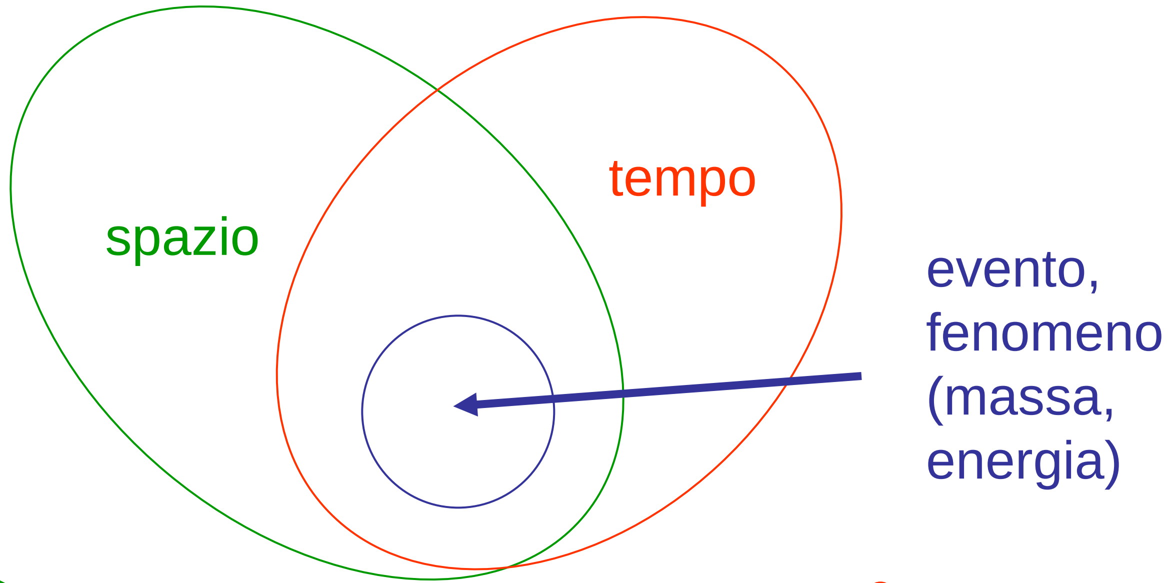
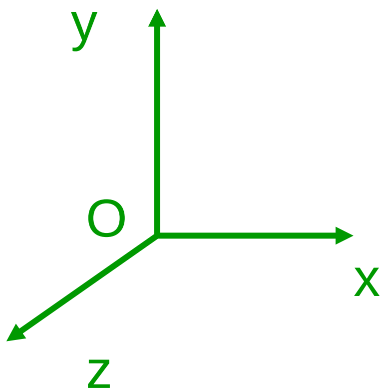
Meccanica

Stay hungry,
stay foolish!
Steve Jobs

Corso di Fisica per CTF
AA2014/15

Preliminari: spazio & tempo





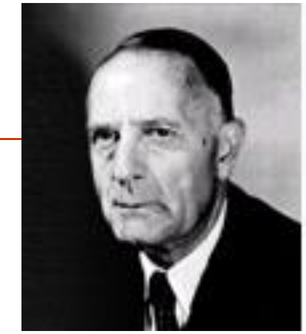
1 dimensione

≤ 3 dimensioni

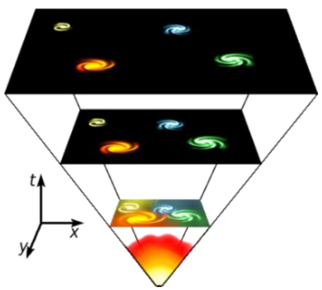
- separazione | non
- distanza | coincidenza

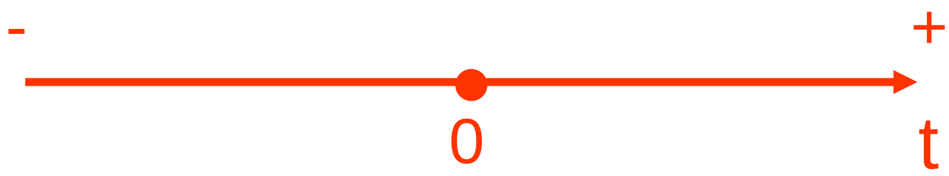
- prima/dopo | non
- durata | simulta-
- intervallo | neità

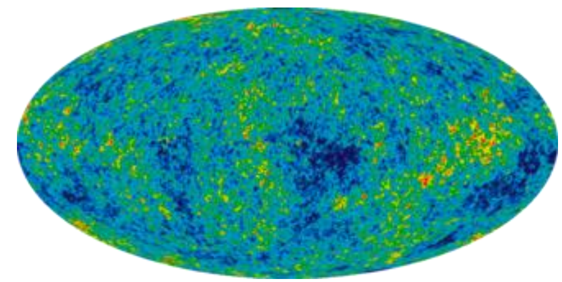
Tempo (2)



- tempo, t, trascorso a partire da un'origine dei tempi (arbitraria, comoda), +vo o –vo, futuro o passato – noi andiamo solo verso il futuro







(non esiste il tempo «assoluto»; il big bang, la nascita dell'universo, ha avuto luogo ≈ 13.7 x 10^9 anni fa, Edwin Hubble, 1929(*))

- intervallo di tempo, $\Delta t = t_2 - t_1$, fra due eventi, del tutto svincolato dall'origine dei tempi (matematicamente è quasi lo stesso se si pone $t_1 = 0$ e $t_2 = t$)

(*) La tecnica per misurare la distanza delle galassie lontane è stata sviluppata da Henrietta Leavitt, 1912. L'idea dell'universo in espansione è di Georges Lemaître, 1927

Punto materiale (P)

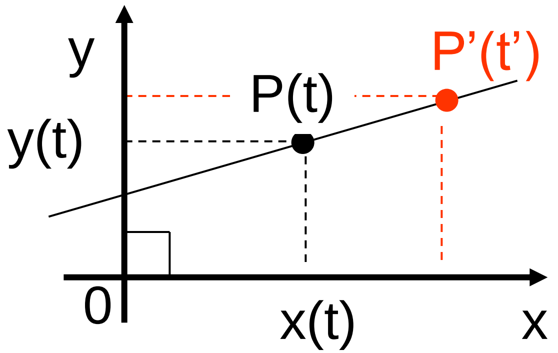
- estensione piccola rispetto al laboratorio
- struttura ininfluente ai fini del movimento
- es.
  - stella rispetto ad una galassia, pianeti rispetto al sistema solare
  - sasso rispetto alla terra/Aula_1_Via_S._Donato_19/2
  - molecola in un volume di gas (ad es. 1 litro)
  - etc.
- NB1 il p.m. è differente da (non è identico a) un punto geometrico
- NB2 il fatto che sia materiale (m) sarà rilevante poi nella dinamica

Meccanica 1a parte

Cinematica

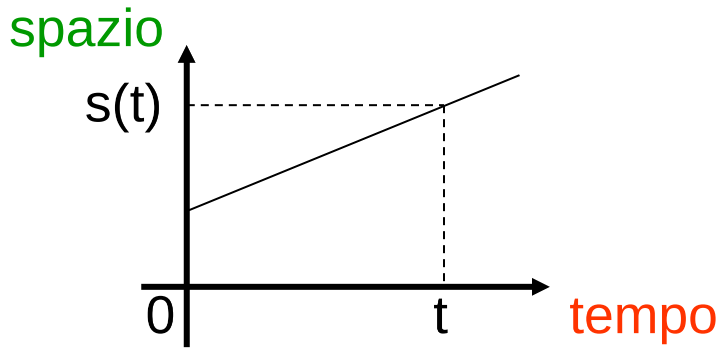
Sistemi di riferimento, eq. oraria

- il moto è relativo => sistema di riferimento



(P occupa varie posizioni nel piano/spazio [2d/3d] cartesiano al passare di t; 1 dimensione: x occupa varie posizioni lungo l'asse x al passare di t => x = x(t))

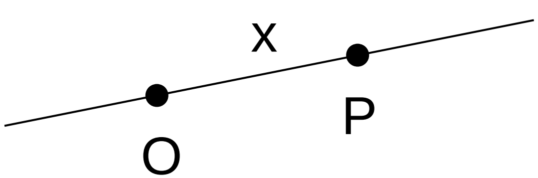
- spazio percorso nel tempo, eq. oraria

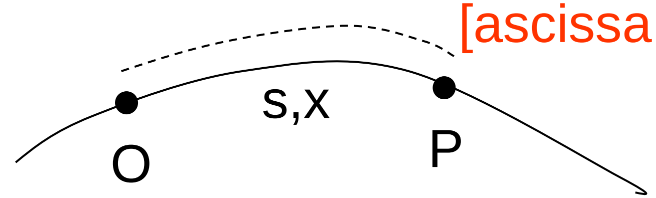


se ci interessa la distanza percorsa in un certo tempo indipendentemente dalla direzione

Moto in 1 dimensione

- in questo caso conta solo il verso +vo o -vo dello spostamento nel tempo => possiamo usare quantità scalari (non cambia la direzione)
- due possibilità: moto lungo una retta, x, o moto lungo una traiettoria (curva) fissata, s o x





- si definisce

$$\text{velocità media} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato a percorrerlo}}$$

$$\boxed{v_m = \frac{s}{t}} \quad \text{o} \quad \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{o} \quad \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$[\rightarrow \ \Delta t = \Delta x / v]$

(utile negli esercizi)

(ad es. il sistema tutor sull'A14, sull'A1 etc.)

Velocità

- la velocità istantanea è ($\Delta t \to 0$, uguale a $t_2 \to t_1$)

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{dx}{dt}}$$

in generale
$x = x(t)$
$v = v(t)$

- le dimensioni di v sono

$[v] = [s/t] = [st^{-1}] = [LT^{-1}]$

- l'unità di misura nel SI è m/s, nel CGS cm/s – altra unità usata è km/h etc. (eg $v_{US708\ o\ HVS2} \sim 1200$ km/s)

6 m/s = **?** cm/s; si moltiplica per **1** = 10^2 cm/m

$6(\cancel{m}/s)\cdot 10^2\ cm/\cancel{m} = 6\cdot 10^2\ cm/s$

se devo convertire un'unità a numeratore la metto a denominatore nel rapporto unitario etc.; NB $s^{-1} \to s^{-1}$

