 10^2 \text{ V}$, $R_1 = 0.5 \times R_2 = 0.25 \times R_3 = 0.144 \times 10^4 \text{ ohm}$, $L_1 = 16.879 \text{ mH}$).



6) Si calcoli la lunghezza d'onda λ , in cm, di un'onda elettromagnetica che si propaga in un mezzo avente indice di rifrazione $n = 1.42$, con frequenza $f = 0.2430 \times 10^{13} \text{ Hz}$.



Esempio pag. 6 / soluzioni

Es. di soluzioni
prodotte
dall'eserciziario
elettronico

Compito 2.

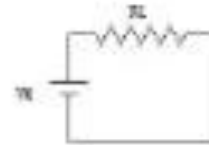
Formula risolutiva: $N_p = N_{\text{max}} \cdot s / S$
con s = superficie totale dei fori e S = superficie della parete
Numero più probabile sassi = 8

Formula risolutiva: $q = S \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \Delta V / d$
con S = area membrana, d = spessore, ϵ_0 = costante dielettrica del vuoto, ϵ_r = costante dielettrica relativa, ΔV = differenza di potenziale
Carica = 0.9040E-12 C

Formula risolutiva: $\lambda = h / (m \cdot v / n)$
con h = costante di Planck, m = massa elettrone, v = velocità
 λ De Broglie (non relativistica) = 0.278E-09 m

Formula risolutiva: $l = M / [F \cdot \sin(\theta)]$
con M = momento della forza
Lunghezza stoma = 0.827E-01 m

In corrente continua L_1 è un corto circuito, quindi non passa corrente in R_1 e R_2
Formula risolutiva: $I = V_s / R_3$



Intensità corrente = 0.589E-01 ampere

Formula risolutiva: $\lambda = c / (n \cdot f)$
con c = velocità della luce nel vuoto
Lunghezza d'onda = 0.993E-04 cm



Testi (solo a titolo di esempio, in aggiunta ai lucidi)

- F. Borsa e A. Lascialfari, *Principi di Fisica per indirizzo biomedico e farmaceutico*, EdiSES (ad es.)
- D.C. Giancoli, *Fisica, Principi e applicazioni*, Casa Ed. Ambrosiana (ad es.)
- R.A. Serway e J.W. Jewett Jr, *Principi di Fisica*, EdiSES (ad es.)

- ...

An interviewer asked novelist and Nobel laureate William Faulkner.:
“Some of your readers claim they still cannot understand your work after reading it two or three times. What approach would you advise them to adopt?” Faulkner replied, “Read it a fourth time.”

- (J.W. Kane e M.M. Sternheim, *Fisica biomedica*, Ed. E.M.S.I.)
- (D.M. Burns e S.G.G. MacDonald, *Fisica per gli studenti di biologia e medicina*, Ed. Zanichelli)
- [F.R. Cavallo e F.-L. Navarria, *Appunti di Probabilità e Statistica per un corso di Fisica*, Ed. CLUEB]

non mostrato a lezione (nmal)



Fisica: una storia sintetica

- VI secolo a.C.: nascita del pensiero scientifico, approccio naturalistico (abbandono del mito), atomisti greci, Democrito (v. De Rerum Natura di TLC)
- Platone (matematica), Aristotele (fisica*): il mondo serve un fine (regresso rispetto al naturalismo)
- XVII secolo: rivoluzione, tecnologia → metodo galileiano, Newton (cause del moto, unificazione del terrestre e del celeste)
- XIX secolo: unificazione e.m. (Faraday, Maxwell) → applicazioni tecnologiche **
- XX secolo: altre rivoluzioni (radioattività, relatività, meccanica quantistica, antimateria → applicazioni tecnologiche) **



telescopio

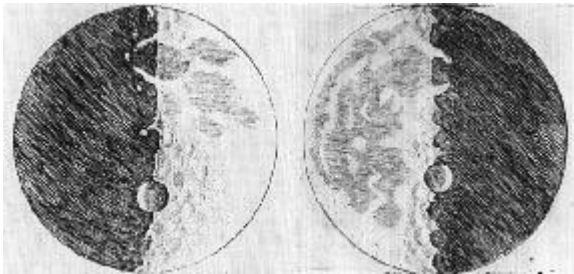


sistema a raggi X per piccole molecole

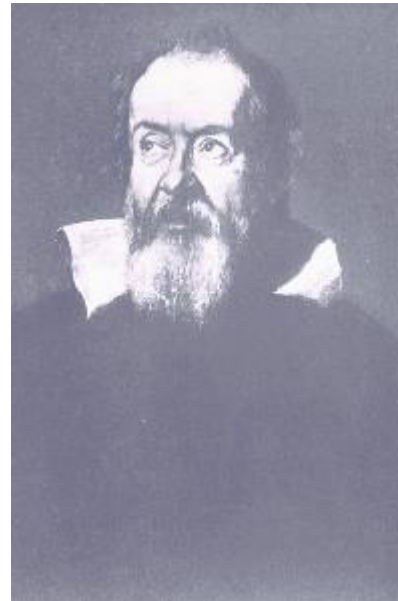
* purtroppo: **nihil est quod videtur** (fis. a volte contro il senso comune)

** vedi 2a parte del corso

- una 1a rivoluzione – si perdono corpi celesti perfetti e centralità della terra (Harriot, Galilei, Keplero)
 - l'imperfezione della superficie lunare
 - satelliti che ruotano intorno a Giove (7 gennaio 1610)
 - anelli di Saturno, fasi di Venere (11 dicembre 1610), macchie solari



La luna disegnata da Galilei



fino a ~1610
osservazione
a occhio nudo,
~1 mm → 1 km,
poi **telescopio**
e **microscopio**:
il mondo appare
molto diverso



(Ancora) sul '600

- **Il '600 è il secolo delle rivoluzioni**
 - Giordano Bruno: l'universo è infinito (ora sappiamo che non è così [età $13.7 \cdot 10^9$ anni, $r_U = 4.4 \cdot 10^{26}$ m], ma che è molto più grande di quanto appare ad occhio nudo o con un telescopio)
 - **la misura e il metodo**, Galilei; prime misure precise di tempo (G., Kepler, Huygens, Newton)
 - **le leggi della meccanica**, (Galilei) Newton, e la gravitazione universale, saldatura fra terra e cielo, Newton
 - **il calcolo infinitesimale** (Newton, Leibnitz): le grandezze variano
 - la perdita della certezza e la nascita del **calcolo delle probabilità** (B. Pascal, Lettera del 24 Agosto 1654 a P. de Fermat sul gioco incompiuto): il futuro non è più imprevedibile, possiamo pianificare le nostre attività e la nostra vita sulla base della probabilità di verificarsi dei più svariati eventi – **nozione di rischio**, utile per le assicurazioni e in tutti i casi di imperfezione, quindi **sempre** – **nozione di incertezza**, fondamentale per la misura (e per la meccanica quantica)
- **Tecnologia: telescopio, microscopio, orologio a pendolo, termometro, barometro, pompa da vuoto** (tutti strumenti di misura)



Quello che la fisica è

- Fisica (dal greco φυσικός (*phusikos*) = *naturale*, φύσις = *natura*), si basa su due assiomi:
 - le leggi della natura sono valide ovunque (in qualsiasi tempo e luogo)
 - l'osservazione porta ad una decisione sulla validità di modelli per una descrizione di eventi naturali
- **Osservazione/sperimentazione** sulla natura a tutti i livelli, dai complessi ai più elementari, effettuata partendo dalla nozione di misura (quantitativa, riproducibile) e dalla definizione operativa di grandezza fisica attraverso il processo di misura
 - ⇒ misura quantitativa, quindi suscettibile di correlazione numerica con altre misure (entro le **incertezze statistiche** di misura)
 - ⇒ misura riproducibile, cioè indipendente dal soggetto che sperimenta e dall'apparato utilizzato (tenuto conto delle incertezze **sistematiche** e della **sensibilità dell'apparato**)



Grandezze fisiche e loro misura

grandezze
misura
introduzione di valore
scalari fisica unità sistematiche
incertezze
statistiche probabilità
medio vettoriali
grandezza

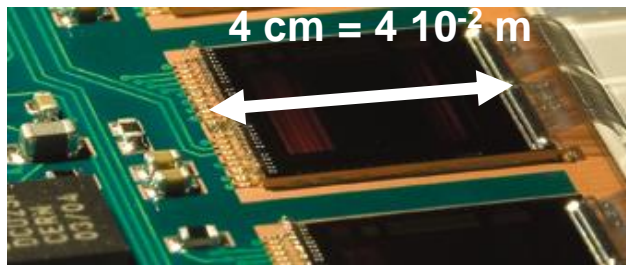
misura
incertezze
probabilità introduzione
grandezza medio scalari
vettoriali di fisica
statistiche valore
grandezze
sistematiche unità



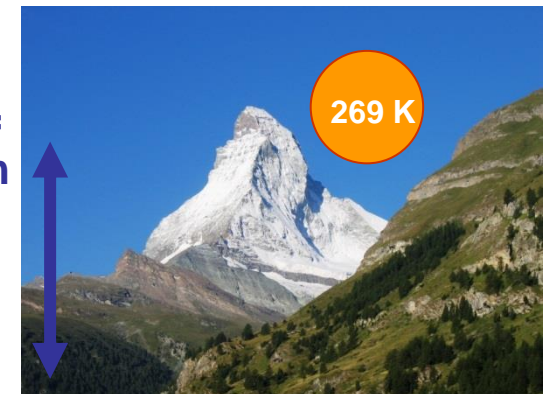
Misura e def. operativa di grandezza fisica

You can only make as well as you can measure (Joseph Withworth, 1803-1887, e.g. he devised an accepted standard for screw threads)

- La misura di una grandezza fisica è l'operazione di confronto *quantitativa e riproducibile* con una unità di misura ('opportuna' grandezza della stessa specie)
- Il risultato dell'operazione di misura è un numero puro (il rapporto fra la grandezza misurata e l'unità di misura)
- Una qualsiasi grandezza fisica è definita operativamente mediante la sua misura



wafer di Si

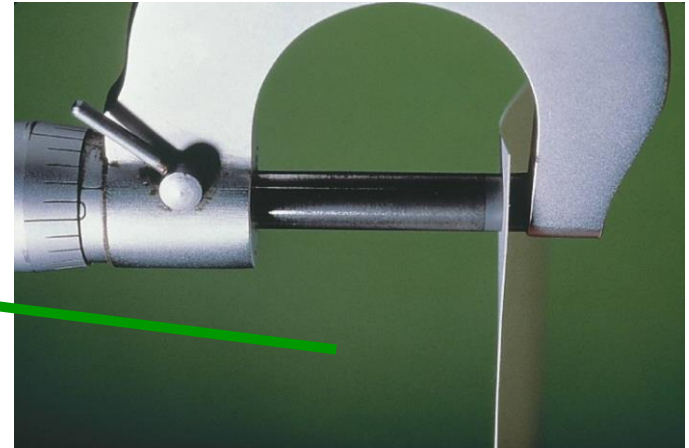




Definizione operativa di una grandezza fisica, processi di misura diretta (confronto) e indiretta

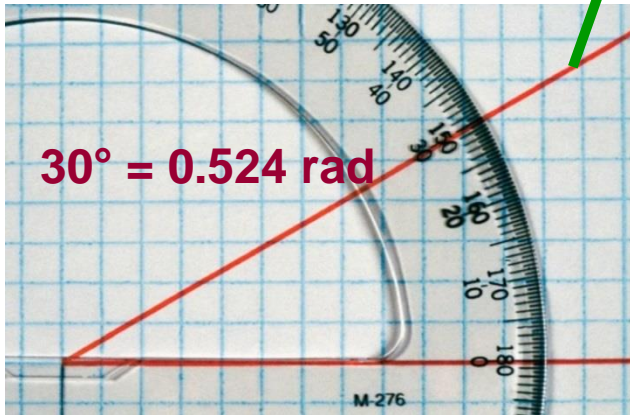


Misure dirette



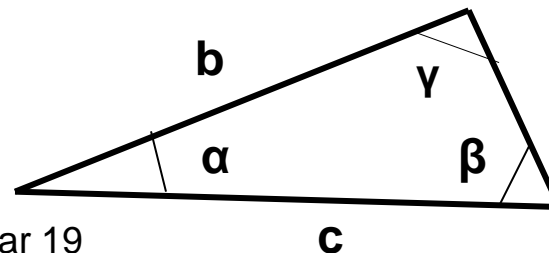
0.07 mm → ←

Misura indiretta: altezza delle montagne mediante triangolazione; temperatura attraverso una misura di resistenza (→ calibrazione) etc.



30° = 0.524 rad

1a triangolazione della superficie (della Francia): Jean Picard, 1668



$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}$$

b = ?