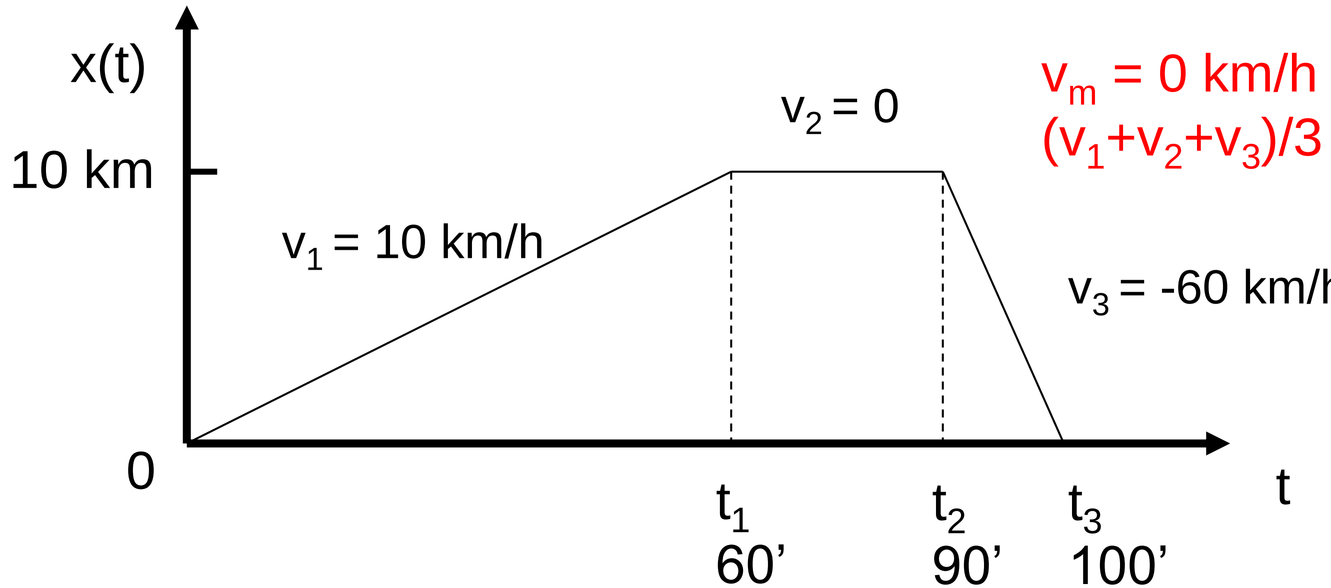
(ad es. ~ l'autovelox)

Velocità (2)

- $2.5\ m/s = ?\ km/h$: $\mathbf{1} = 1\ km/10^3\ m$ $\mathbf{1} = 3.6\ 10^3\ s/h$

$2.5\cancel{m}/\cancel{s} \cdot 3.6 \cdot 1\cancel{0}^3\ \cancel{s}/h \cdot 1/1\cancel{0}^3\ km/\cancel{m} = 2.5 \cdot 3.6\ km/h = 9.0\ km/h$

- **NB in generale: v. media ≠ media delle velocità** (<u>se</u> i Δt sono diversi), ad es.



$v_m = 0$ km/h ! $(x_3 = x_0)$
$(v_1+v_2+v_3)/3 = -17$ km/h

Velocità (3)

- $v_m = [x(t_3)-x(0)]/(t_3-0) = (0-0)$ km/100 min = 0
- $\underline{v} = (\Sigma_{i=1,3}\, v_i)/3 = (10+0-60)/3$ km/h = -17 km/h
- in formule (*)

$$v_m = (\Sigma_{i=1,n}\Delta x_i)/(\Sigma_{i=1,n}\Delta t_i) = (\Sigma_{i=1,n} v_i \Delta t_i)/(\Sigma_{i=1,n}\Delta t_i)$$

quindi <u>solo se</u> i Δt_i sono tutti = Δt, si ha

$\Sigma_{i=1,n}\Delta t_i = \Sigma_{i=1,n}\Delta t = n\,\Delta t$ e

$\Sigma_{i=1,n} v_i \Delta t = \Delta t \cdot \Sigma_{i=1,n} v_i$

$$\Rightarrow v_m = \Delta t \cdot (\Sigma_{i=1,n} v_i)/(n\Delta t) = (\Sigma_{i=1,n} v_i)/n = \underline{v}$$

- se si conoscono Δx_i, v_i => $\boxed{\Delta t_i = \Delta x_i / v_i}$ e si ha

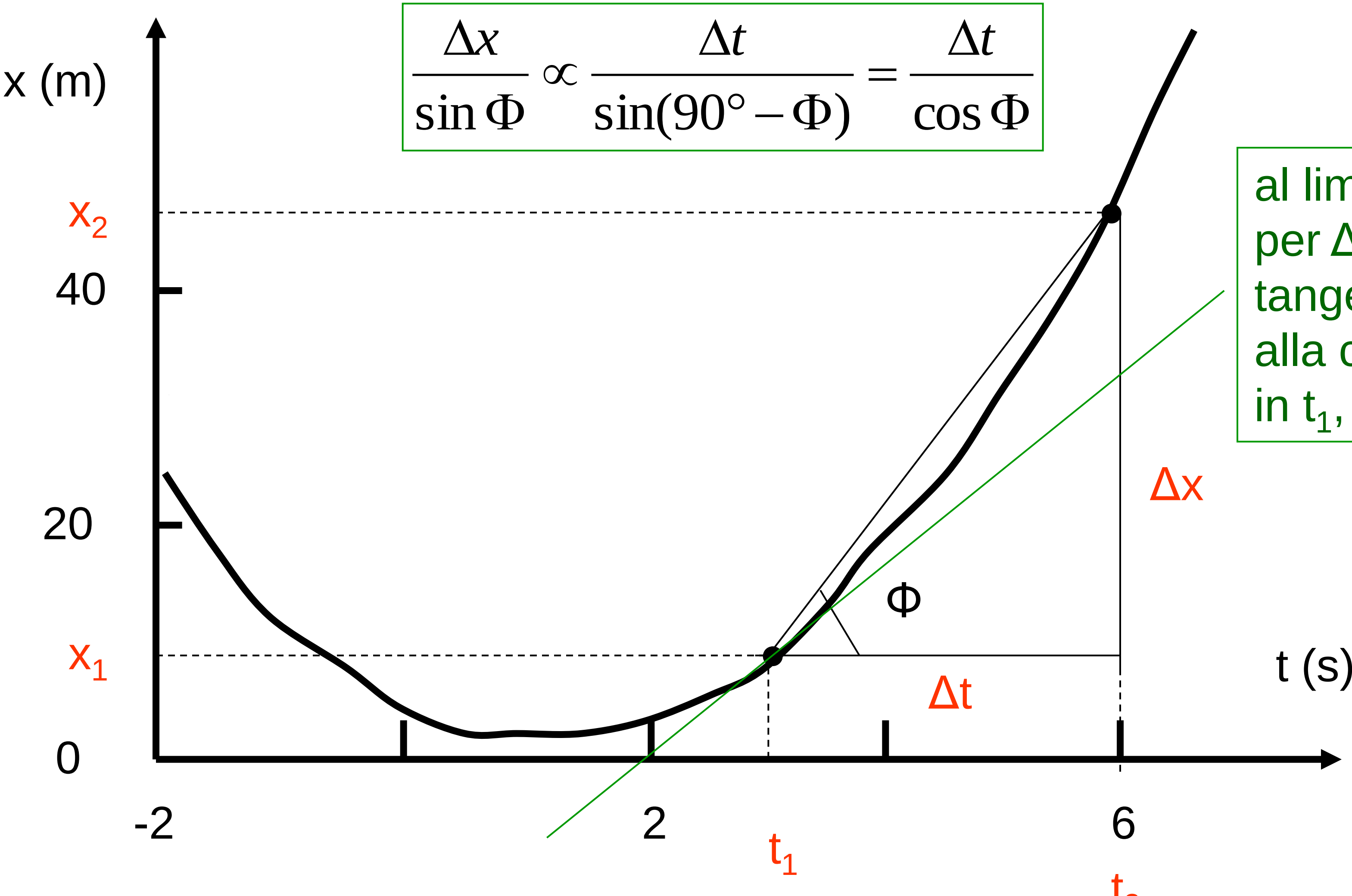
$$\boxed{v_m = (\Sigma_{i=1,n}\Delta x_i)/(\Sigma_{i=1,n}\Delta x_i / v_i)}$$

(formula utile per gli esercizi)

(*) dimostrazione facoltativa

Significato geometrico di v_m (corda) e di v istantanea (tangente alla eq. oraria)

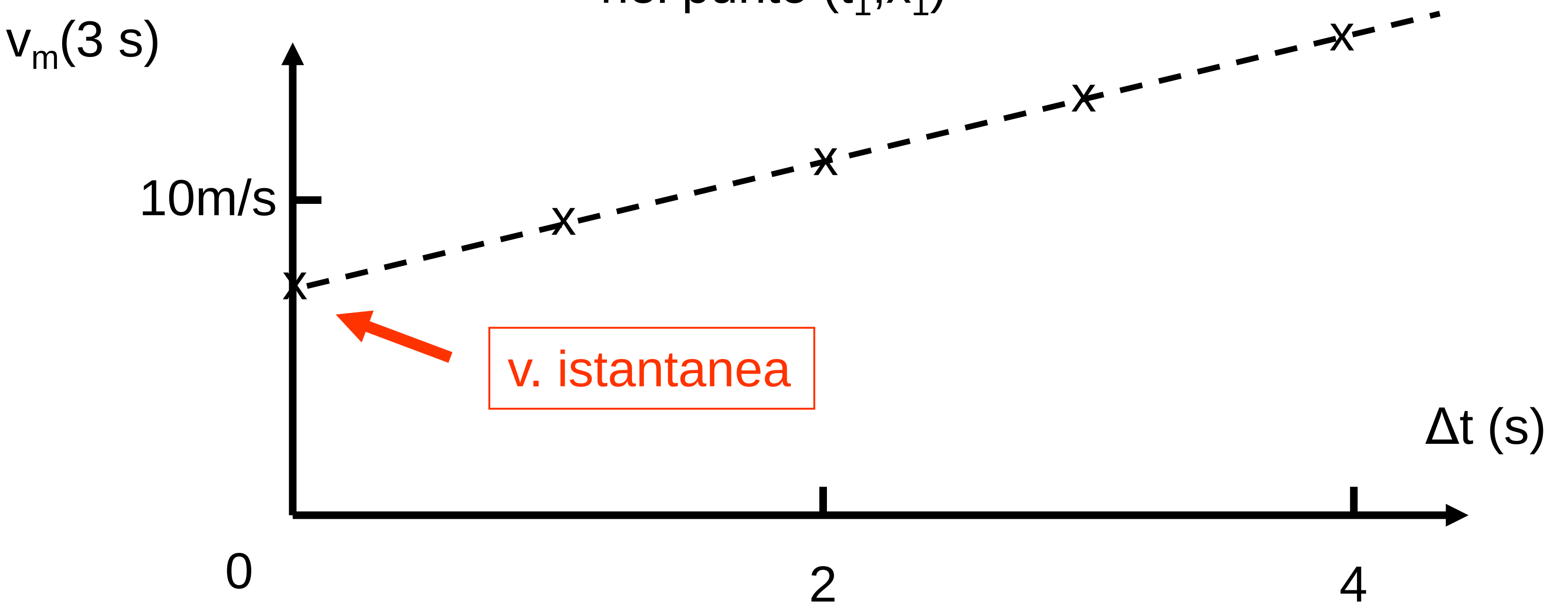
$$\frac{\Delta x}{\sin\Phi} \propto \frac{\Delta t}{\sin(90°-\Phi)} = \frac{\Delta t}{\cos\Phi}$$



al limite per $\Delta t \to 0$: tangente alla curva in t_1, x_1

Significato geometrico di v_m e di v istantanea (2) (*)

- data la curva $x = x(t)$ (lucido precedente)
  - $v_m = \Delta x/\Delta t \sim \text{tg}\,\Phi$ dà la direzione della corda tirata fra i punti (t_1,x_1) e (t_2,x_2)
  - $v(t_1) = dx/dt|_{t1}$ dà la direzione della tangente alla curva nel punto (t_1,x_1)