Trovare **b** è lasciato come esercizio

fln mar 19

c

15



Misure dirette e indirette

Misura diretta quando si confronta direttamente la grandezza misurata con un campione di misura nota.

Esempio: misura di lunghezza con un regolo graduato.

Misura indiretta se ciò che si misura non è la grandezza che interessa, ma altre che siano legate a essa da relazioni funzionali.

Esempio: misura della *distanza* di un oggetto con un sonar.

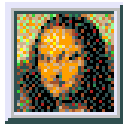
ovvero

misura del *tempo* percorso dall'onda sonora per andare e tornare dall'oggetto; conoscendo la velocità di propagazione dell'onda posso ricavare la distanza dell'oggetto che l'ha riflessa.



Misura

- Due caratteristiche sono inseparabili dal concetto di misura (di una grandezza fisica)
 - Gli **ordini di grandezza** (→ notazione scientifica): le **unità di misura** sono comunque scelte ‘arbitrariamente’/spesso indipendentemente dal valore della grandezza misurata
 - L'**incertezza** (ossia l'**errore**) di misura (che si può capire, ridurre, rendere trascurabile, ma non eliminare), stimata ed espressa in forma probabilistica (in particolare, se casuale)
- In (quasi) tutte le discipline scientifiche un'osservazione (esperimento) implica la raccolta e la successiva analisi di dati: spesso si tratta di estrarre un qualche parametro e di stimarne l'incertezza.
- L'incertezza implica che in fisica (qualsiasi disciplina scientifica) non si può conoscere il 'vero' ma solo ridurre la ns ignoranza



Domande e risposte



(*)

- 1) Quanto è alta la torre Eiffel? 2) Qual'è l'età dell'universo? 3) E' più bello un quadro astratto o uno figurativo? 4) Sono più veloci i neutrini o la luce nel vuoto? 5) Profuma più una violetta o una rosa? 6) E' più caldo in cima al Cervino o accanto alle piramidi di Gizah? 7) E' più musicale un *la* (440.0 Hz) o un *do* (261.6 Hz)? - Sono tutte domande che ci possiamo porre riguardo a quello che ci circonda.
- La fisica può dare risposta ad alcune domande: quelle suscettibili di una risposta **quantitativa** (1, 2, 4, 6) attraverso un procedimento di **misura/confronto** dopo aver stabilito una opportuna **unità di misura** – E' difficile stabilire l'unità di misura di **bellezza**, di **profumo** o di **musicalità** (anche se è possibile stabilire relative scale).
- Parafrasando W.Shakespeare, Hamlet (1.5.167-8): c'è più fisica nell'ala di una farfalla dalle ali blu di quanto si possa immaginare (riflessione, cambiamento di fase, interferenza) – **nihil est quod videtur**.



(*) non mostrato a lezione (nmal) fln mar 19

Morpho: es. di interferenza (le ali non contengono un pigmento blu!)



Misura/definizione operativa di grandezza (2)

- Il processo di misura è **centrale**, **fondamentale**; per parlare di grandezza fisica occorre dire come si misura:

⇒ scelta dell'unità di misura (arbitraria, comoda)

⇒ procedimento di confronto con l'unità di misura

$$G = g U_g ; G' = g' U_g \text{ etc.} \quad \text{ossia} \quad G/U_g = g \text{ etc.}$$

$$l = 8.8 \text{ cm} = 0.088 \text{ m} ; s = 0.07 \text{ mm} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ m} ; \gamma = 30^\circ$$

G - grandezza, **g** - numero puro che esprime il rapporto con l'unità di misura U_g

⇒ misurando una stessa G con unità di misura diverse (G non cambia!) si ha

$$G = g U_g = g' U_g' \quad \rightarrow \quad g' = g U_g / U_g'$$

→ se l'unità di misura è più piccola G è espressa da un numero più grande, etc. $l = 8.8 \text{ cm} = 88 \text{ mm} = 8.8 \cdot 10^4 \mu\text{m}$



Dimensioni delle grandezze fisiche

- una lunghezza, uno spessore, una distanza, uno spazio percorso Δx sono tutte grandezze fisiche omogenee con una lunghezza, cioè hanno tutti la stessa dimensione che si indica con $[L]$ – ***NB si prescinde dal valore numerico!***
- allo stesso modo una qualsiasi superficie (cerchio, quadrato etc.) è omogenea con il quadrato di una lunghezza e si indica con $[L^2]$ – sia 15 km^2 che $0.7 \text{ }\mu\text{m}^2$ etc.
- il tempo misurato a partire da un istante iniziale ed un intervallo di tempo Δt sono omogenei con un tempo: $[T]$
- in generale, in meccanica: $[G] = [L^\alpha M^\beta T^\gamma]$ con $\alpha, \beta, \gamma +vi, -vi, 0$
- ***tutte le relazioni in fisica devono essere dimensionalmente corrette; qualsiasi sia la combinazione di grandezze che compare nella relazione, le dimensioni a dx dell' = devono essere le stesse di quelle a sx dell' =*** : $[v] = [s/t] = [LT^{-1}]$

+vi – positivi
-vi – negativi
0 - nulli

v – velocità

fln mar 19

s – spazio percorso
t – tempo impiegato



Prefissi e notazioni

- **I risultati delle misure possono essere espressi da numeri molto più grandi o più piccoli di 1** - *dipende dall'unità di misura scelta* - si può usare quindi un **prefisso**, **comunemente**:
[atto (a) 10^{-18} ; femto (f) 10^{-15} ,] pico (p) 10^{-12} ; nano (n) 10^{-9} ;
micro(μ) 10^{-6} ; milli (m) 10^{-3} ; centi (c) 10^{-2} ; deci (d) 10^{-1} ; deca (da o D) 10^1 ; etto (h) 10^2 ; chilo (k) 10^3 ; mega (M) 10^6 ; giga (G) 10^9 ; tera (T) 10^{12} ; peta (P) 10^{15} ; [exa (E) 10^{18}]
- Le grandezze sono indicate mediante lettere (ad es. iniziale in italiano o in inglese: v per velocità, c per celerity) **ma** l'alfabeto latino esteso spesso **non** è sufficiente ad evitare confusione di notazioni, così si usano anche lettere greche, **comunemente**:
minuscole: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta, \theta, \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma, \tau, \varphi, \chi, \psi, \omega$
maiuscole: $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Phi, \Omega$
- Le unità di misura si indicano con la maiuscola se abbreviano un nome proprio - **1 A = 1 ampère**, **1 N = 1 newton** (ma con la minuscola iniziale, se scritte per intero) .



Leggi, modelli, teorie

- Misure contemporanee di diverse grandezze permettono di ottenere, entro le incertezze di misura, **relazioni fra le grandezze misurate** (ad es. temperatura esterna ed ora del giorno, tempo e distanza di caduta per un corpo in un fluido)
 - ⇒ **leggi esprimibili in linguaggio matematico**
(ad es. funzioni elementari, eq. fra grandezze finite, eq. differenziali etc., più in generale informazione/correlazione sotto forma di **tabella, grafico, n-tupla, database** ↔ **calcolatrice, PC etc.**)
 - ⇒ (diverse/tante) leggi → **modello/teoria da confrontare con ulteriori misure** (verifica o falsificazione sperimentale, **metodo sperimentale galileiano**)
 - ⇒ analogie fra diversi fenomeni portano a leggi sostanzialmente simili (e a migliore comprensione)
- **Le leggi fisiche, per loro intrinseca natura, non sono mai 'definitive'**



Probabilità, preliminari

... il mondo è dissolto in una pullulante nuvola di probabilità ...
Carlo Rovelli, Sette brevi lezioni di fisica, ADELPHI, 2014

To us, probability is
the very source of
life (Joseph Butler,
1692-1752)

- Prima di discutere ulteriormente la misura di una grandezza fisica e la precisione di misura, si premette la nozione di probabilità (ed il relativo calcolo), che serve, *ma non solo**, a quantificare l'incertezza nelle misure (in fisica e nella scienza in generale, ad es. nel paragonare l'efficacia di due farmaci)
- Probabile: dal verbo latino *probare* (provare, verificare) e dal suffisso *-ilis* (che può essere) → “che può essere verificato”, dove la verifica è empirica



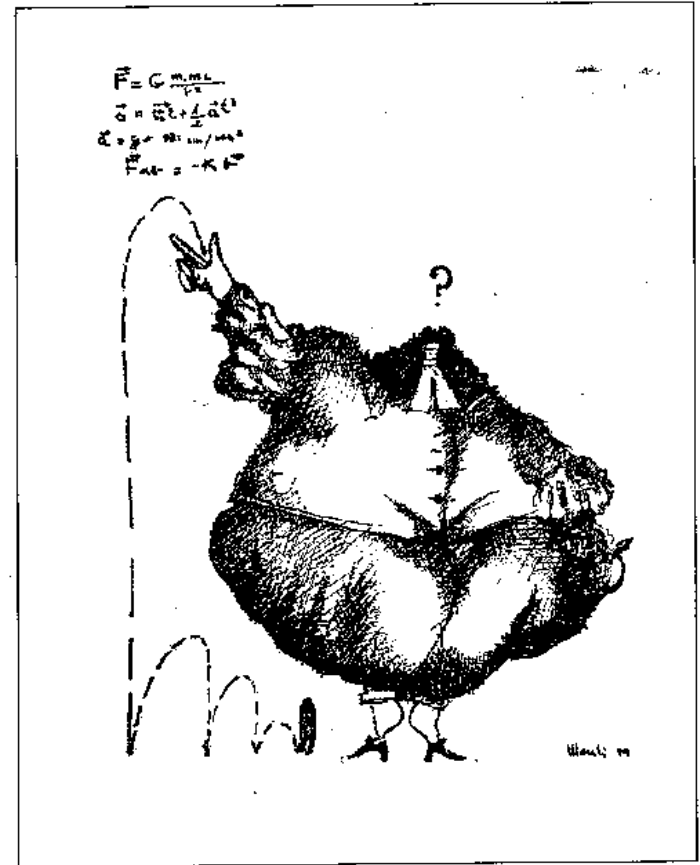
* a livello microscopico la probabilità impera 19



Probabilità

- testa o croce? perchè?
- si lancia una moneta (*evento, esperimento*) e si potrebbe scomodare Newton (e un PC)
- oppure si può dire che non sappiamo esattamente cosa accadrà in un dato *caso*, ma che mediamente $P(T) = P(C) = \frac{1}{2} = 50\%$ dove P è la *probabilità* – nel 50% (50%) dei *cas*i esce T(C)
- *a fortiori*, seguire, una ad una, le molecole di un gas è **impossibile** anche con una 'farm' di $> 10^5$ PC (ad es. centro di calcolo del CERN o un CLOUD)

fln mar 19



Un lancio di moneta potrebbe essere seguito in modo deterministico usando le equazioni di Newton ...



Definizioni di probabilità e assiomi

Formalizziamo il concetto, associando a ogni evento x un numero $P(x)$, probabilità, tale che:

1. **$P(\text{evento certo}) = 1$**
2. **$P(\text{evento impossibile}) = 0$**
3. Per ogni evento x : **$0 \leq P(x) \leq 1$**
4. **Se x_1 e x_2 sono due eventi mutuamente esclusivi (*)**
 $P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)$
5. **Se $\{x_i, i=1, N\}$ è un gruppo completo (**) di eventi mutuamente esclusivi**
 $\sum_i P(x_i) = 1$

Esistono diverse definizioni possibili di probabilità che soddisfano questi assiomi. Si premettono alcune definizioni.

(*) Due ev. sono mutuamente esclusivi se non possono verificarsi insieme
(**) Un gruppo di ev. si dice completo se almeno uno di essi deve necessariamente accadere



Probabilità condizionata(+)

- La probabilità condizionata è la prob. che accada l'evento A *una volta che* è accaduto l'evento B (**NB** non c'è una connotazione strettamente temporale), si indica con $P(A|B)$
- es. A = superare lo scritto di Fisica, B_j = risolvere correttamente j esercizi, chiaramente $P(A|B_{\geq 3}) > P(A|B_{\leq 2})$ (la prima è 1, la seconda è 0)
- può succedere che $P(A)$ sia piccola mentre $P(A|B)$ è grande: A = la squadra ultima in classifica vince il campionato, B = le altre squadre sono tutte squalificate per illecito sportivo

(+) a stretto rigore tutte le prob. sono condizionate; def. empirica: le condizioni di un 'esperimento' possono variare, def. a priori: dado, moneta non truccati etc.; però, ammesse condizioni costanti o assenza di trucchi, cessa la dipendenza dalle condizioni



Relazione fra eventi

L'evento A è **dipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada dipende dal fatto che accada B.