(*) facoltativa

Accelerazione media e istantanea

- in generale v = v(t), si definisce accelerazione media

$$\boxed{a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

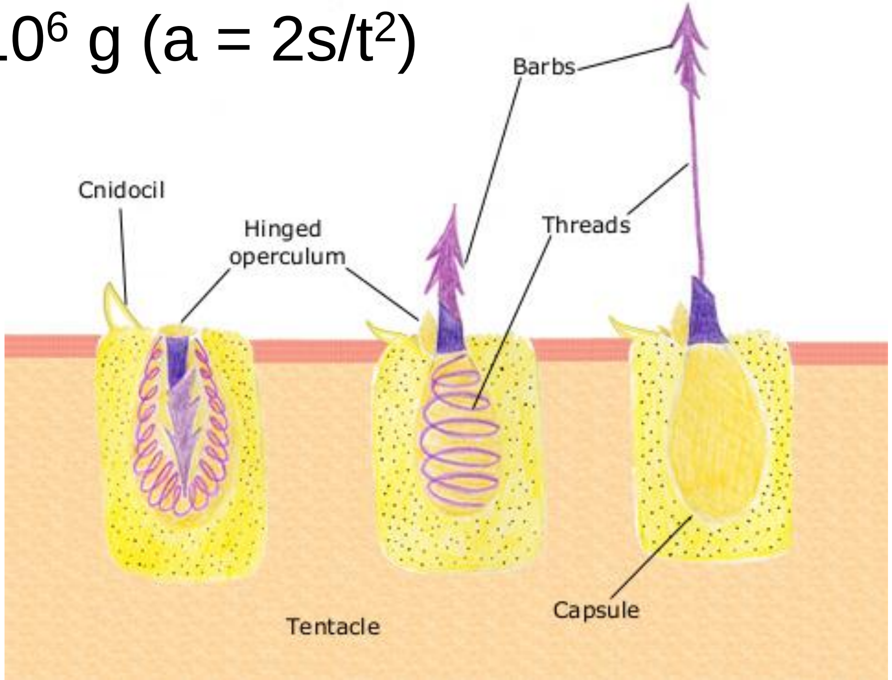
- e accelerazione istantanea

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

- $[a_m] = [a] = [v/t] = [st^{-1}t^{-1}] = [LT^{-2}]$
- unità SI: m/s^2 CGS: $cm/s^2 = 10^{-2}\ m/s^2$
- g (accelerazione di gravità) ≈ 9.81 m/s^2 = 981 cm/s^2

Un esempio di accelerazione

- L'esplosione dei pungiglioni del Portuguese Man O' War (una colonia di 4 specie di polipi, che dipendono gli uni dagli altri) dura appena 700 ns su 13 μm $\rightarrow$
  $a = 5\ 10^6$ g ($a = 2s/t^2$)



[per la formula $a = 2s/t^2$ vedi i lucidi successivi]

Moto uniforme e uniformemente accelerato

Casi particolari

- moto uniforme (rettilineo o su traiettoria fissa, potrei usare anche x)

  $v_m = v_0 = \text{cost} = \Delta s/\Delta t = (s-s_0)/(t-0)$ indipendente da t

  $\Rightarrow \boxed{s = v_0 t + s_0}$ (*) $s = s(t)$

  $a = 0$ infatti $a_m = (v_2-v_1)/(t_2-t_1) = (v_0-v_0)/(t_2-t_1) = 0$

- moto uniformemente accelerato

  $a_m = a_0 = \text{cost} = \Delta v/\Delta t = (v-v_0)/(t-0)$ indipendente da t

  $\Rightarrow \boxed{v = a_0 t + v_0}$ (*) $v = v(t)$

capita spesso! per es. $a_0=g$

(*) le cost. s_0 nella 1a eq. e v_0 nella 2a dipendono dalla scelta dell'origine dei t

Moto uniformemente accelerato (3)

v varia, *devo* usare una v intermedia, $(v_{iniz}+v_{fin})/2 = (v_0+v(t))/2$,
$s = \{[v_0 + v(t)]/2\}t + s_0$ e sostituisco $v(t) = a_0t + v_0$

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_0t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0t \\ a(t) = a_0 \end{cases}$$

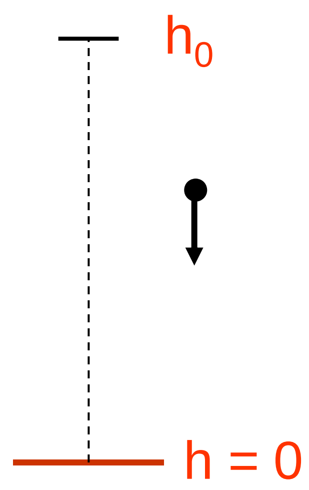
dove s_0,v_0 sono spazio percorso e velocità a t = 0. Se uso x per indicare lo spostamento in un moto rett. unif. acc. (o x anche per l'ascissa curvilinea), la prima eq. sarà

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_0t^2$$

[applicazione, ad es.: misura di g per antimateria atomica (esperimento GBAR, 2018) https://cds.cern.ch/record/1386684/files/SPSC-P-342.pdf p. 77, interviene anche il principio d'indeterminazione!].

Moto uniformemente accelerato (4)

Se considero la caduta di un grave che parte da fermo in assenza di attrito, chiamando h(t) l'altezza rispetto al suolo, ponendo cioè $h(0) = h_0$, poichè $a_0 = -g$ accelerazione di gravità in questo sistema di riferimento, ho



$$\begin{cases} h(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = -gt \\ a(t) = -g \end{cases}$$

e il grave raggiunge il suolo, h = 0, dopo un tempo

$t = \sqrt{2h_0/g}$ (da $0 = h_0 - \frac{1}{2} g t^2$)

$h_0 = 55.86$ m, $\theta = 3° \, 59.4' \rightarrow t = ?$ Δx alla base = ?

$t = 3.38$ s $\Delta x = 3.90$ m

Moti in una dimensione

– vario $a = a(t)$ (il più generale)

se $av > 0$ accelerato ($av < 0$ decelerato)

– uniforme $a = 0$; $v = \text{cost}$

– uniformemente accel. $a = \text{cost} = a_0$; $v = v(t)$

dalle 2 eq. per x(t) e v(t) si può eliminare il parametro t, per es. dalla 2ª(*),

$t = (v(t)-v_0)/a_0$

e sostituendo nella 1ª

$$x(t) = x_0 + v_0\underbrace{(v(t)-v_0)/a_0}_{t} + ½a_0\underbrace{[(v(t)-v_0)/a_0]^2}_{t^2}$$

(*) dimostrazione facoltativa, ma utile ginnastica

Una relazione molto importante per il moto unif. acc.

$$x(t) = x_0 + \cancel{v_0 v/a_0} - v_0^2/a_0 + ½(v^2 – \cancel{2vv_0} + v_0^2)/a_0$$

$$= x_0 - ½\, v_0^2/a_0 + ½\, v^2(t)/a_0 = x_0 + ½(v^2(t) - v_0^2)/a_0$$

che può essere riscritta

$$\boxed{2a_0(x(t) – x_0) = v^2(t) - v_0^2}$$

valida per **qualsiasi** moto uniformemente accel. – intervengono esplicitamente solo lo spazio, la velocità e l'accelerazione, per es. si ha

$$\Rightarrow \quad v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2a_0(x(t) – x_0)} \qquad \text{etc.}$$

Derivazione e integrazione

- se conosco x(t) ⇒ v(t) =dx(t)/dt; a(t) = dv(t)/dt
- però nei problemi di meccanica (e non solo) si conosce l'accelerazione a = F/m (vedi 2ª legge della dinamica, $\vec{F} = m\vec{a}$, più avanti)

⇒ bisogna seguire il cammino inverso ed integrare

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt; \qquad s(t) = \int_0^t v(t)dt$$

(questa operazione è stata fatta “di nascosto” nel ricavare le formule del moto uniformemente accelerato, vedi anche p. 23)

Qualche semplice regola

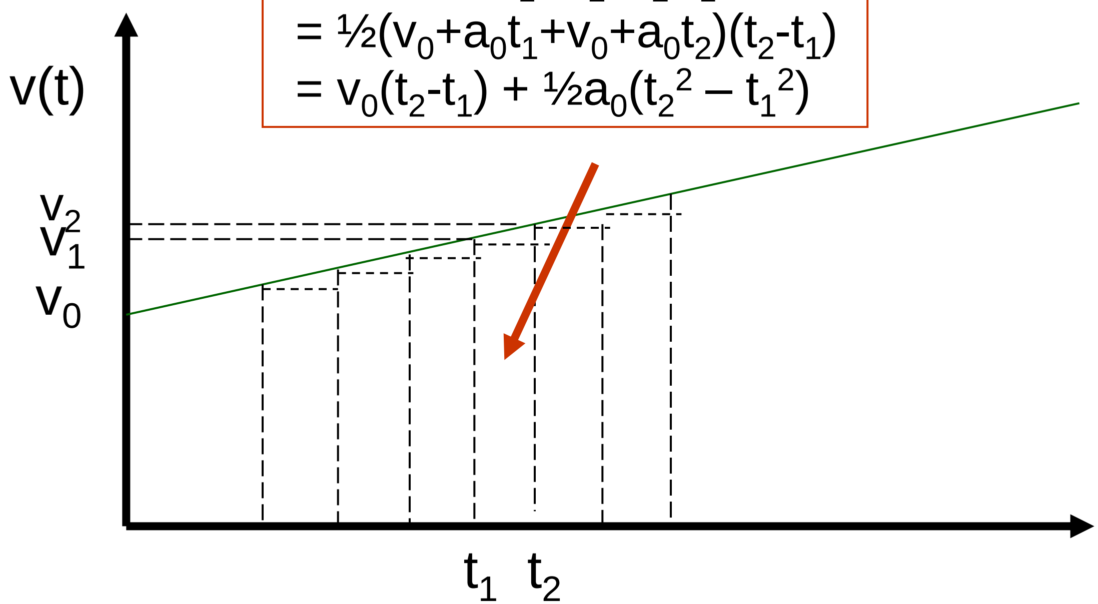
- la derivata di una costante è zero $(d/dt)cost = 0$
  (**ma anche $\Delta(cost) = cost - cost = 0$!**)
  ad es. $dv_0/dt = 0$, $ds_0/dt = 0$ etc.
- una costante può essere portata fuori dal segno di derivazione (e di integrazione)
  ad es. $d/dt(½a_0t^2) = ½a_0(d/dt)t^2 = a_0t$ etc.
- la derivata di t^1 è $(d/dt)t = 1t^0 = 1$
  ad es. $d(v_0 + a_0t)/dt = 0 + a_0$ etc.
- l'integrale di una costante è una retta di pendenza costante
  ad es. $v(t) = \int_0^t a_0 dt = a_0 \int_0^t dt = a_0[t]_0^t = a_0(t-0) = a_0t$
- l'integrale di t^1 è $t^2/2$ etc.