Esempio: A = "L'Umana Reyer Venezia vince lo scudetto del basket",
B = "I più forti giocatori dell'URVenezia si infortunano durante i play-off"

$P(A) \neq P(A|B)$ con $P(A|B)$ probabilità condizionata

L'evento A è **indipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada non dipende da B

Esempio: A = "la Segafredo Virtus Bologna vince lo scudetto del basket"
B = "Il Bologna FC vince il campionato di calcio di serie A"

per eventi indipendenti $P(A|B) = P(A)$

Due eventi A e B sono **mutuamente esclusivi** (**incompatibili**) se non possono verificarsi insieme.

Esempio: A = "Il Grissini Bon Reggio E. vince lo scudetto del basket"
B = "Il VL Pesaro vince lo scudetto del basket"

per eventi incompatibili $P(A|B) = 0$



Altre definizioni ed esempi (v. assiomi 4,5 a pag. 25) (*)

Eventi casuali formano un **gruppo completo di eventi** se **almeno uno** di essi deve **necessariamente** accadere (+)

(Esempio: $A_1 \dots A_{30}$ = «L'i-esimo sciatore ammesso alla 2° manche di uno slalom arriva 1° della gara»; in questo caso ci possono anche essere ex-equo, quindi A_i non esclude A_j .)

Eventi contrari sono due eventi mutuamente esclusivi che formano un gruppo completo.

Esempio: A = «Nel lancio di una moneta esce Testa»

B = «Nel lancio di una moneta esce Croce»

$A = \text{non } B$

$$P(A) = P(\text{non } B) = P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$

Due o più eventi casuali si dicono **equiprobabili** se la **simmetria** dell'esperimento permette di supporre che essi abbiano tutti la **stessa probabilità** di accadere.

(Esempio: $A_1 \dots A_6$ = «Nel lancio di un dado non truccato esce la faccia i »)

- In un **gruppo completo di N eventi equiprobabili e mutuamente esclusivi** la probabilità di ciascuno di essi è:

$$P = 1/N$$

(Esempi - Lotto: 1/90, monete: $\frac{1}{2}$, dado/cubo: 1/6)

(+) **NB** Gli eventi non sono in generale anche mutualmente esclusivi, v. esempio.

(*) nmal



Somma e prodotto di eventi

Somma di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A o di B o di entrambi** (varie notazioni $\cup, +, o$ (OR))

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A+B) = P(A o B)$$

Somma di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di almeno uno di essi, $P(Z) = P(A \cup B \cup C \cup \dots) = P(A+B+C+\dots) = P(A o B o C o \dots)$.

Prodotto di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A e di B “contemporaneamente”** (\cap, \cdot, e (AND))

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A e B)$$

Prodotto di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di tutti loro “contemporaneamente”, $P(Z) = P(A \cap B \cap C \cap \dots) = P(A \cdot B \cdot C \cdot \dots) = P(A e B e C e \dots)$.



Variabili aleatorie, distribuzioni di probabilità

Variabili aleatorie : grandezze che, nel corso di una prova, possono assumere un valore sconosciuto a priori (es. risultato di una misura, estrazione di un numero della lotteria).

Si distinguono in:

discrete : se possono assumere solo un insieme di valori numerabile

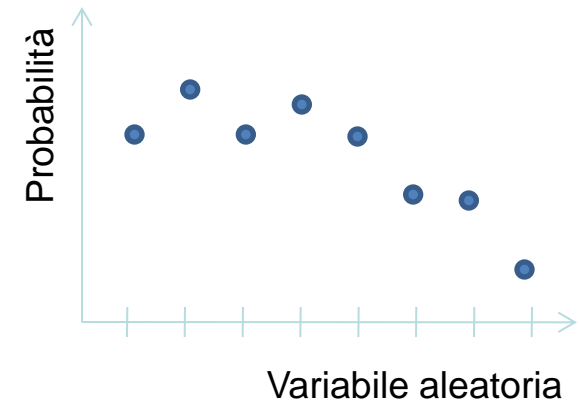
es: il numero estratto da un'urna del lotto, $P(x_i) = 1/90$ ($i = 1, 2, \dots, 90$); $\sum_{i=1,90} P(x_i) = 1$

continue : se possono assumere un insieme di valori continuo

es: il punto in cui una freccetta colpisce un bersaglio, il risultato di una misura

Distribuzione di probabilità :

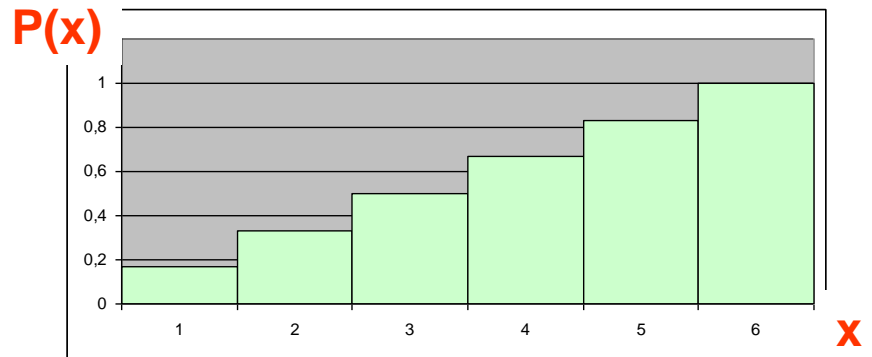
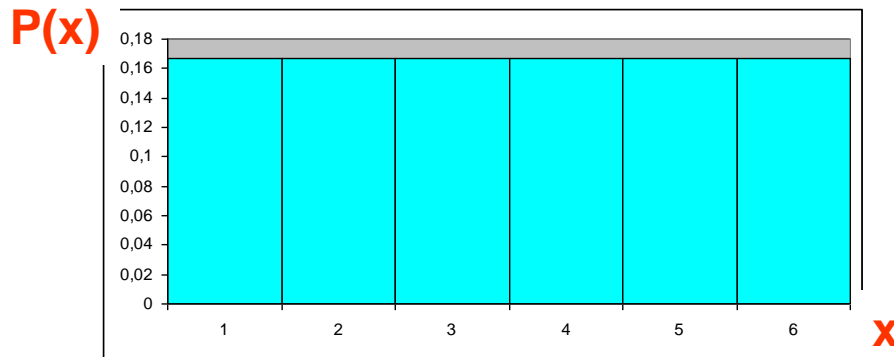
funzione che associa a ciascun possibile valore assunto dalla variabile aleatoria la corrispondente probabilità. La somma (l'integrale) delle probabilità dei possibili valori è = 1 (la certezza)



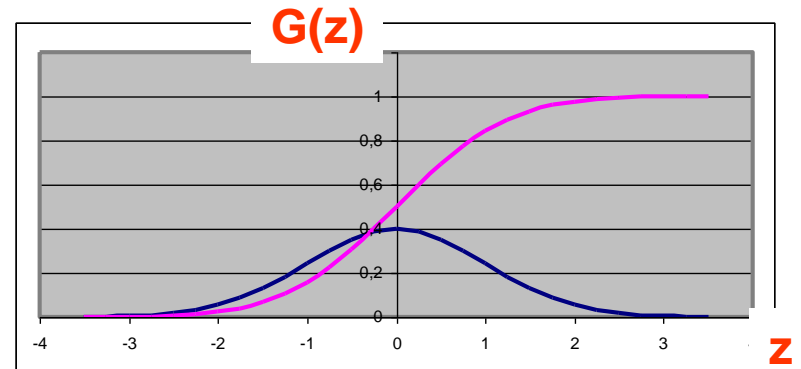


Distribuzioni di probabilità cumulative(*)

- sia $P(x_i)$ con $i=1,N$ una distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta x_i , si dice cumulativa la distribuzione $\sum_{i=1,j} P(x_i)$, tale che $\sum_{i=1,N} P(x_i) = 1$ (la certezza, per es. una qualsiasi faccia del dado deve per forza uscire)



- per una variabile aleatoria continua basta sostituire la Σ con un \int (per es. per la funzione di Gauss, vedi più avanti, $G(z) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-z^2/2)$, l'integrale fra $-\infty$ e 0 vale 0.5, cioè c'è una probabilità del 50% che z capiti in quell'intervallo: curva fucsia = area sotto la curva blu)



- l'area fra $z = -1$ e $z = +1$ vale 0.683 (da ricordare)



Valore atteso

Valore atteso (o **speranza matematica**) di una variabile aleatoria : somma (o integrale) di tutti i possibili valori della variabile aleatoria moltiplicati per la loro probabilità.

Variabile aleatoria discreta (distribuzione di probabilità discreta):

$$\langle X \rangle = \sum_{i=1, N} x_i \cdot P(x_i)$$

Variabile aleatoria continua (distribuzione di probabilità continua):

$$\langle X \rangle = \int_{\text{tutti gli } x} x \cdot P(x) \cdot dx$$

Si dimostra che il valor medio $x_{\text{medio}} = (\sum_{i=1, K} x_i) / K$ dei valori misurati di una variabile aleatoria in un numero molto grande di “esperimenti” tende al valore atteso della variabile aleatoria.



Esercizio

Si effettuano **diverse misure** del raggio di base (R) e dell'altezza (H) di uno **stesso** cilindro, ottenendo le seguenti coppie di valori:

$$\begin{aligned} R_1 &= 23.92 \text{ cm}, & H_1 &= 17.59 \text{ cm} \\ R_2 &= 0.2406 \text{ m}, & H_2 &= 0.1747 \text{ m} \\ R_3 &= 238.3 \text{ mm}, & H_3 &= 175.4 \text{ mm} \end{aligned}$$

NB R_i, H_i di uno **stesso V** misurati in diverse operazioni saranno **più o meno** uguali

Trovare il **valor medio** del volume del cilindro.

Formula risolutiva: $V_{\text{medio}} = (V_1 + V_2 + V_3)/3 = \pi [(R_1^2 H_1 + R_2^2 H_2 + R_3^2 H_3)/3]$
con $V_i = \pi \cdot R_i \cdot R_i \cdot H_i$, dove R_i = raggio base, H_i = altezza

Ad es. nel Sistema Internazionale una lunghezza si esprime in m:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.2392 \text{ m}, & H_1 &= 0.1759 \text{ m} & \rightarrow & V_1/\pi = 0.1006 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3 & [0.010064] \\ R_2 &= 0.2406 \text{ m}, & H_2 &= 0.1747 \text{ m} & \rightarrow & V_2/\pi = 0.1011 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3 & [0.010113] \\ R_3 &= 0.2383 \text{ m}, & H_3 &= 0.1754 \text{ m} & \rightarrow & V_3/\pi = 0.0996 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3 & [0.009960] \end{aligned}$$

Valor medio del volume = $0.316 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$ (= $3.16 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ = $0.316\text{E}-01 \text{ m}^3$ = 0.0316 m^3)

(NB si deve usare la stessa unità!)



Probabilità classica

Def. La probabilità, $P(x)$, di un evento x è il rapporto tra il numero M di casi "favorevoli" (cioè il manifestarsi di x) e il numero totale N di risultati ugualmente possibili e mutuamente esclusivi.

Detta anche **probabilità oggettiva** o **probabilità a priori**: stima della probabilità di un evento a partire dalla simmetria del problema.

Esempio: lancio di un dado non truccato – la probabilità, di avere un numero qualsiasi compreso fra 1 e 6, è $1/6$:

$$P(x) = \frac{\text{Numero di volte in cui può uscire } x}{\text{Numero di risultati possibili}} = \frac{1}{6}$$

In generale $P(x) = 1/N$ (con $N = 37$ roulette, 90 lotto, etc.)



Probabilità empirica

Definizione **sperimentale** di probabilità come **limite della frequenza** misurabile in una serie di esperimenti.

La probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero di prove.

Nota: rispetto alla precedente definizione classica, qui stiamo sostituendo il rapporto:

$$\frac{\textit{numero di casi favorevoli}}{\textit{numero di casi possibili (tutti)}}$$

con il rapporto:

$$\frac{\textit{numero di esperimenti con esito favorevole}}{\textit{numero complessivo di esperimenti effettuati (tutti)}}$$



Probabilità empirica/2

In pratica, se abbiamo un esperimento ripetuto N volte ed un certo risultato x che accade M volte, la probabilità di x è data dal limite della **frequenza** (M/N) quando N tende all'infinito

$$P(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} M/N$$

Vantaggio: possiamo applicare la definizione anche a

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è uniforme
- casi in cui la distribuzione di probabilità non è ricavabile a priori dalla simmetria dell'esperimento.



Probabilità empirica/3(*)

N1: la **probabilità empirica** ...non è una proprietà solo dell'esperimento ma...
dipende del particolare gruppo su cui viene calcolata.

Es: la probabilità di sopravvivenza ad una certa età, calcolata su diversi campioni di popolazione a cui una stessa persona appartiene (maschi, femmine, fumatori, non fumatori, deltaplanisti, ecc.), risulta diversa.