L’interpretazione geometrica dell’integrazione

- l’integrazione corrisponde al calcolo dell’area sotto la curva descritta dalla funzione – a rigore è la somma delle aree dei rettangoli $v_1(t_1)(t_2-t_1)$ quando $t_2 \to t_1$ o $\Delta t \to 0$

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}(v_1+v_2)(t_2-t_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(v_0+a_0t_1+v_0+a_0t_2)(t_2-t_1)$$
$$= v_0(t_2-t_1) + \tfrac{1}{2}a_0(t_2^2 - t_1^2)$$

$$\Delta t = \Delta v / a_0$$



nel nostro es., variazione lineare, l’ integrale può essere calcolato direttamente sommando l’area dei trapezi

Sommario cinematica ad 1 dimensione

- x(t) → v(t) → a(t) procedimento diretto

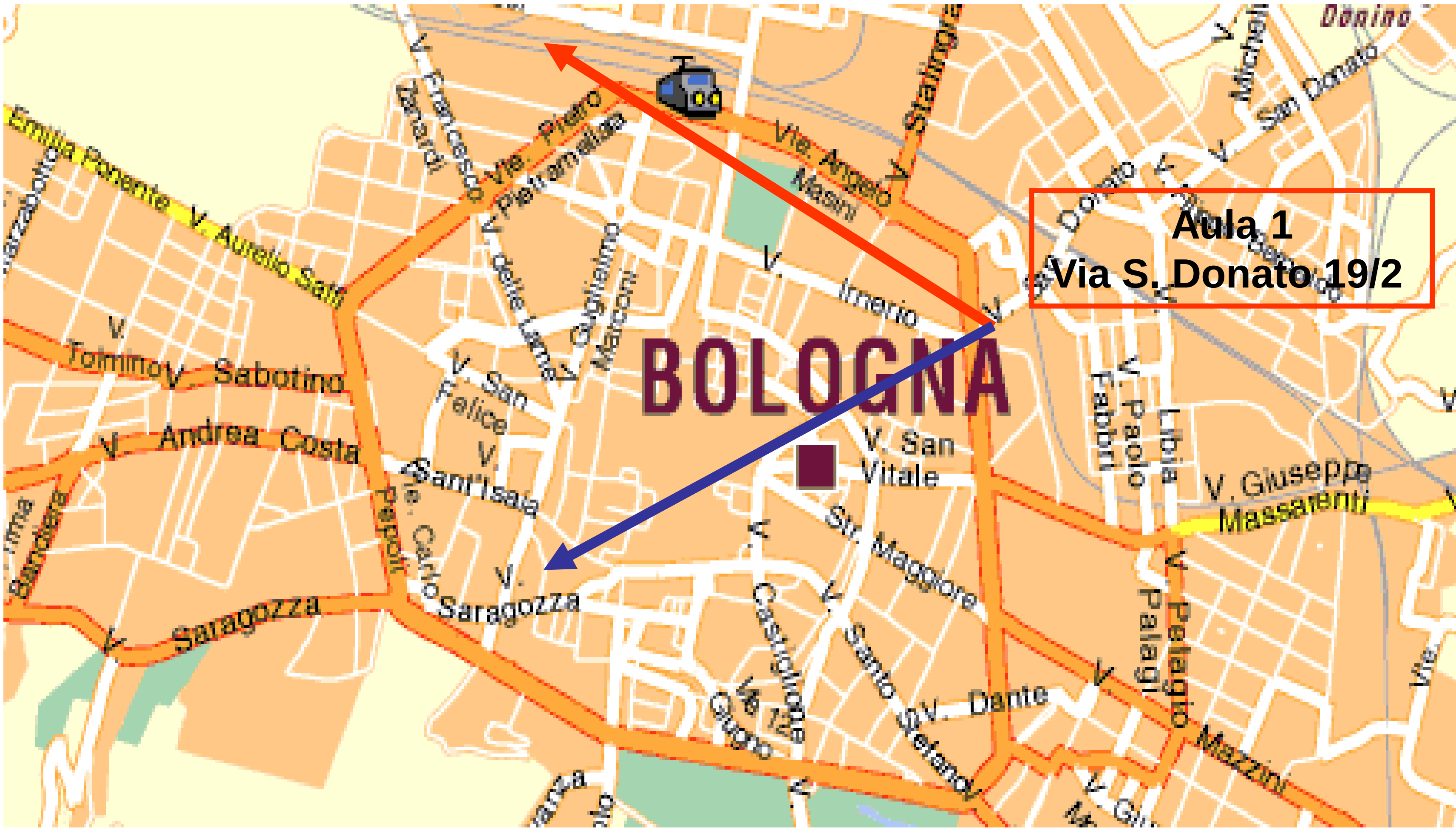
  derivazione derivazione

- a(t) → v(t) → x(t) procedimento inverso

  integrazione integrazione

- NB in dinamica si parte da $\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m$

Moto in 2 (3) dimensioni



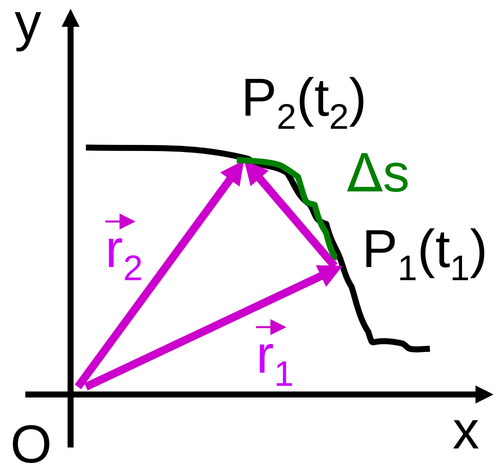
Velocità nel piano

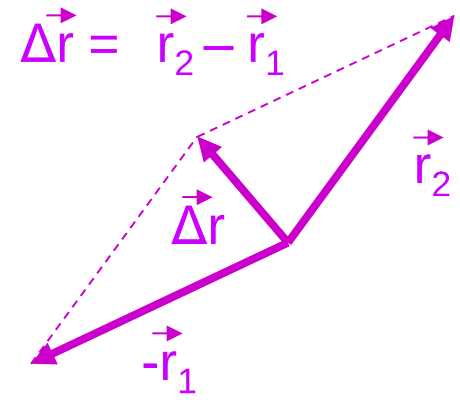
(spostamento)

$\vec{r}$ – raggio vettore

vettore velocità media:

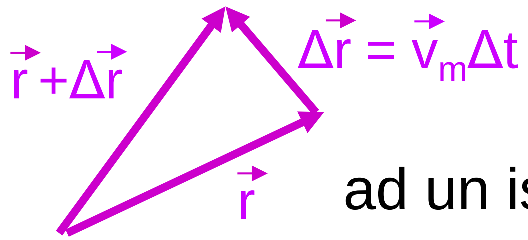
$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$





vettore velocità istantanea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



ad un istante generico t

il vettore velocità al limite per $\Delta t \to 0$ (ossia per $t_2 \to t_1$) risulta *sempre* tangente (proporz. a $\Delta\vec{r}$, Δt è scalare) alla traiettoria (nell'es. in P_1)

Accelerazione nel piano

- $\vec{a}$ nel piano è in generale sia tangenziale che centripeta ($\vec{v}$ in generale varia sia in modulo che in direzione e verso)
- accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

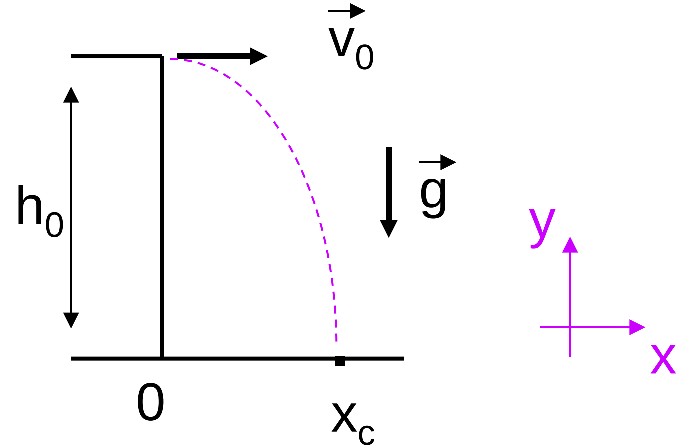
- accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

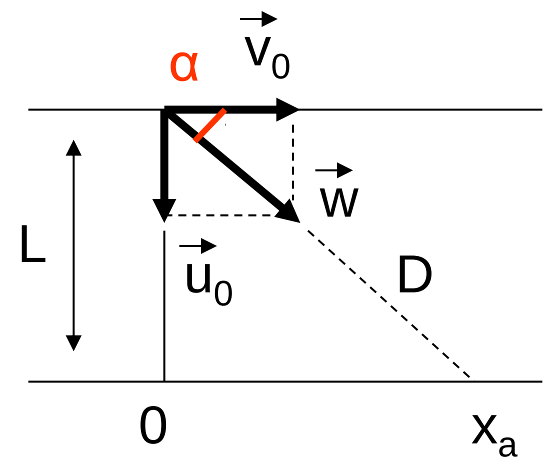
- NB nel moto rettilineo $\vec{v}$ varia solo in modulo e verso (v) => $\vec{a}$ risulta esclusivamente tangenziale (a)

Moti piani - composizione dei movimenti
(x, y sono indipendenti (⊥))

- v_0 = 6 m/s; h = 20 m; g = 9.81 m/s^2
  y_{caduta} = 0 m; x_{caduta} = ?
  $x = v_0 t$; $y = h_0 - ½\, gt^2$
  $\rightarrow t_c = \sqrt{2h_0/g} = 2.02$ s (lo stesso che cadendo da fermo)
  $\rightarrow x_c = v_0\sqrt{2h_0/g} = 6 \cdot 2.02 = 12.1$ m



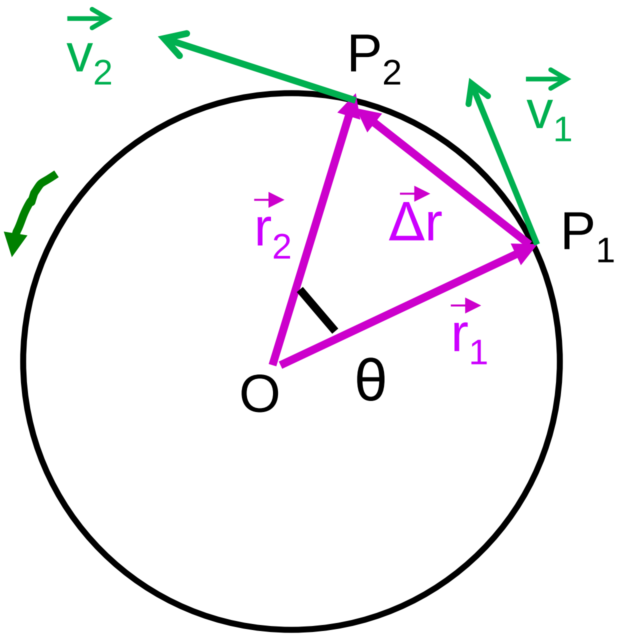
- barca (nuotatore) vs corrente
  o vespa (mosca) vs abitacolo
  attraversam.: $t_a = L/u_0 = D/w = x_a/v_0$
  (lo stesso che senza corrente ($v_0 = 0$))
  $w = \sqrt{v_0^2 + u_0^2}$ (velocità vista dalla riva (o ciglio della strada))
  $x_a = v_0 t_a = v_0 L/u_0$; $y_a = 0$
  $\alpha = \mathrm{arctg}(u_0/v_0)$



Moto circolare uniforme (e non)

un altro es. di moto piano (l'opposto del m. rettilineo)