N2: ... **si può rigorosamente applicare soltanto agli esperimenti ripetibili** per i quali il limite per N che tende all'infinito ha senso.

Es: Il risultato di una partita di calcio, il tempo atmosferico di domani e molte altre situazioni della vita quotidiana **non** sono soggette all'uso di questa definizione di probabilità.

N3: necessità di "operatività": (quasi) tutti sono concordi nel definirla come **il valore della frequenza relativa di successo su un numero di prove sufficientemente grande** (l'incertezza su P dopo N prove è calcolabile in ogni caso):

[grande, ma non necessariamente tendente all'infinito!!!!]



Come si usa la probabilità – predizione

- al di là della particolare definizione di probabilità, **se conosco la probabilità $P(x)$** di un evento x , posso **inferire** che cosa succederà, cioè **quante volte (M) uscirà il risultato x , in una serie di N esperimenti/prove** – cioè si inverte la definizione di probabilità

$$M = P(x)N$$

è il valore più probabile (NB intero, se la variabile aleatoria x è intera!)



- es. dado, 100 lanci, $M = P(5)N = 100/6 = 17$

NB 16.66... sarebbe invece il valor medio su un gran numero di serie di 100 lanci ciascuna – ossia, non può esistere un numero frazionario di estrazioni



Esercizio - predizione

Un bambino lancia sassi contro una parete circolare di **raggio** 0.514 m in cui sono stati praticati $N_f = 26$ fori circolari del **diametro** di 5.70 cm. Se il bambino non mira e i sassi sono piccoli rispetto alle dimensioni dei fori, qual è il numero più probabile di sassi che passerà oltre la parete ogni $N_l = 3670$ lanci? Qual è la probabilità che un sasso rimbalzi ?

Soluzione:

Simmetria del problema \rightarrow ogni cm^2 ha la stessa probabilità di essere colpito \rightarrow probabilità p di passare dall'altra parte è data dall'area favorevole (dei fori) s diviso l'area totale S :

$$p = s/S = N_f \cdot [d/(2R)]^2 = 0.0799$$

con $s =$ superficie totale dei fori $= N_f \cdot \pi \cdot d^2/4$

$$S = \text{superficie della parete} = \pi \cdot R^2$$

$$d = \text{diametro dei fori} = 0.570\text{E-}01 \text{ m}$$

$$R = \text{raggio della parete} = 0.514\text{E+}00 \text{ m}$$

$$N. \text{ più probabile sassi} = N_l \cdot p = N_l \cdot s/S = N_l \cdot N_f \cdot [d/(2R)]^2 = 293 \quad \text{(NB: intero!!!)}$$

Probabilità di un rimbalzo: $q = 1 - p = 1 - s/S = 0.920$ etc.



Probabilità soggettiva(*)

Def. La probabilità di un evento x è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di x .

Definizione meno rigorosa, ma spesso usata per formulare giudizi:

Es: “credo che domenica la mia squadra riuscirà a vincere”,
“è facile che mi capiti una domanda sulla probabilità all'esame di fisica”,

Nota:

Talvolta siamo forzati a assegnare un determinato grado di fiducia all'avverarsi di un evento.

Esempio:

il grado di fiducia che diamo al fatto che il gruppo su cui abbiamo calcolato la frequenza di un evento sia effettivamente rappresentativo del campione totale.



Teoremi sulla probabilità

- Teorema della somma ←
- Teorema del prodotto
- Teorema della probabilità composta ←
- Teorema della probabilità totale
- Teorema di Bayes



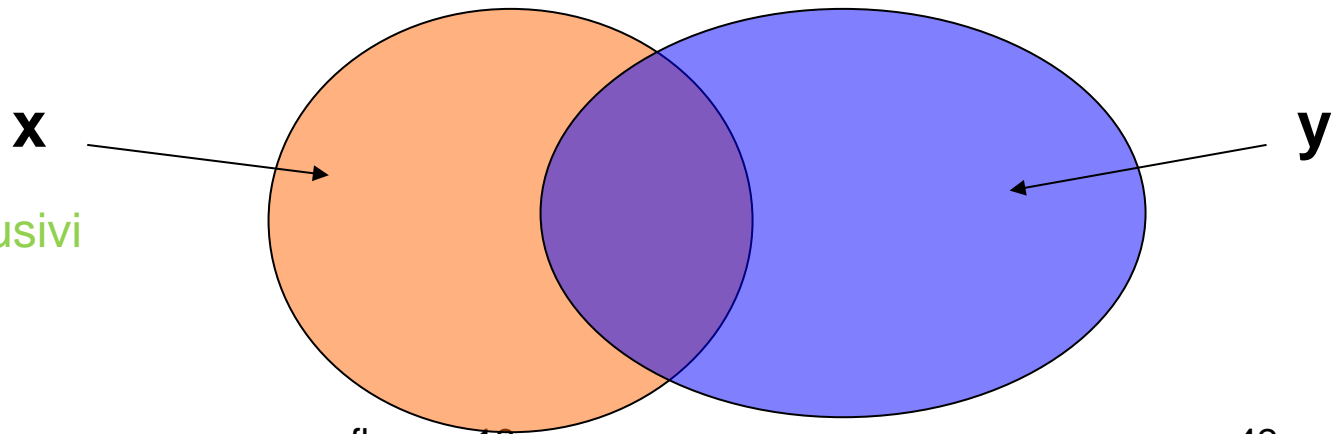
Teorema della somma

Per due eventi qualsiasi, x , y , non necessariamente mutuamente esclusivi, la prob. che avvenga $x \circ y$ vale

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$$

(ovvero $P(x+y) = P(x) + P(y) - P(x \cdot y)$)

(ovvero $P(x \circ y) = P(x) + P(y) - P(x \text{ e } y)$)



- se A e B sono m. esclusivi
 $P(x \circ y) = P(x) + P(y)$
- è banale risolvere per
per trovare il prodotto



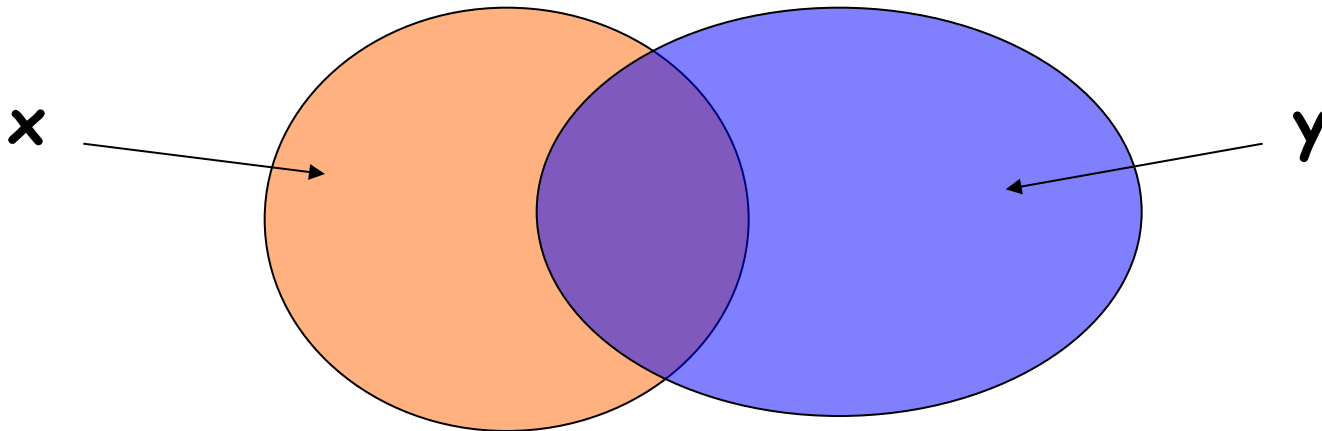
Teorema del prodotto(*)

Per due eventi qualsiasi, x , y , non necessariamente mutuamente esclusivi, la prob. che avvenga x e y vale

$$P(x \cap y) = P(x) + P(y) - P(x \cup y)$$

$$(\text{ovvero } P(x \cdot y) = P(x) + P(y) - P(x + y))$$

$$(\text{ovvero } P(x \text{ e } y) = P(x) + P(y) - P(x \text{ o } y))$$





Teorema della probabilità composta

Altro modo per esprimere il teorema del prodotto :

la probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro calcolata a condizione che il primo abbia luogo:

$$P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y|x) [= P(y) \cdot P(x|y)]$$

Si noti che:

- se x e y sono mutuamente esclusivi $P(y|x)=0$ e $P(x \cap y) = 0$;
- se x e y sono indipendenti, $P(y|x) = P(y)$ e $P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y)$.



Esercizi

Un tiratore ha una probabilità uguale a 0.257 di fare centro ad un qualsiasi colpo. Se prende un autobus per recarsi al poligono di tiro qual è la probabilità che riceva un biglietto dell'autobus con un numero divisibile per 23 **e al tempo stesso (oppure)** di fare centro al terzo colpo?

 P_1 (biglietto dell'autobus con numero divisibile per 23) = $1/23 = 0.0435$ (Ad es., per numeri interi casuali di 7 cifre, uno ogni 23 sarà divisibile per 23)

P_2 (fare centro al terzo colpo) = 0.257 (Al terzo colpo P_2 è la stessa che ad ogni altro colpo)

NB Gli eventi sono indipendenti!

1) P = Probabilità che avvengano contemporaneamente (**prodotto**)

$$P = P_1 \cdot P_2 = 0.0112 (= 1.12 \cdot 10^{-2} = 0.112E-01)$$

2) P' = Probabilità che avvenga l'uno o l'altro (**somma**)

$$P' = P_1 + P_2 - P_1 \cdot P_2 = 0.289 (= 2.89 \cdot 10^{-1} = 0.289E+00)$$



Teorema della probabilità totale(*)

Dato un gruppo completo di N eventi mutuamente esclusivi $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ (**insieme delle ipotesi**)

la probabilità di un evento x che può avvenire contemporaneamente a esse:

$$P(x) = \sum_{i=1, N} P(x|A_i) \cdot P(A_i)$$

cioè

probabilità dell'evento x = la somma dei prodotti delle probabilità di ciascuna delle ipotesi per la probabilità condizionata dell'evento con tali ipotesi



Teorema di Bayes(*)

Osserviamo un evento x . Esiste un insieme delle ipotesi $\{A_i\}$. Come viene modificata la probabilità che assegnamo all'ipotesi A_i dopo l'osservazione x ? (In altre parole: qual è la probabilità condizionata dell'ipotesi A_i data l'osservazione x ?)

Per il teorema della moltiplicazione:

$$P(x \cdot A_i) = P(x) \cdot P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i)$$

$$\rightarrow P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i) / P(x)$$

$$\rightarrow P(A_i|x) = \frac{P(A_i) \cdot P(x|A_i)}{\sum_{i=1, N} P(A_i) \cdot P(x|A_i)}$$



Esercizio sul teorema di Bayes(*)

Per facilitare un'identificazione precoce dei tumori al seno, le donne da una certa età in poi sono incoraggiate a sottoporsi a mammografia, anche se non presentano sintomi. Per donne senza sintomi fra i 40 e i 50 anni valgano le seguenti informazioni: la probabilità di avere un tumore al seno è dell'1% (**incidenza della malattia**); se sono effettivamente malate, la probabilità che il tumore sia visto dalla mammografia è dell'80% (**efficienza del test**); se non sono malate, la probabilità di una mammografia positiva è comunque del 10% (**falsi positivi**).

Supponiamo che una donna di questo gruppo risulti positiva a una mammografia: qual'è la probabilità che essa sia effettivamente malata?



Soluzione(*)

Probabilità di essere malati:

$$P(M) = 1\% = 0.01$$

Probabilità di essere sani:

$$P(S) = 1 - 1\% = 99\% = 0.99$$

Probabilità di avere il test positivo se malati (prob. condizionata):

$$P(+ | M) = 80\% = 0.80$$

Probabilità di avere il test positivo se sani (prob. condizionata):

$$P(+ | S) = 10\% = 0.10$$

Per il teorema di Bayes:

$$\begin{aligned} P(M|+) &= P(+ | M) \cdot P(M) / [P(+ | M) \cdot P(M) + P(+ | S) \cdot P(S)] \\ &= 0.8 \cdot 0.01 / [0.80 \cdot 0.01 + 0.10 \cdot 0.99] \\ &= 0.0748 = 7.5\% \end{aligned}$$

Cioè la frazione di donne effettivamente malate fra quelle che risultano positive alla mammografia è del 7.5%



Trattamento in termini di frequenza(*)

A qualcuno potrebbe risultare più semplice pensare in termini di frequenza (numero di casi possibili) invece che in termini di probabilità. Il procedimento non è concettualmente diverso.

Supponiamo un campione di 1000 donne che si sottopone al test. Avremo:

Numero medio di malati: $N(M) = 1000 \cdot P(M) = 1000 \cdot 0.01 = 10$

Numero medio di sani: $N(S) = 1000 - 10 = 990$

Numero di individui malati che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+|M) = N(M) \cdot P(+|M) = 10 \cdot 0.80 = 8$$

Numero di individui sani che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+|S) = N(S) \cdot P(+|S) = 990 \cdot 0.10 = 99$$

Pertanto, $8+99=107$ persone su 1000 risulteranno, in media, positive al test. La frazione di queste che è effettivamente malata è:

$$N(+|M) / [N(+|M) + N(+|S)] = 8/107 = 0.0748 = 7.5\%$$

Cioè la **frazione** di persone effettivamente malate fra quelle che risultano positive al test in oggetto è del 7.5% (come si è trovato col teorema di Bayes).



Misura di grandezze fisiche e probabilità

La misura di una grandezza fisica è descrivibile tramite tre elementi:

- **valore più probabile;** (tendenza del campione)
- **incertezza** (o “errore”), la precisione con cui il valore più probabile approssima il valore vero; (dispersione del camp.)
- **unità di misura.** [la misura è confronto]

Valore più probabile, incertezza e unità di misura danno una descrizione completa e accurata di una grandezza misurata.

L'incertezza sulla misura determina il **numero di cifre significative** (v. pag. 64) con cui riportare il valore più probabile. **Non ha senso scrivere la 4a cifra significativa se già c'è una indeterminazione sulla 3a cifra!**

Se una grandezza è riportata, senza scrivere esplicitamente l'incert., con n cifre significative, convenzionalmente si assume un'incert. di ± 1 sulla n -esima cifra.



Misure ed incertezze di misura

La **misura** è la stima del **valore vero** di una **grandezza**.

Limiti alla precisione di questa stima:

- **Sensibilità dello strumento di misura**

l'ultima cifra che può essere letta

oppure

la frazione di divisione che può essere apprezzata;

- **Fluttuazioni casuali del valore misurato**

- Possibilità di **incert.** nella **procedura** e/o nello **strumento** (**incert. sistematiche: le più difficili da trattare**).

NB il valore vero di una grandezza **non** può essere conosciuto (e **non** solo in fisica)

$$X_{\text{mis}} = X_{\text{vero}} + \varepsilon$$



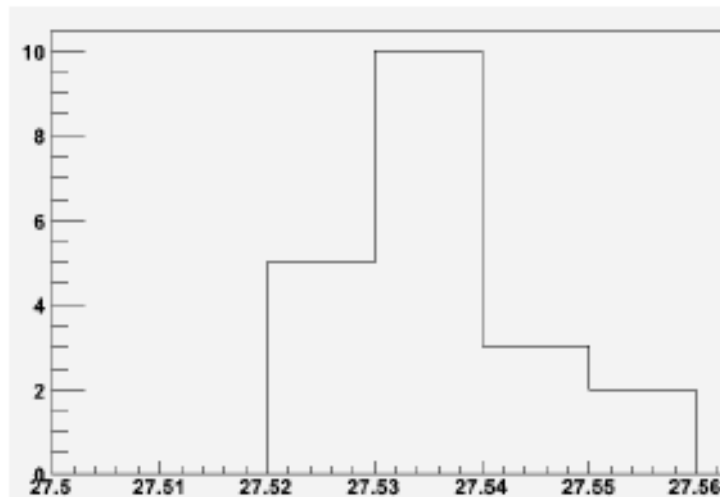
Istogrammi di frequenza

Il risultato della misura di una grandezza fisica è una *variabile aleatoria*. (v. pag. 30)

Possiamo **ripetere la misura** molte volte per studiare le variazioni del risultato (se ce ne sono) dovute alle incertezze (cioè ottenere la *distribuzione di probabilità* della variabile aleatoria).

Queste distribuzioni possono essere riassunte in Tabelle o in Istogrammi o ulteriormente condensate in un numero minore di parametri.

n.prova	risultato
0	27.525
1	27.531
2	27.539
3	27.529
4



fln mar 19



Media aritmetica

- Se faccio la media aritmetica delle N misure
$$x_m = (\sum_{i=1, N} x_i) / N = (Nx_{\text{vero}} + \sum_{i=1, N} \varepsilon_i) / N = x_{\text{vero}} + \varepsilon_m$$
- La media degli scarti $\varepsilon_m \rightarrow 0$ per N grande: gli ε_i sono casuali, $\pm v_i$ (*).
- Quindi, se le misure sono ugualmente attendibili, **la migliore stima di x_{vero} (che non può essere conosciuto) è proprio x_m** che per definizione annulla la media degli scarti (rispetto a se stesso).
- Gli scarti, essendo $\pm v_i$, non permettono di valutare la dispersione; invece gli $(\text{scarti})^2$, sempre $+v_i$, si usa \rightarrow **scarto quadratico medio**.

(*) $+vo$ = positivo etc.



Deviazione standard

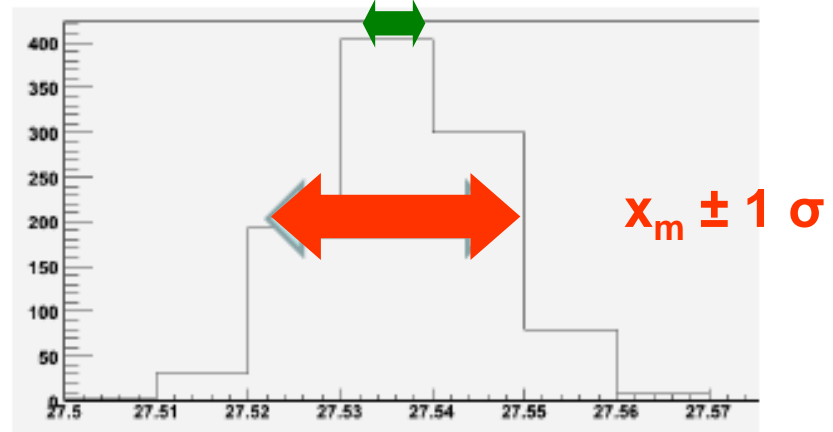
consideriamo la radice quadrata dello scarto quadratico medio (**deviazione standard**):

Si può dimostrare che, se la dev. std. della misura è σ , la dev. std. della media di N misure è $\Delta x = \sigma/\sqrt{N}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - X_{me})^2}{(N-1)}}$$

sulla media:
 $\Delta x = \sigma/\sqrt{N}$

La deviazione standard è un indicatore della larghezza della distribuzione delle misure.



Se abbiamo delle misure distribuite in maniera casuale e centrate attorno al loro valor medio, la deviazione standard è la stima migliore dell'incert. con cui si può conoscere il valore vero della grandezza misurata partendo da una singola misura.



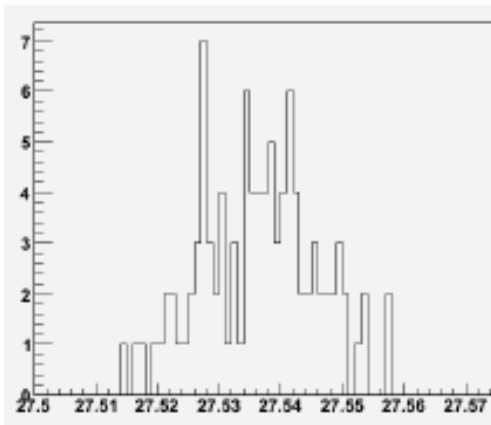
Verso un'interpretazione probabilistica

Qual è la probabilità che il valore vero si trovi nell'intervallo **valore più probabile \pm incertezza?**

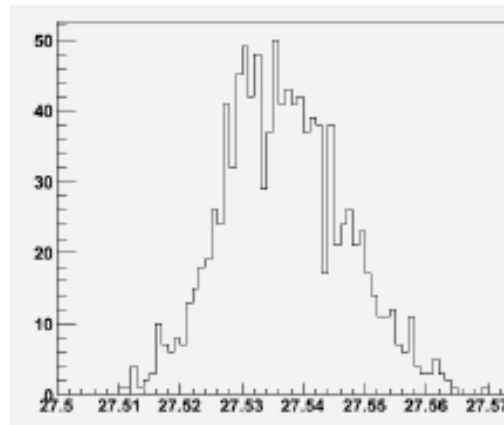
Osservazione:

Se le **misure** sono **casuali e indipendenti fra loro**

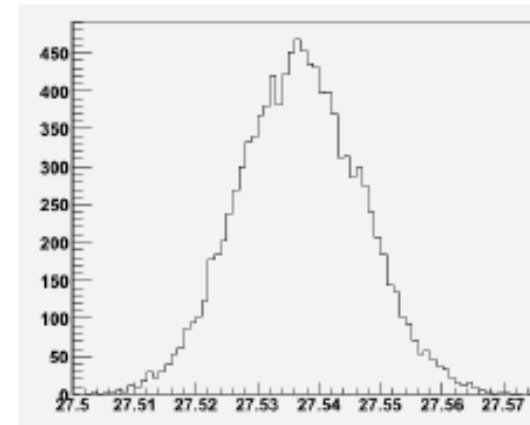
⇒ l'**istogramma di frequenza** tende ad assumere forma a **campana...**



100 misure



1000 misure



10000 misure

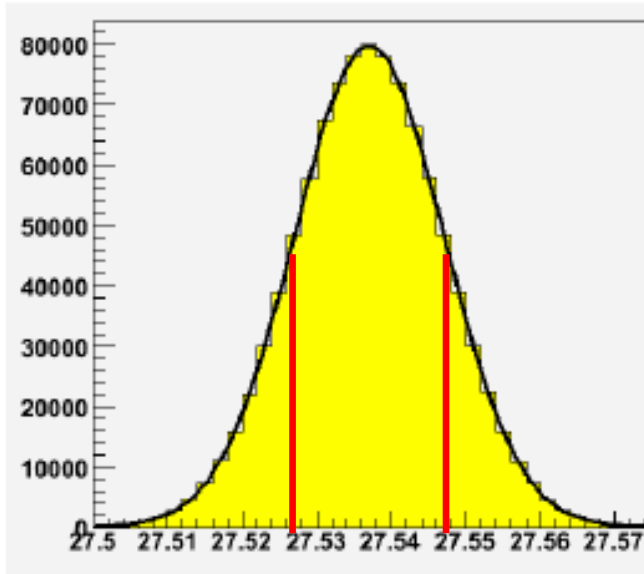
...centrata sul valor medio

...con larghezza dell'ordine della deviazione standard



Funzione di Gauss

...cioè secondo la **distribuzione normale** (o di Gauss o gaussiana)



$\mu \pm 1\sigma$

$$G(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con:

N = numero di misure

μ = valor medio

σ = deviazione standard

$\pm 1\sigma$	68.3%	probabilità	(area sotto G(x))
$\pm 2\sigma$	95.4%	«	«
$\pm 3\sigma$	99.7%	«	«

Teorema del limite centrale :