- moto circolare: $r = |\mathbf{r}| = \text{cost}$ $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$
- uniforme/periodico: solo se $v = |\mathbf{v}| = \text{cost}$ $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$



Il periodo T è il tempo impiegato a fare un giro completo (r, v = cost)

$\boxed{T = 2\pi r/v = 1/\nu}$

(frequenza = periodo^{-1})

La velocità angolare $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ è l'angolo per unità di tempo

$\boxed{\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu}$ $(\omega = v/r)$

NB ω si misura in rad/s
ν si misura in s^{-1} o hertz (Hz)

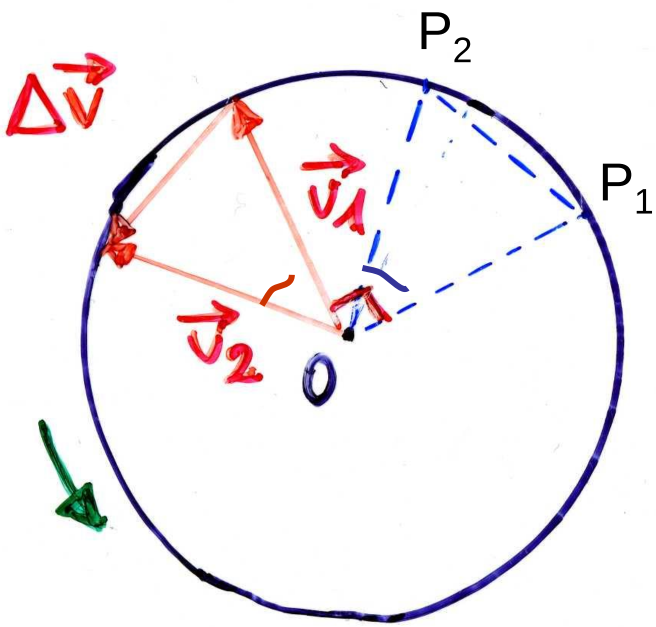
gli inglesi differenziano fra speed (v) e velocity ($\vec{v}$)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\boxed{v = r\omega} = r\, 2\pi\nu$$ (in modulo)

[dalla def. di T: v = 2πr/T = $\underbrace{(2\pi/T)}_{\omega}$r]

$$\boxed{\vec{v} \perp \vec{r}}$$



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} \text{ anti // } \vec{r}}$$

($\vec{a}$ è parallela a $\Delta\vec{v}$)

a = Δv/Δt = (v/r)Δr/Δ t
(Δv/v = Δr/r, triangoli simili)

Accelerazione centripeta

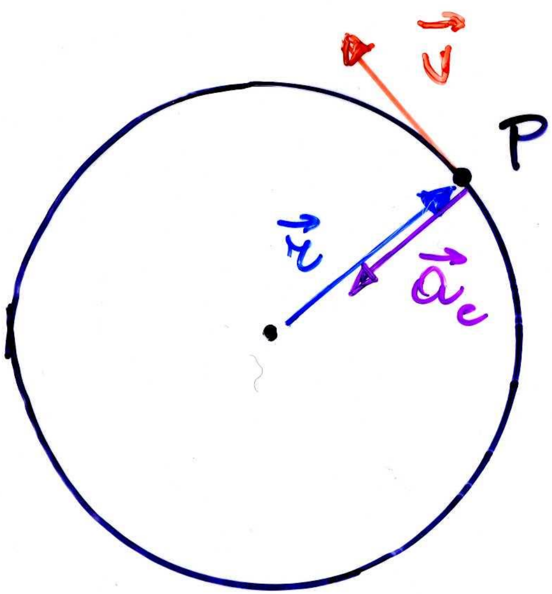
passando al limite si ha il modulo di a, l'indice c implica una a centripeta

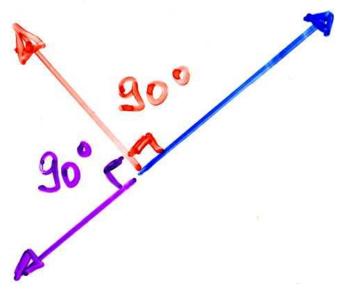
$$a = \frac{v}{r}v \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

(in modulo)

$\vec{a}_c$: direzione di $\vec{r}$, verso opposto

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$





$$a_c = \omega v$$

(l'acc. centripeta, $\vec{a}_c$, è diretta verso il centro della circonferenza; in generale, se la traiettoria non è circolare, verso il centro di curvatura della traiettoria)

se il m.c. non è uniforme ci sarà anche una $a_t = r\Delta\omega/\Delta t$

L'accelerazione nel moto circolare uniforme (*)

- nel piano abbiamo 2 eq. differenziali
  – $\vec{r}(t)$ ha componenti x(t) e y(t); $\vec{v}(t)$ ha componenti $v_x(t)$ e $v_y(t)$; $\vec{a}(t)$ ha componenti $a_x(t)$ e $a_y(t)$

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y(t)$$

- soluzione: ∀ funzione f(t) che derivata 2 volte dia $-\omega^2 f$ [<u>ad es.</u> $f(t) = x_0\cos(\omega t)$, $df/dt = -\omega x_0\sin(\omega t)$, $d^2f/dt^2 = d(df/dt)/dt = -\omega^2 x_0\cos(\omega t)$ con $x_0 = |\mathbf{r}|$ etc.] – ciascuna componente è armonica (v. dopo)

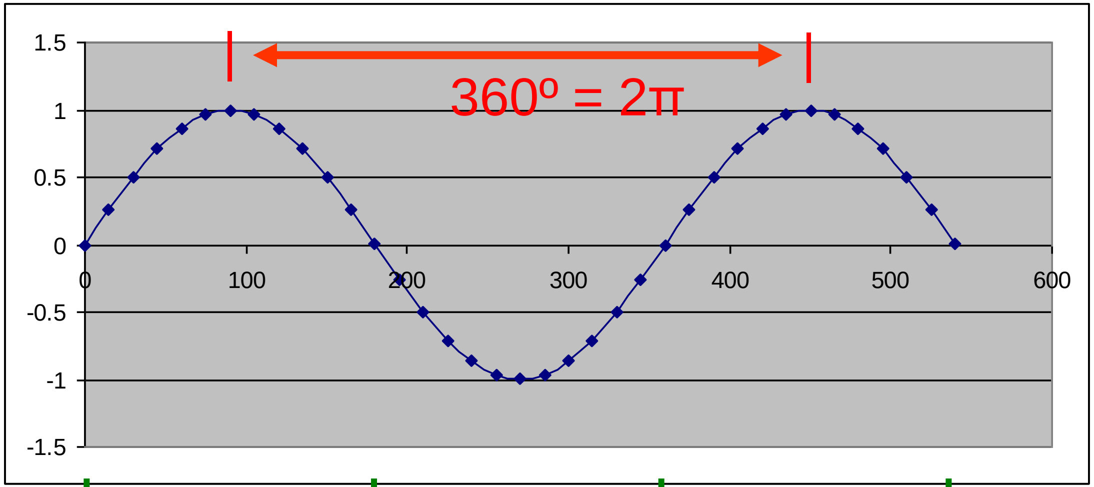
(*) facoltativo

Funzioni elementari periodiche(*)

ad es.

sinα

periodo (distanza fra massimi o fra minimi successivi) = 360° = 2π



α (°)

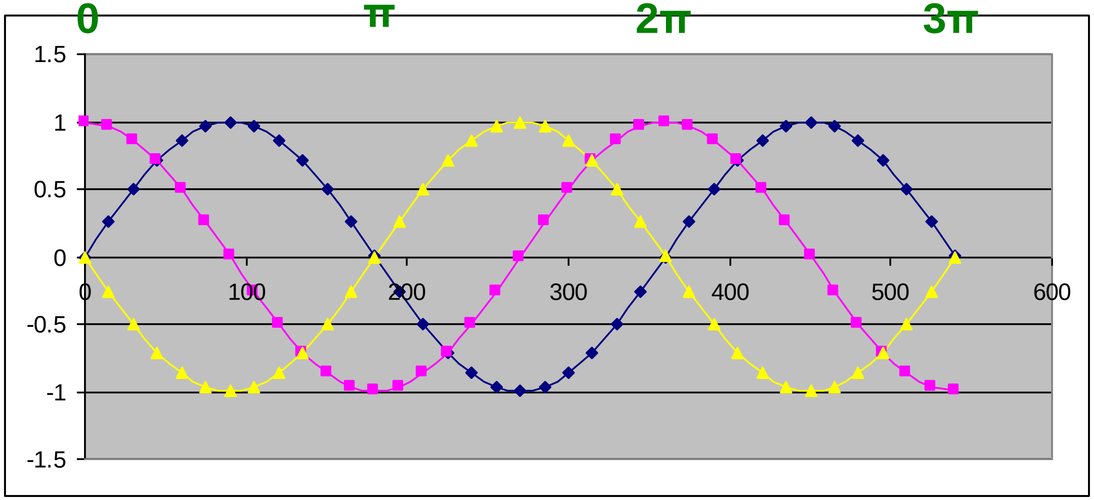
0 π 2π 3π α (rad)

sinα, la sua derivata 1ª, cosα, e la derivata 2ª, -sinα, hanno tutte uguale periodo

sinα

cosα

-sinα

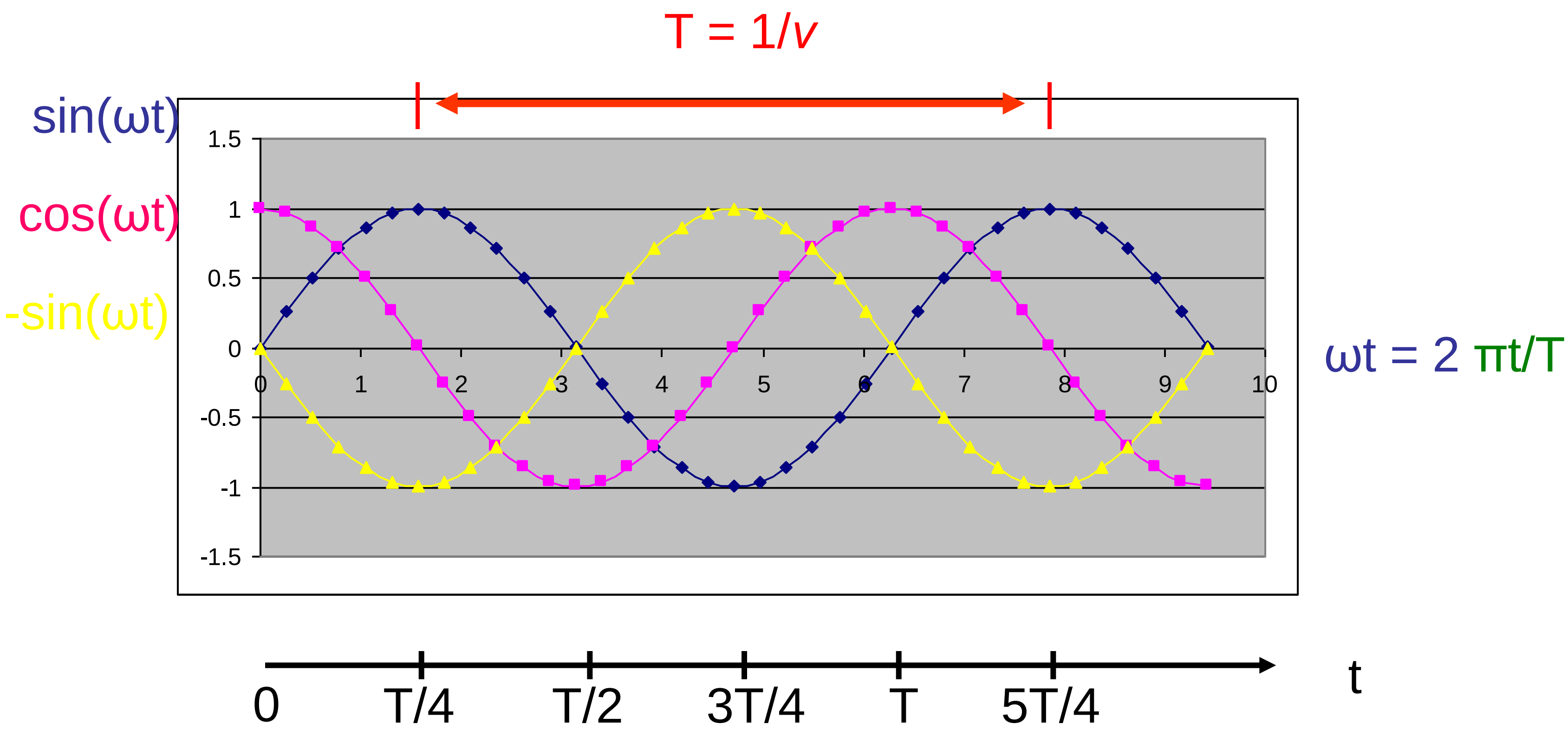


α (°)

(*) facoltativo

Funzioni elementari periodiche (2)(*)

$f(t) = \sin(\omega t) = \sin(2\pi t/T)$; $df(t)/dt = \omega\cos(2\pi t/T)$; $d^2f(t)/dt^2 = -\omega^2\sin(2\pi t/T)$



NB ω in rad/s, t in s, ωt in rad

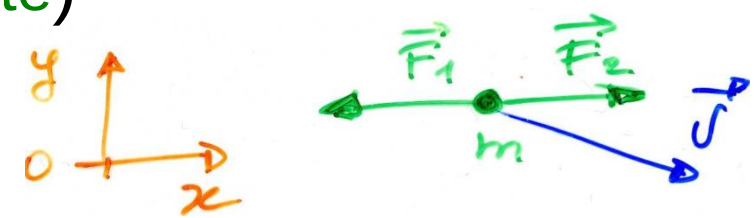
(*) facoltativo

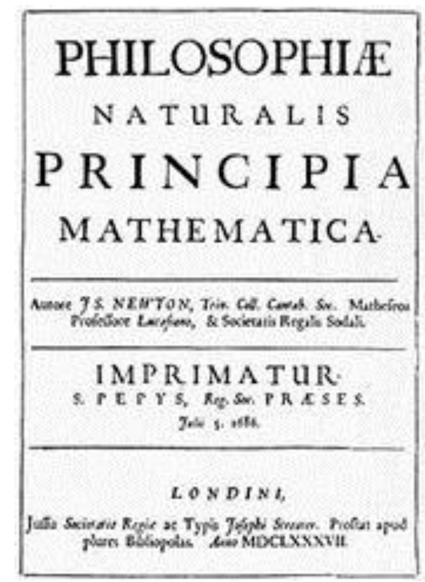
Meccanica 2a parte

Dinamica

Enunciati dei 3 principi della dinamica, p.m. (Newton)

1. Inerzia: se $\boxed{\Sigma_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{q} = m\vec{v} = \text{cost.}}$
   (Σ_i**F**$_i$ = risultante)



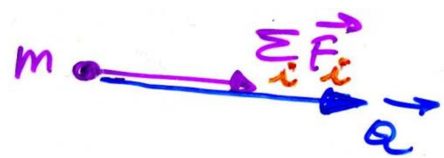

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

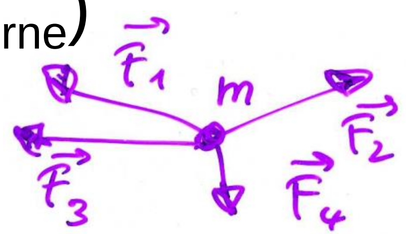
2. Se $\boxed{\Sigma_i \vec{F}_i \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \Sigma_i \vec{F}_i / m \quad (\vec{F} = m\vec{a})}$



3. Simmetria delle azioni: $\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$

Cause del moto: le forze

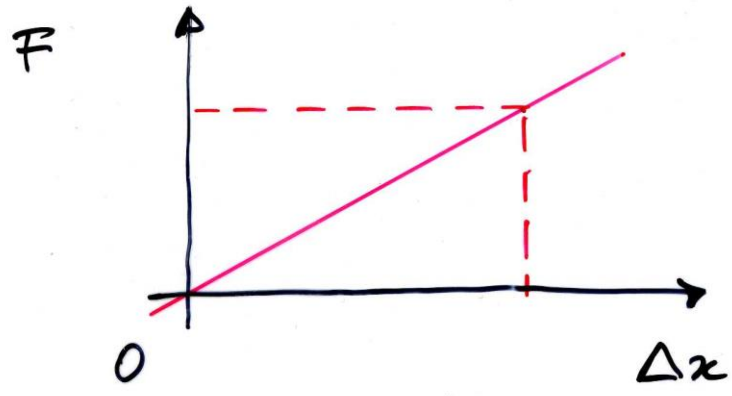
- per la modifica dello stato di quiete/moto di un corpo: occorre un'interazione con altri corpi (a contatto o a distanza) - l'interazione è necessaria per variare la $\vec{v}$ o la quantità di moto, $\vec{q} = m\vec{v}$, del corpo (II principio)
- in assenza d'interazione (forza) lo stato di quiete/moto (rettilineo uniforme) permane: principio d'inerzia (I principio)
- sistema inerziale (in cui vale il principio d'inerzia): per es. terna centrata sul sole, fissa rispetto alle stelle lontane – la terra è solo approx inerziale (rotazione)
- la risultante $\Sigma_i \vec{F}_i$ determina il moto del punto materiale (per oggetti estesi saranno solo le $\vec{F}_{esterne}$)



Forze: effetto dinamico ed effetto statico

- occorre una definizione operativa di forza, ossia dare il metodo di misura
- constatazione: tutti i gravi, se sono liberi di cadere, si sentono attratti dalla terra e cadono lungo la verticale verso il basso: sentono la forza peso o di gravità (effetto dinamico)
- altra constatazione: se lo stesso grave è vincolato ad una molla elicoidale non cade ma la deforma, la allunga (effetto statico)
- in generale, $\forall$ forza vincolata produce una qualche deformazione
- la molla (il dinamometro) può essere usata per misurare le forze previa calibrazione ed entro il limite di elasticità (limite dato dalla validità della legge di Hooke): una volta calibrata, la molla può essere usata per $\forall$ tipo di forze (elett., magn., etc.)
- la direzione del vettore forza è quella dell'asse della molla ed il verso è quello in cui si produce l'allungamento

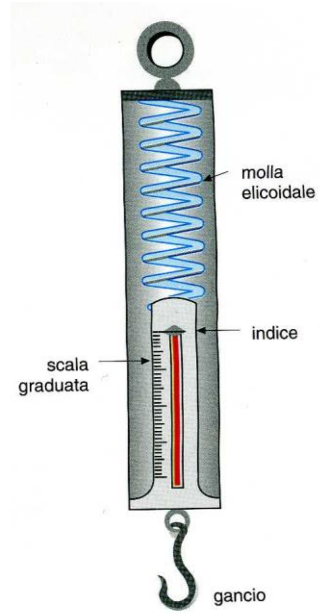
Dinamometro (molla) e misura statica delle forze

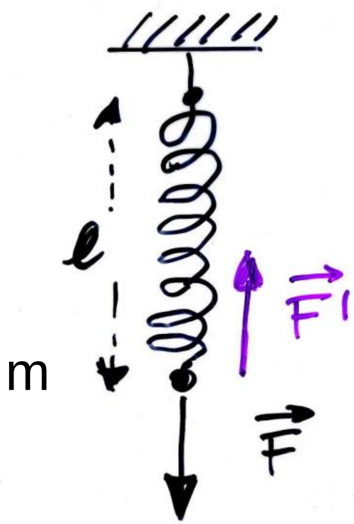


$\Delta x = l - l_0$

$$\boxed{F = k\,\Delta x}$$

costante delle molle





Legge di Hooke:
forza $\propto$ allungamento

ad es. il cilindretto di Fe portato a lezione (m = 44.83 g) produce una l = 26 cm sulla molla (l_0 = 19 cm): $\Delta x = l - l_0$ = 7 cm

⇒ $k \propto m/\Delta x$

(si può vedere usando altre coppie m', $\Delta x'$ ...)

Massa e II principio della dinamica

- avendo fissato una scala di forza, possiamo constatare che una forza produce un'accelerazione (effetto dinamico)
- in via di principio, posso applicare $\mathbf{F_1, F_2, F_3}$ ... etc. note e registrare le accelerazioni $\mathbf{a_1, a_2, a_3}$ ... etc. sul corpo o p.m.: i rapporti $F_1/a_1 = F_2/a_2 = F_3/a_3 = ... =$ cost. $= m$

  $\Rightarrow$ $F/a = m$ ossia $F = ma$

  $\Rightarrow$ $\vec{F} = m\vec{a}$ (II principio)

  con m massa (inerziale) del corpo
- $\vec{F}$ e $\vec{a}$ sono vettori e si combinano con la regola del parallelogramma – m non dipende dall'orientazione, scalare, nè dal tipo di forza (gravit., elast., elett., magn. ...), proprietà intrinseca del corpo o p.m.