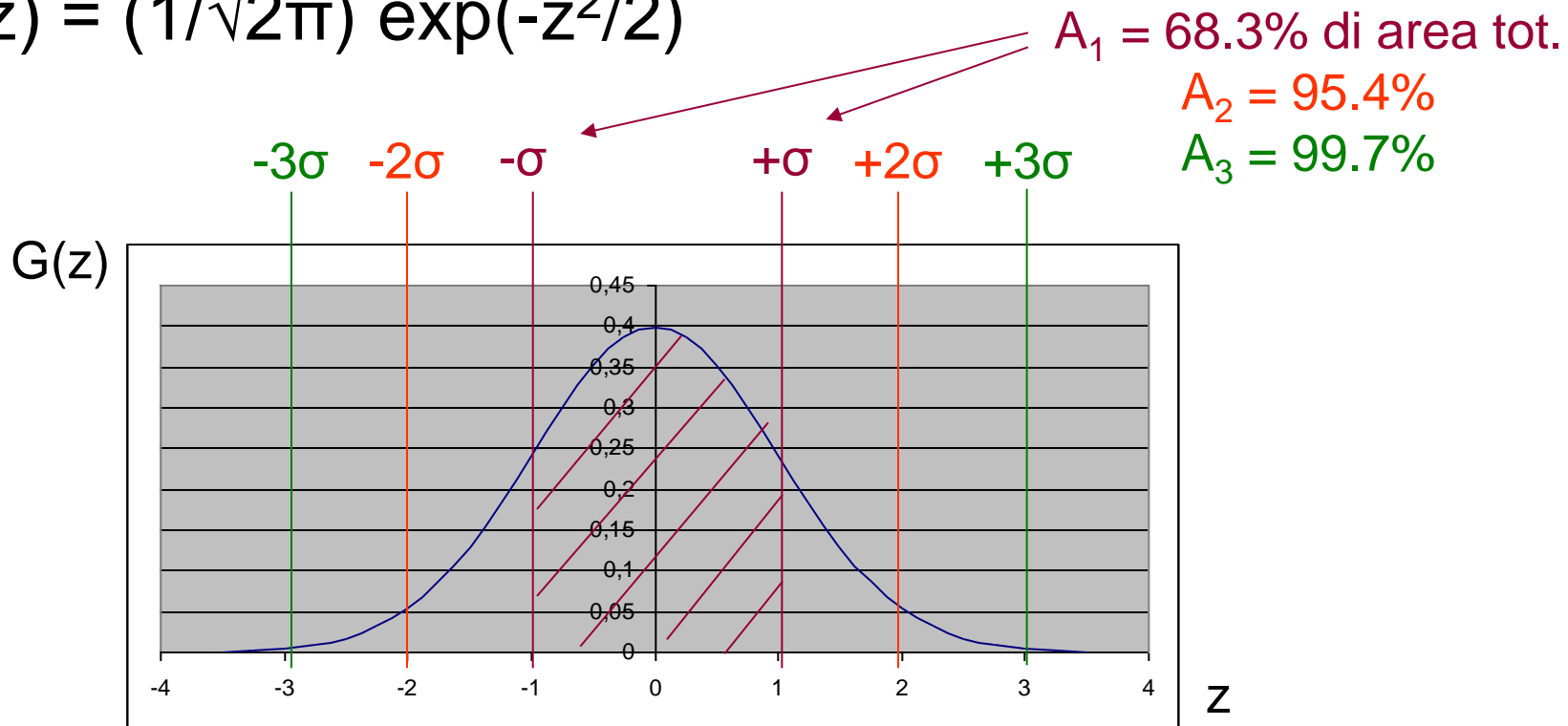
La distribuzione della *somma* di un numero elevato di variabili casuali indipendenti tende a distribuirsi *normalmente*, cioè una **distribuzione normale** avente come μ la somma dei valori medi delle misure e come σ^2 la somma delle varianze delle misure.



La distribuzione normale standardizzata(*)

- se poniamo $(x-\mu)/\sigma = z$, la distribuzione di Gauss si potrà scrivere in forma standardizzata come

$$G(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-z^2/2)$$



$$A_n = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-n}^n \exp(-z^2/2) dz$$

$$A_\infty = 1 = 100\%$$

fln mar 19

(*) nmal, facoltativo, ma utile



Incertezza assoluta e relativa

- Sinteticamente, valor medio ed incert. q.m. *sulla media* (= incert. q.m. su una singola misura diviso \sqrt{N}), ad es. un tempo di caduta di sferette uguali in un fluido, N misure
 $t_{\text{caduta}} = t_m \pm \Delta t = (10.62 \pm 0.06) \text{ s}$
(r.m.s. = root mean square \approx q.m. = quadratico medio)
- NB l'incert. è data, di norma, con una sola *cifra significativa*
- l'*incert. assoluta* Δt ($=\sigma/\sqrt{N}$) è una *grandezza dimensionata* con unità di misura di t ossia s, nell'esempio, che *fissa il n. di cifre del risultato*; l'*incertezza relativa*
 $\delta = \Delta t/t_m = 0.006 = 0.6/100 = 0.6\%$
è invece un *numero puro* (ci indica la precisione della misura: più piccolo = misura più precisa)
- *Non esiste una misura fisica senza incertezza*



Incertezze di misura casuali e sistematiche

- Oltre alle **incertezze casuali o statistiche** vi sono le **incertezze sistematiche**, ad es. errori di calibrazione, errori di parallasse etc. – in questo caso si può parlare di **accuratezza**, ad es. si può fare un tiro al bersaglio ben raggruppato ma non al centro del bersaglio: serie precisa ma non accurata etc. **le cose non migliorano aumentando il numero di tentativi**
- Se le incertezze casuali sono piccole rispetto alla **sensibilità** dello strumento di misura, la lettura sarà sempre la stessa, anche in questo caso non serve aumentare il numero di misure, l'incertezza è data dalla sensibilità dello strumento (per es. metà della cifra meno significativa(*) leggibile)

(*) In un numero, ad es. 8536, la cifra più significativa è a sx (8), quella meno signif. a dx (6). Basta ricordare che le potenze di 10 decrescono da sx a dx.

Precisione e accuratezza

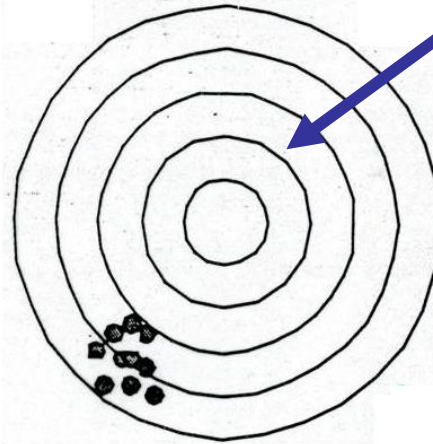
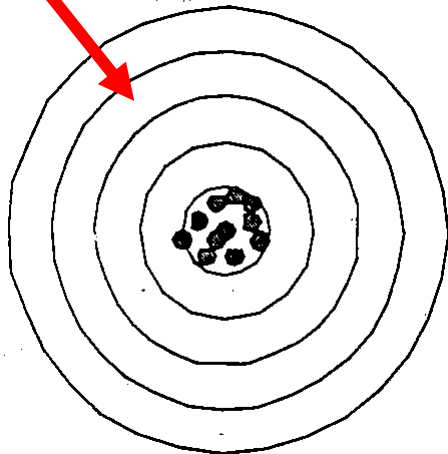
Es.: tiro al bersaglio



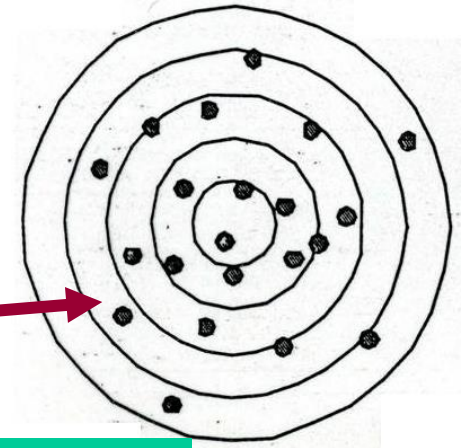
mira: **precisa**, **non accurata**
errore casuale piccolo
“ **sistematico grande**

mira: **precisa**, **accurata**
errore casuale piccolo
“ **sistematico piccolo**

l'err. sistem. può essere corretto



mira: **non precisa**, **accurata**
errore casuale grande
“ **sistematico piccolo**



basta insistere ($\sim 1/\sqrt{n}$)

IV possibilità ?
né precisa né accurata



Notazione scientifica e cifre significative (2)

- contare gli zeri è perverso (specie quando sono molti) e produce errori di ordini di grandezza (specie quando sono molti), molto più gravi degli errori sulla 3a cifra significativa – assumendo uno stipendio mensile con 4 cifre, è preferibile subire una riduzione di 10 E o di un fattore 10? (*)
- usate la notazione scientifica quando serve – è inutile scrivere $2.36 \cdot 10^0$ visto che $n^0 = 1 \forall n$
- ricordate però che somme/sottrazioni si fanno in colonna: $3.45 - 8.32 \cdot 10^{-1} = 34.5 \cdot 10^{-1} - 8.32 \cdot 10^{-1} = 26.2 \cdot 10^{-1} = 2.62$ (il n.o di posti decimali nel risultato è = al n.o più piccolo di cifre decimali di ciascun termine nell'operaz.)

(*) impossibile non capire!



Notazione scientifica e cifre significative

- In seguito alla scelta dell'unità di misura potremo avere grandezze con rapporti molto più grandi (piccoli) di 1; ad es. sono scomode da scrivere

$$\lambda_D = 0.000000589 \text{ m} \quad (\text{riga del Na, giallo})$$

$$d_{TS} = 149600000000 \text{ m} \quad (<d> \text{ terra-sole})$$

- Si usa la notazione scientifica separando le cifre significative dalla potenza di 10 (ordine di grandezza), si scrive la cifra più significativa $\neq 0$ (quella che corrisponde alla potenza di 10 più elevata) prima del . (punto) e le altre cifre significative dopo il .

$$\lambda_D = 5.89 \times 10^{-7} \text{ m} \quad (3 \text{ cifre significative})$$

$$d_{TS} = 1.4960 \times 10^{11} \text{ m} \quad (5 \text{ cifre significative})$$

NB uno 0 indicato a dx è significativo



Cifre significative (3)

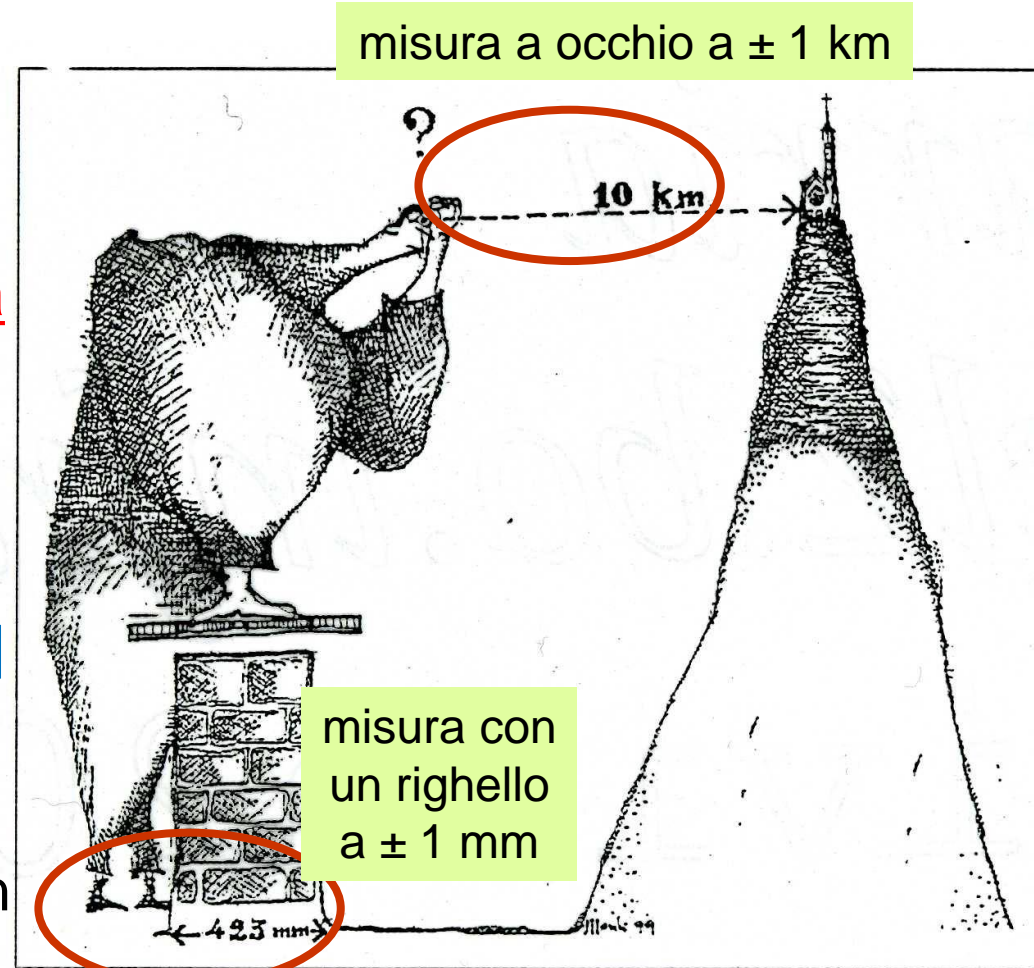
- Ad es. il valore del numero di Avogadro è misurato con grande precisione
 $N_A = (6.022140859 \pm 0.000000072) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
cioè è noto/misurato con 8 cifre significative, l'incertezza cade sulla 9a (con un'incert. relativa di 12 parti per miliardo o ppb) quindi scriverlo con 10 o più cifre non ha senso fisico – posso sempre però arrotondarlo (se non mi serve con tutte le cifre note, v. paragrafo successivo) per es. a sole 4 cifre, scelgo le prime 4 a sx: $6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ etc. – una scrittura equivalente è $0.6022 \times 10^{24} \text{ mol}^{-1}$
- Negli esercizi di fisica normalmente i dati sono forniti con 3 o 4 cifre significative, quindi non è sensato dedurre risultati con un numero di cifre maggiore – NB inoltre, in generale, combinando vari numeri noti con una certa precisione il risultato ha una precisione peggiore
- => nella soluzione degli esercizi si chiedono i risultati (se sono numeri reali) con 3 cifre significative



Cifre significative e propagazione delle incertezze(4)

NB1, v. p. 62, nella somma o sottrazione di grandezze di precisione diversa, la meno precisa (quella con l'incertezza più grande) domina l'incertezza del risultato (e tutte le cifre della grandezza più precisa risultano **illusorie** ossia **inutili**):
 $(10 \pm 1) \text{ km} + (423 \pm 1) \text{ mm} = (10 \pm 1) \text{ km}$ [incertezza assoluta]

NB2 prodotto/divisione: il n.o di cifre significative del ris. è lo stesso di quello del termine con minor n.o di cifre: $(10 \pm 1) \text{ km} \times (423 \pm 1) \text{ mm} = (4.2 \pm 0.4) 10^{-3} \text{ km}^2$ [conta incertezza relativa]



.. $(10 \pm 1) \text{ km} + (423 \pm 1) \text{ mm} = (10.000423 \pm 1) \text{ km}$:
... le cifre successive a quella su cui cade l'errore non hanno alcun significato!



Appendice sull'uso della calcolatrice(+)/PC (*)

Supponiamo di fare una divisione con la calcolatrice tascabile:

$$\frac{1.03}{1.01} = 1.019801980 \dots ?$$

(con la calcolatrice del PC ottenete ancora più cifre, ad es. 29).

Sarebbe sensato partendo da numeri conosciuti con 3 cifre fabbricarne uno di 10 (o più) cifre? In realtà dei due numeri non conosciamo la 4a cifra, possiamo solo dare un intervallo

$$\frac{1.025 \div 1.035}{1.005 \div 1.015} = 1.0098 \dots \div 1.0298 \dots = 1.01 \div 1.03$$

quindi **il risultato deve essere arrotondato al massimo a 3 cifre, 1.02** coerentemente con la precisione iniziale, $1/103 \sim 10^{-2}$

– **la calcolatrice non può essere una fabbrica di cifre: una operazione aritmetica non aumenta in genere la precisione**

(*) nmal, ma molto utile da capire

(+) Jerry Merryman, Texas Instr., 1967



Le grandezze fondamentali della meccanica: L, T, M

- **lunghezza** – non località, non coincidenza: distanza fra due punti; si misura ad es. con una riga graduata etc.; unità: **metro (m)**, cm,
- **tempo** – non simultaneità: si misura ad es. con un fenomeno periodico, orologio etc.; unità: **secondo (s)**, minuto, ore (h),
- **massa** – quantità di materia di un corpo, inerzia del corpo rispetto alle cause del moto; si misura ad es. con una bilancia etc.; unità: grammo (g), **chilogrammo (kg)**, tonnellata (t),

Dal 20/05/2019 tutte le unità di misura fondamentali saranno definite in termini di costanti della fisica (c, e, h etc.) e non più in termini di oggetti materiali: un bel (lungo) progresso rispetto ad antropomorfici piedi e braccia di tizio o caio ed anche rispetto a metro e chilogrammo campione della Rivoluzione Francese.




Grandezze fondamentali e derivate

- Una volta definite operativamente alcune grandezze relative ai fenomeni di interesse, le altre grandezze possono essere definite in funzione delle prime – ad es. $v = s/t$ (*)
- Si distingue quindi fra **grandezze fondamentali** (nel minor numero possibile/conveniente) e **grandezze derivate**
- Le definizioni fanno sì che **la scelta di quali siano le grandezze fondamentali sia arbitraria**
- In meccanica bastano 3 grandezze fondamentali (ad es. lunghezza [L], tempo [T], massa [M])

(*) $[V] = [LT^{-1}]$ v. pag. 20



Unità di misura delle grandezze fondamentali (*)

- **metro**, unità di misura delle distanze – a partire dal 1983, 1 m = distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $1/299792458$ s (da $c = 299792458$ m/s)
- **secondo**, unità di misura dei tempi – 1 s = tempo necessario per 9.192631770×10^9 vibrazioni di una particolare riga dell'atomo del ^{133}Cs [1 giorno solare medio = 86400 s]
- **chilogrammo**, unità di misura della massa – 1 kg = 5.0188×10^{25} atomi di ^{12}C [1 mole = 12 g ^{12}C , contiene N_{Av} atomi]  in futuro, costanti della fisica





Sistemi di unità di misura

- Scelte le grandezze fondamentali si devono scegliere le loro unità di misura: quelle delle grandezze derivate sono determinate in conseguenza → sistemi di unità di misura
- In meccanica si usa MKS (m, kg, s), ma si usa anche CGS (cm, g, s) e sistema degli ingegneri (m, kgpeso, s)
- Nella CE dal 1978 è in vigore il Sistema Internazionale (SI) ossia 7 grandezze e relative unità (m, kg, s, A, K, cd, mole)
- a queste unità vanno aggiunti i radianti (rad) per gli angoli piani e gli steradiani (srad) per quelli solidi
- **NB** esistono poi numerose grandezze usate dalle nostre parti comunemente che non fanno parte di alcuno dei sistemi precedenti (senza poi andare negli US)



Sistemi di unità di misura (2)

- Riassumendo:

Grandezze fondamentali => Scelta delle unità di misura fondamentali => Sistemi di unità di misura

- Ad es. per la meccanica

MKS	spazio:	m	= 10^2 cm
	tempo:	s	
	massa:	kg	= 10^3 g
CGS	spazio	cm	= 10^{-2} m
	tempo	s	
	massa	g	= 10^{-3} kg

NB s è l'abbreviazione di spazio, ma anche di secondo, l di lunghezza, ma anche di litro, etc. etc.

$$l = 5.1 \text{ m} = 5.1 \cdot 10^2 \text{ cm}$$

$$s^{-1} = 2 \text{ m}^{-1} = 0.02 \text{ cm}^{-1}$$

etc.

conversione di unità :
si moltiplica per

$1 = 100 \text{ cm}/1 \text{ m}$
(numeratore)
per convertire $\text{m} \rightarrow \text{cm}$

$1 = 1 \text{ m}/100 \text{ cm}$
per $\text{m}^{-1} \rightarrow \text{cm}^{-1}$
(denominatore, $1/\text{m}$)



Quello che la fisica non è (*)

- non tenta di dare risposte a domande di tipo ontologico:
 - qual'è l'essenza di tempo, spazio, massa, carica elettrica ...?
 - => le questioni di tipo filosofico esulano dal campo della fisica
- non è un catalogo di casi:
 - tutte le mele che cascano, tutte le stelle di una certa magnitudo, tutte le molecole in un volume di gas ...
 - => (poche) leggi generali che inglobano moltissimi/tutti i casi conosciuti
- non è una descrizione storica delle scoperte in fisica
 - => le scoperte sono stimulate dalla tecnologia/scoperte precedenti e stimolano applicazioni tecnologiche/scoperte
- non è affatto un puro esercizio matematico
 - => usa il linguaggio matematico per esprimere sinteticamente misure, relazioni, leggi

(*) nmal, facoltativo,
ma utile da ricordare!!!

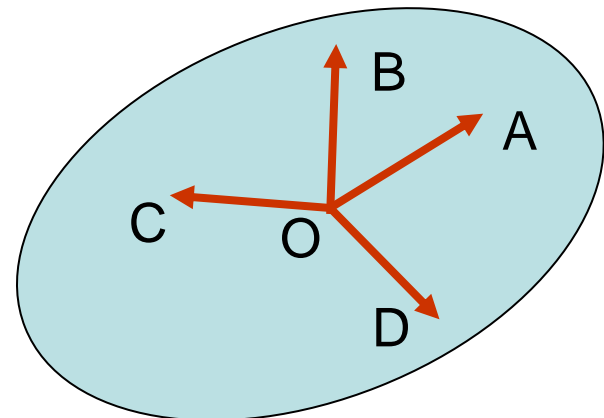
NB Il valore della velocità della luce, come del resto quello di ogni altra grandezza fisica, o i valori di π , e ... **non** possono essere decisi a maggioranza



Grandezze scalari e vettoriali

- grandezze quali temperatura, volume, massa, pressione etc. sono **scalari**: completamente specificate da un numero $\pm vo$ – per esse valgono le regole dell'aritmetica ordinaria, **\pm : solo se hanno le stesse dimensioni, \times e $/$: liberamente**
- grandezze quali forza, quantità di moto, spostamento etc. sono **vettoriali**: occorre specificare la direzione (e il verso) oltre al modulo o intensità – per esse valgono regole speciali
- ad es., per dare informazioni stradali **non** basta la distanza (quantità scalare), occorre una direzione

A,B,C,D sono a **distanza uguale** da O,
 $|OA| = |OB| = |OC|$ etc.,
ma gli **spostamenti** sono diversi,
 $OA \neq OB \neq OC$ etc.



$|OA|$ indica il valore assoluto (o modulo), scalare, del vettore OA



Aule di V. della Beverara ed es. di spostamenti (→) per arrivarci in bici

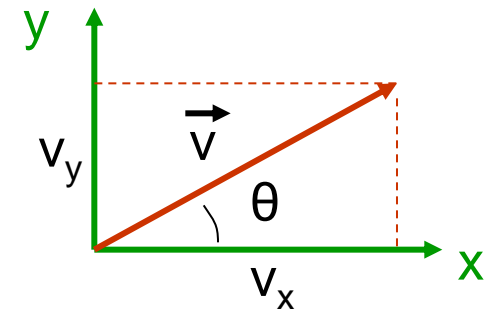
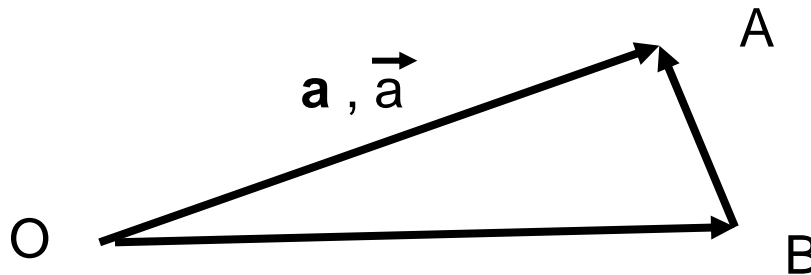


fin mar 19
— = — ~ — (lavori in corso)



Vettori (OA, in **grassetto** o con la \rightarrow sopra)

- vettori nel piano(spazio): **2(3)** componenti [2(3) numeri, $\pm v_i$]
- [v. in una dimensione: 1 componente (1 numero, $\pm v_0$)]
- versori: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ vettori di modulo unitario (solo direzione)



- vettori (in alternativa)
 - modulo (o valore assoluto): $|\mathbf{a}|$, $|\vec{a}|$, a
 - direzione [e verso]: nel piano cartesiano θ

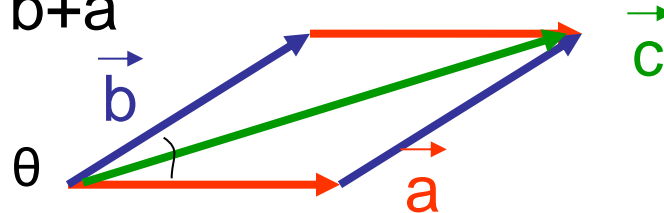
NB1 le componenti di un vettore sono $\pm ve$; *il modulo è sempre +vo*

NB2 un vettore può dipendere solo dalla direzione di un altro, v. attrito cinet.

Operazioni con i vettori

1. somma/differenza di vettori omogenei

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

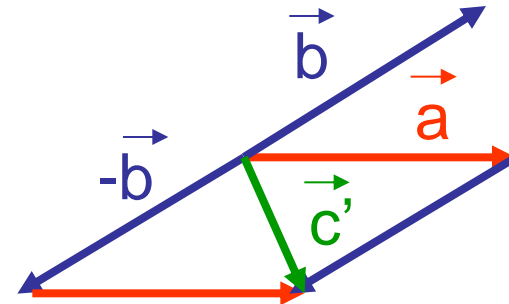
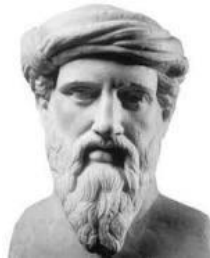


**Regola del
parallelogramma**

- il vettore \vec{c} è equivalente ad \vec{a} seguito da \vec{b} o viceversa (evidente nel caso di uno spostamento)
- modulo quadro del risultante (Legge dei coseni(*))

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \theta) = a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta$$

- $\vec{c}' = \vec{a} - \vec{b}$





Operazioni coi vettori (2)

– in generale il risultante di più vettori chiude la poligonale

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 + \vec{s}_4$$

etc.