II principio, dimensioni e unità della forza

il I principio si ottiene
per $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$

- dal II principio

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

scalare (inerzia)   {molla (f. elastica), peso, f. elettrica, f. magnetica}

- dimensioni della f.:

  $[F] = [ma] = [MLT^{-2}]$
- unità
  - SI: $1N = 1kg\cdot 1ms^{-2}$ (newton)
  - CGS: $1dyne$ (o dina) $= 1g\cdot 1cms^{-2} =$
    $= 10^{-3}kg\cdot 10^{-2}ms^{-2} = 10^{-5}N$
  - sist. ingegneri $1kgp = 1kg \cdot g = 1kg \cdot 9.81ms^{-2} = 9.81\ N$
  - $1N \approx$ forza peso esercitata da una mela (piccola, $m \approx 100g$)

q.d.m. e II principio

- def.: $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$ quantità di moto

  $[q] = [mv] = [MLT^{-1}]$; unità SI: kg m s^{-1}

$$\frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v} + m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$ variazione della qdm

$$\text{se } m = \text{cost} \quad \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = m\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

(se m = cost; $\Delta m = 0$; m può essere portata fuori dal limite)

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t} = m\vec{a} = \vec{F}$$

- $\boxed{\mathbf{F} = \Delta\mathbf{q}/\Delta t}$; $\rightarrow$ $\mathbf{F}\Delta t = \Delta\mathbf{q}$

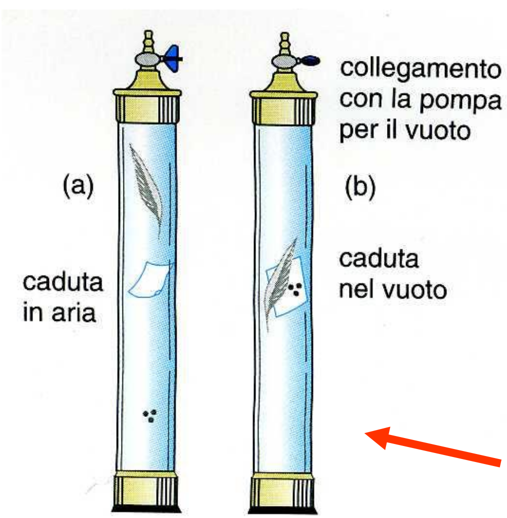
II principio, alternativamente

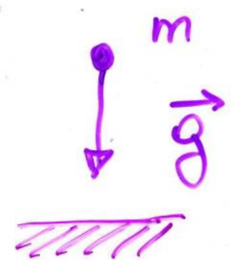
l'impulso di una f., $F\Delta t$, uguaglia la variazione della qdm del corpo su cui agisce (teorema dell'impulso) – utile nei problemi d'urto ($\Delta t \sim 0$)

Forza peso

attrito dell'aria
$F_1 = CAv^2$

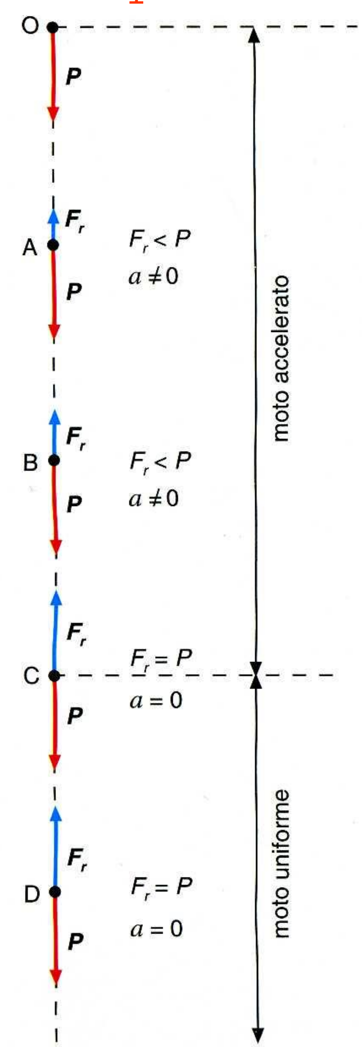
mg = **P** (per **P** si usa anche la notazione $\mathbf{F_g}$) accelerazione, forza dirette lungo la verticale verso il basso: **g** è costante per tutti i corpi vicino alla superficie della terra (e.g. piuma, foglio di carta, pallini di Pb), **P** è costante per un dato corpo





accelerazione
di gravità
(costante)

assenza di attrito (dell'aria): *tutti* i corpi cadono con la stessa accelerazione **g**



Peso ed equazione di moto

vicino alla superficie della terra
$g = 9.81\ m/s^2$

eq. di moto

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

ad es. sotto l'azione della forza peso $\vec{F}$

$$\cancel{m}\vec{a} = \cancel{m}\vec{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$(\vec{r}_0, \vec{v}_0$ iniz.$)$

asse +vo −vo verso il basso

$$a = \pm|\vec{g}|$$

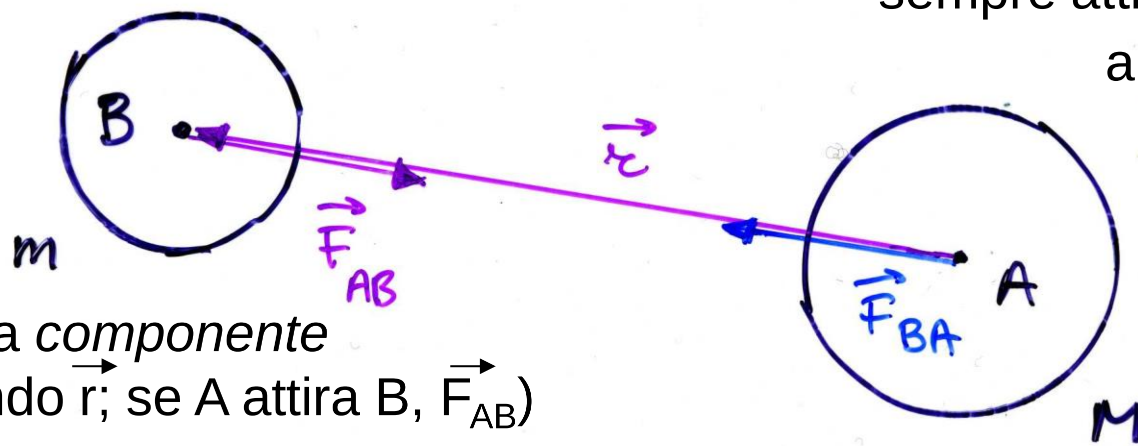
componente di $\vec{a}$ secondo la verticale

[g = 9.80665 m/s² a 0 m slm e 45° di lat. (varia dai poli all'eq.)]

Forza di attrazione gravitazionale (Newton)

corpi puntiformi (o sferici)

la forza gravitazionale è sempre attrattiva, cioè è antiparallela a $\vec{r}$, $\vec{F}_g \propto$ vettore unitario $-\vec{r}/r$ diretto in verso opposto a $\vec{r}$



(F_g indica la *componente* di $\vec{F}_g$ secondo $\vec{r}$; se A attira B, $\vec{F}_{AB}$)

$$\boxed{F_g = -G\frac{Mm}{r^2}}$$

$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \qquad (*)$$

Legge di gravitazione universale -> unificazione caduta dei gravi, moto dei pianeti

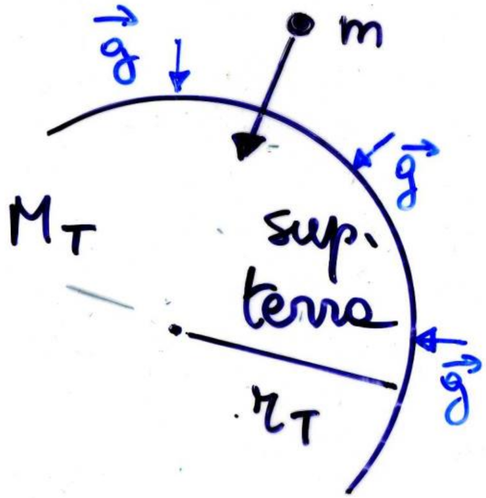
valore attuale $G = (6.6738 \pm 0.0008) \times 10^{-11}\ kg^{-1}\, m^3\, s^{-2}$

esperienza di Cavendish

(*) $(1/r^2)\cdot\vec{r}/r = \vec{r}/r^3$!

Forza di attrazione gravitazionale (2) e peso

$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ (III principio)



esperienza in lab. (Cavendish)(*)

$$F_g = \left(G \frac{M_T}{r_T^2}\right) m = g\,m = P$$

$M_T = 5.97 \times 10^{24}$ Kg — si ricava

$r_T = 6.37 \times 10^{6}$ m — si misura, astron.

$g = 9.81$ m/s^2 — si misura, caduta

$\rightarrow M_T = g\, r_T^2/G$

(*) con m, M, r e F, tutte misurate $\rightarrow$ G

Gravitazione universale: applicazioni

- Un satellite TV deve essere fisso rispetto alla parabola a terra. Che altezza (h) deve avere?

- T = 1 giorno siderale = 86164 s (orbita geostazionaria)
$\omega = 2\pi/T = 7{,}292\ 10^{-5}$ rad/s
$a_c = \omega^2 r$ ma è anche $GM_T m/r^2 = ma_c$
$\rightarrow\ GM_T = \omega^2 r^3$ (3^a legge di Keplero)
$r = \sqrt[3]{GM_T/\omega^2} = 4.216\ 10^7$ m
$h = r - r_T = 35.79\ 10^6$ m all'equatore, che corrisponde alla cintura di Clarke (quello che ha avuto l'idea), 1945

- T_{Luna} = ? sapendo che $R = 3.844\ 10^8$ m (distanza$_m$ TL)
a_c della luna $= g(r_T/R)^2 = 2.700\ 10^{-3}\ ms^{-2}$
ma è anche $a_c = (2\pi/T)^2 R$
$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{R/a_c} = 27.4$ giorni

Leggi di Keplero ($F \sim 1/r^2$)

es. sistema S/Pianeti

(anche atomo di Rutherford –Bohr, p/e^-, $F=1/(4\pi\varepsilon_0)e^2/r^2$):

1. orbite dei P ellittiche, con S in un fuoco
2. il raggio vettore r_{SP} spazza Aree uguali in t uguali
3. $GM_S = \omega^2 r^3 \propto r^3/T^2 \quad \rightarrow$ $M_S = \omega^2 r^3/G$

   $\sim 2 \cdot 10^{30}$ kg

   ($r=1.5 \cdot 10^{11}$ m, T=1a)

   per orbite circolari

Sintesi dell’unificazione delle forze

- Gravi cadono al suolo (Galilei)
- Luna orbita la terra (Keplero)
- Pianeti orbitano il sole (“)

Forza di gravità (Newton ~1687)

- Elettricità
- Magnetismo
- Ottica

Elettromagnetismo (Faraday, Maxwell ~1860) (*)

- Forza nucleare debole ~1970-80
- Forza nucleare forte ~1990

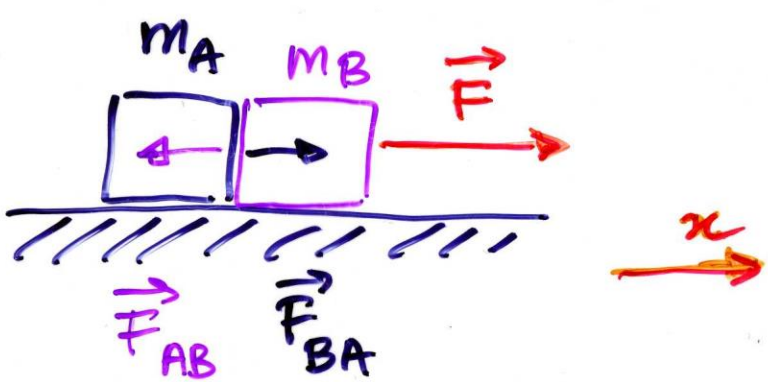
(*) vedi cap. e.m.