– casi particolari

- vettori collineari paralleli

$$c = a + b ; \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

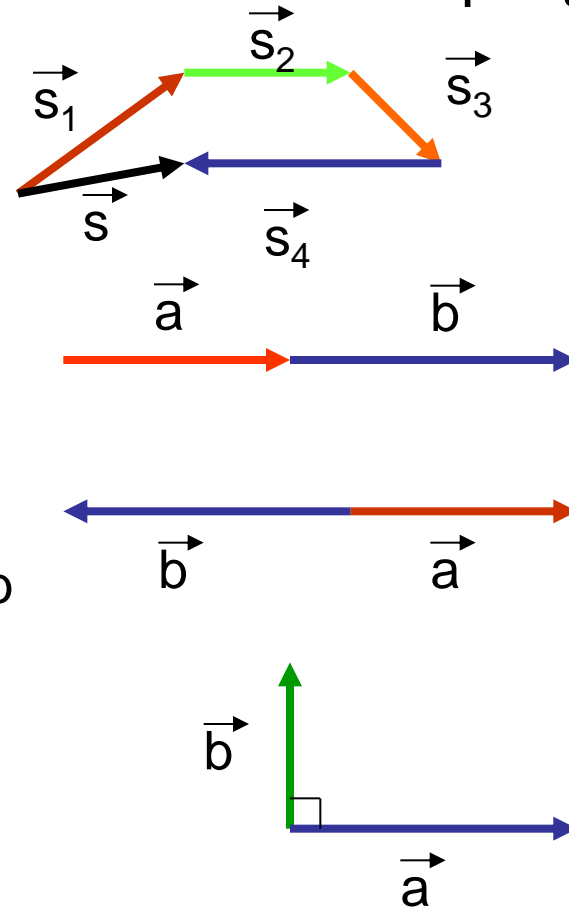
- vettori collineari antiparalleli

$$c = |a - b| ; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

- vettori ortogonali

$$c^2 = a^2 + b^2 ; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(Teorema di Pitagora)



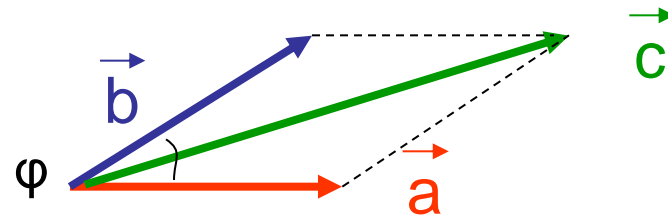


Operazioni coi vettori (3)

• 2. decomposizione di vettori

- \vec{a} e \vec{b} sono le componenti di \vec{c} secondo le relative direzioni

un vettore può essere sempre scomposto secondo due direz. date: si inverte la regola del parallelogr.



- componenti cartesiane

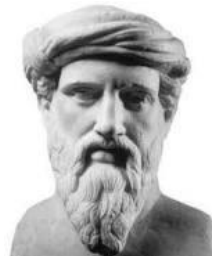
$$v_x = v \cos\theta$$

$$v_y = v \sin\theta$$

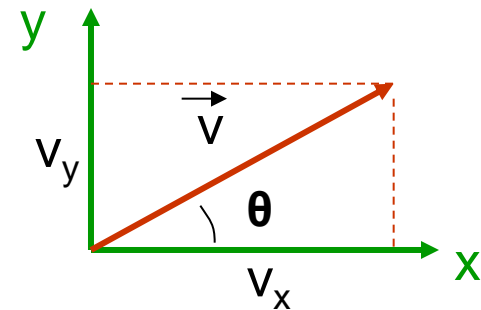
- componenti polari

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\text{tg}\theta = v_y/v_x$$



fln mar 19



versori (vettori unitari):
 \vec{i} , \vec{j} , (\vec{k}) secondo x, y, (z)
 $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ (+ $v_z\vec{k}$)



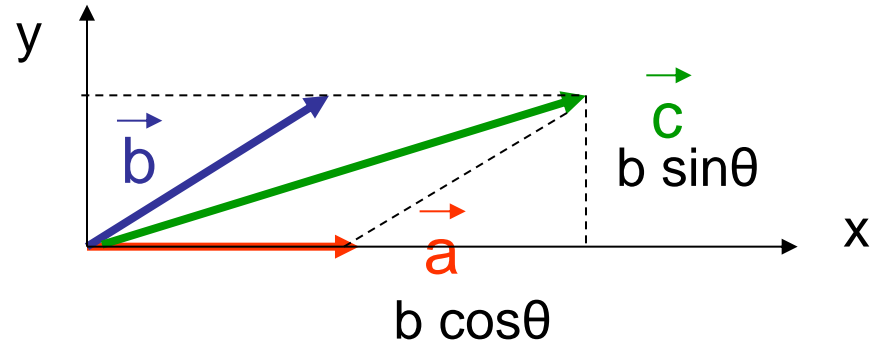
Operazioni coi vettori (4) (*)

- es.: somma in componenti di \vec{a} e \vec{b} , scelgo \vec{a} secondo x per semplicità

$$a_x = a; a_y = 0$$

$$b_x = b \cos\theta ;$$

$$b_y = b \sin\theta$$



$$\Rightarrow c_x = a_x + b_x = a + b \cos\theta$$

$$c_y = a_y + b_y = b \sin\theta$$

$$\Rightarrow c^2 = c_x^2 + c_y^2 = a^2 + \underline{b^2 \cos^2\theta} + 2ab \cos\theta + \underline{b^2 \sin^2\theta}$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta$$

(come già trovato; **NB** $\forall\theta$ si ha sempre $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

(*) nmal, facoltativo, immediato con i versori, $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j}$

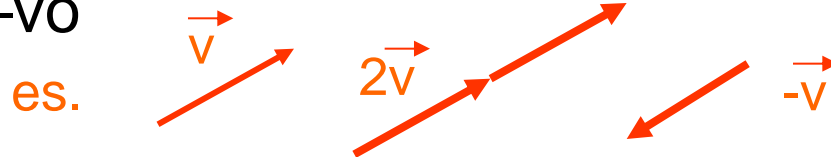


Operazioni coi vettori (5)

- 3. prodotto/divis. di un vettore per uno scalare

$$\vec{q} = m\vec{v}; \quad q = |m\vec{v}| = |m||\vec{v}| = |m|v$$

stessa direzione, il verso dipende dal fatto che lo scalare sia +vo o -vo



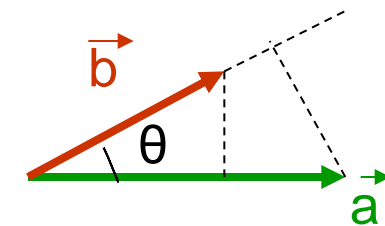
- 4. prodotti fra vettori

- **prodotto scalare** o interno

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$= (a \cos\theta)b = a_b b = a(b \cos\theta) = ab_a$$

componente di a nella direzione b moltiplicata per b e viceversa



nullo per
 $\theta = 90^\circ, 270^\circ$



Operazioni coi vettori (6)

- **prodotto vettoriale** o esterno

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

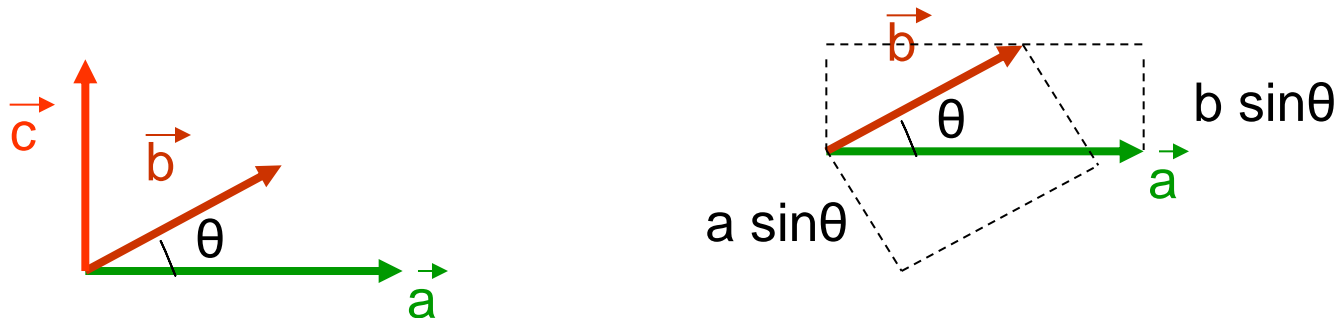
$$c = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\theta$$

nullo per
 $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

misura l'area del parallelogramma di lati a, b

$$c = (a \sin\theta)b = a(b \sin\theta)$$

\vec{c} è perpendicolare al piano formato da \vec{a} e \vec{b}

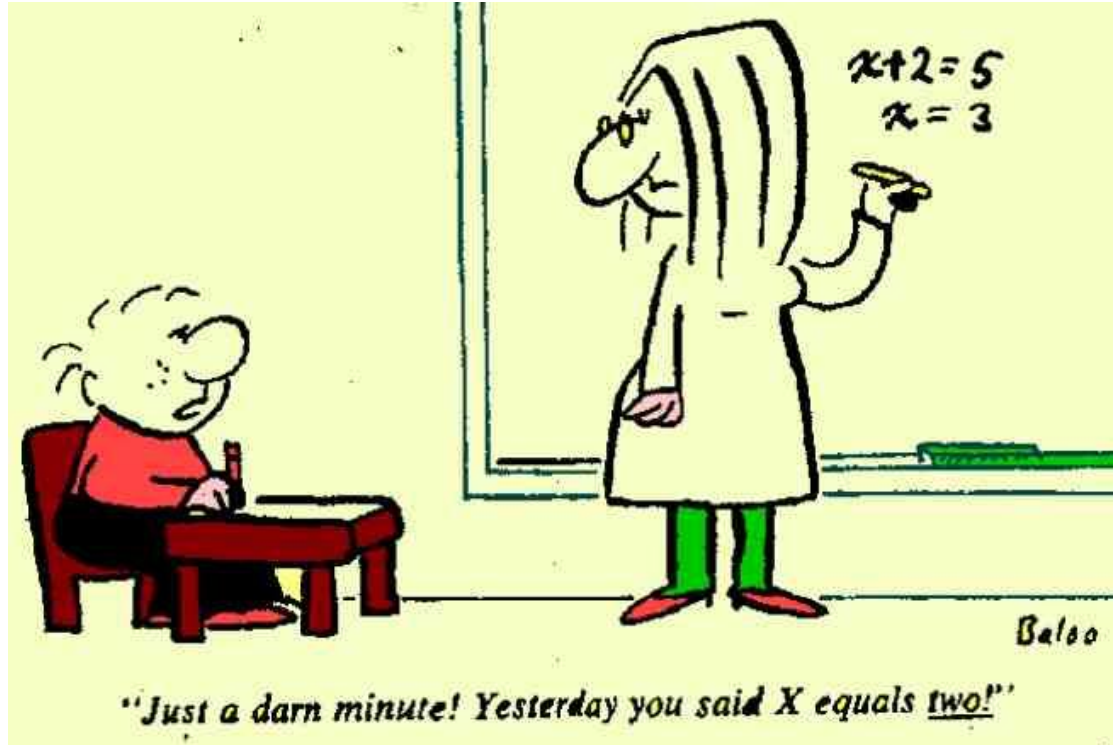
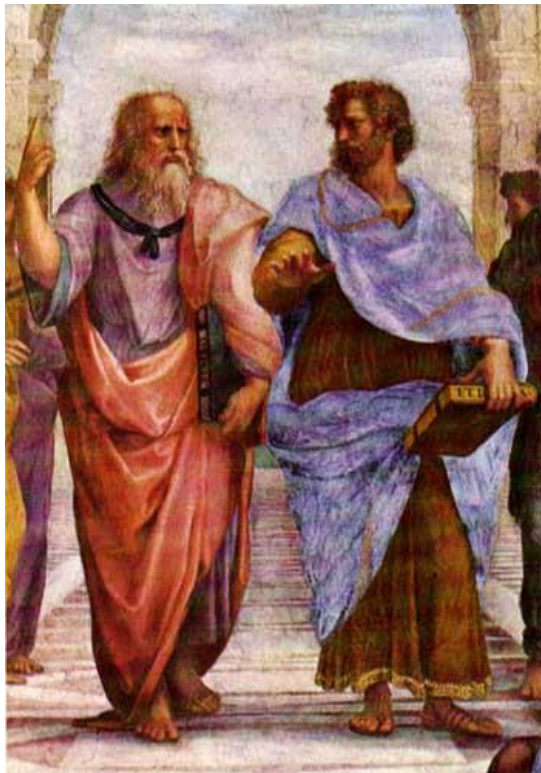


(\vec{c} vede \vec{a} ruotare su \vec{b} in senso antiorario)

Fine dell'introduzione

Non entri chi è digiuno di geometria

ἀγεωμέρητος
μηδείς
εἰσίτω



If you are really bad at maths,
you can go into banking.
Marcus Bridgestock 2/03/2012,
in The Graham Norton Show, BBC1