III principio e forze di contatto (*)

dati i corpi A e B che interagiscono, per il III principio si ha $\mathbf{F}_{AB} = -\,\mathbf{F}_{BA}$

III principio $\qquad \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

- ad es. forze di contatto (oggetti estesi)



$$m = m_A + m_B$$

(*) facoltativo

III principio e forze di contatto (2) (*)

applichiamo separatamente il II principio ad A, B e A+B per trovare la forza di contatto $\mathbf{F}_{AB}$ ($\mathbf{F}_{BA}$)

componente x

$$A+B: \quad m\vec{a} = \vec{F} \qquad\qquad ma = F$$

$$A: \quad m_A\vec{a} = \vec{F}_{BA} \qquad\qquad m_A a = F_{BA}$$

$$B: \quad m_B\vec{a} = \vec{F}_{AB} + \vec{F} \qquad\qquad m_B a = F - F_{AB}$$

$$\Sigma \quad (m_A+m_B)\vec{a} = \vec{F} \qquad\qquad (m_A+m_B)a = F$$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F} + \vec{F}\frac{m_B}{m_A+m_B} = -\vec{F}\frac{m_A}{m_A+m_B}$$

NB F_{AB} cresce con F: un vincolo ideale è quindi in grado di sostenere una F ∀, non così un vincolo 'reale' (carico di rottura, vedi più avanti, elasticità)

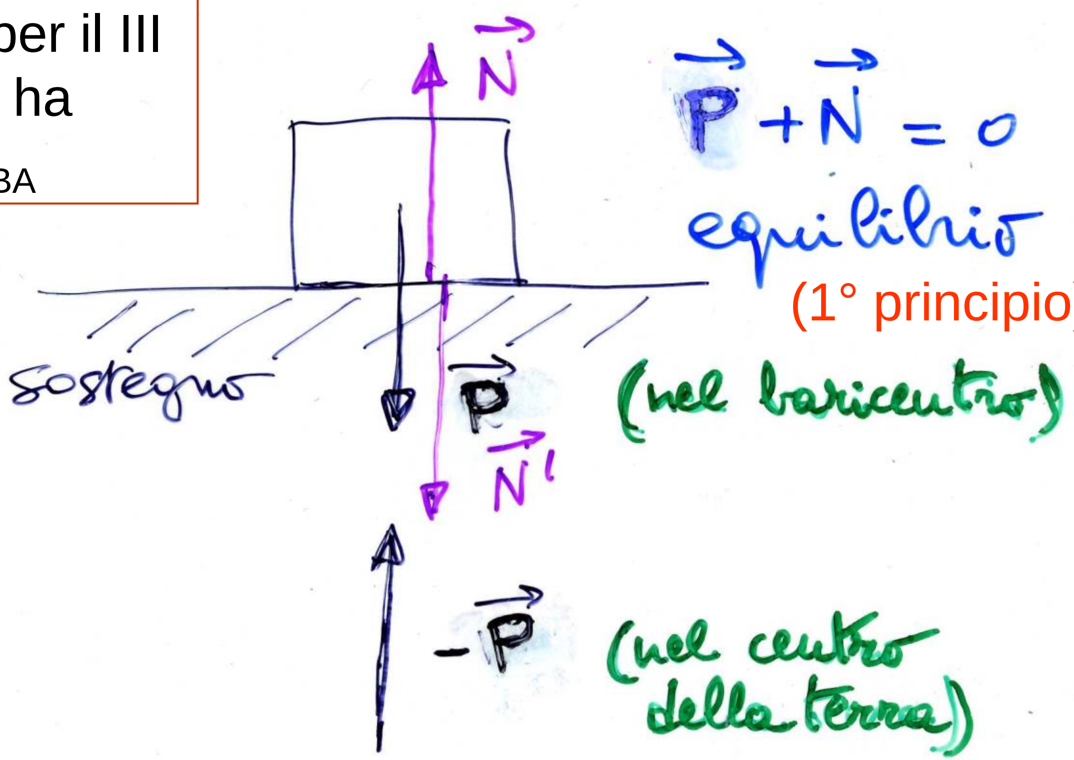
(*) facoltativo

III principio e forze di contatto/vincoli (3)

dati i corpi A e B che interagiscono, per il III principio si ha
$\mathbf{F}_{AB} = - \mathbf{F}_{BA}$

le coppie di forze del III principio sono applicate a *corpi diversi*
P + (-**P**) =0
N + **N'** = 0

la spinta **N'** sul sostegno è dovuta a **P** e lo uguaglia
=> **P** + **N** = 0



(1° principio)

(forza cui è sottoposta la terra!)

un vincolo ideale può equilibrare
∀ **P**, un vincolo reale no

(→ non appoggiate mai un elefante su una scrivania)

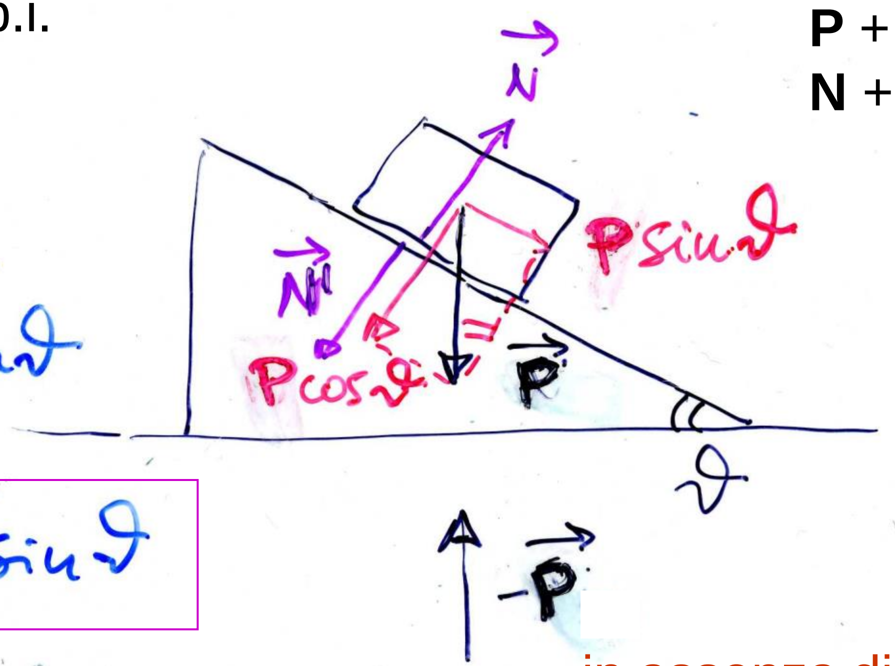
III principio e forze di contatto (4)

piano inclinato: scompongo **P**
// (Psinθ) e ⊥ (Pcosθ) al p.i.

$$P\cos\vartheta = N$$

$$\cancel{m}a = P\sin\vartheta = \cancel{m}g\sin\vartheta$$

III principio:
P + (-**P**) = 0
N + **N'** = 0



eq. di moto
in assenza ⇒
di attrito

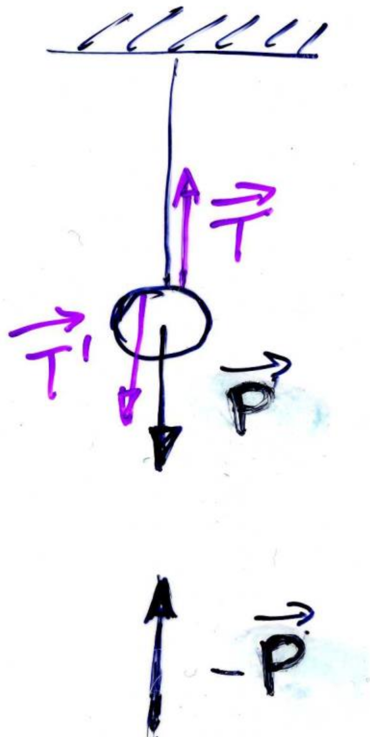
$$\boxed{a = g\sin\vartheta}$$

la componente Pcosθ
è equilibrata dalla
reazione vincolare N
(non c'è moto ⊥ al p.i.)

in assenza di attrito non
vi può essere equilibrio:
la componente Psinθ
non è equilibrata

III principio e forze di contatto (5)

III principio:
P + (-**P**) = 0
T + **T'** = 0



fune, filo (NB di massa trascurabile)

T' tensione della fune, del filo
(**T** agisce sulla sfera di massa m)

$\vec{P} + \vec{T} = 0$

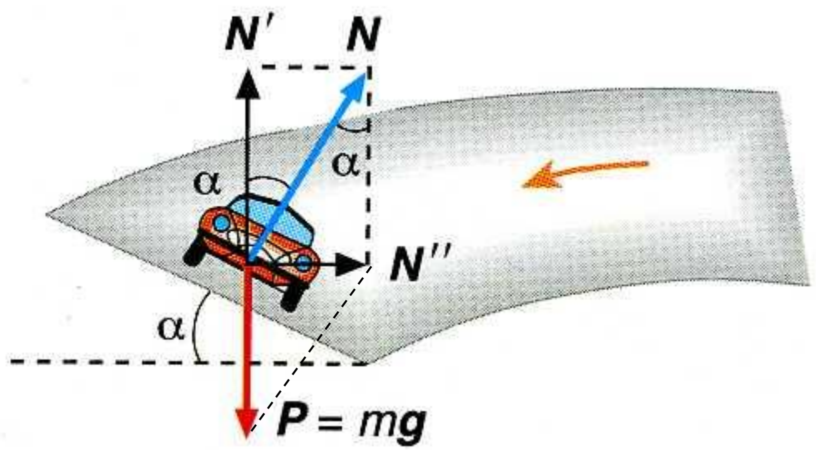
equilibrio (1° principio)

(forza cui è sottoposta la terra!)

un filo (fune) ideale può sostenere ∀ **P**, un filo (fune) reale sosterrà un carico max, oltre si spezza

III principio e moti curvilinei(**)

- consideriamo un moto curvilineo (variazione di **v** in direzione e verso) assumendo trascurabile l'attrito
- la forza centripeta deve(*) essere quindi fornita dalla reazione della curva sopraelevata di raggio R



$F_c = mv^2/R = N'' = N\sin\alpha =$

$= N'\mathrm{tg}\alpha = P\mathrm{tg}\alpha$

$\Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = v^2/(Rg)$

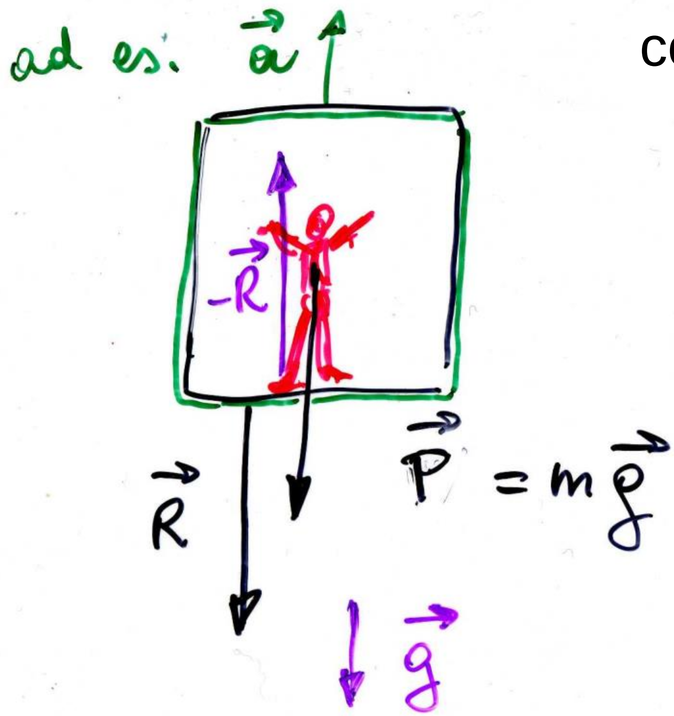
ad es. $\left.\begin{array}{r} v = 50\ \mathrm{m/s} \\ R = 250\ \mathrm{m} \end{array}\right\}$ $\mathrm{tg}\alpha \sim 2500/(250\cdot 10) \sim 1;\ \alpha \sim 45^o$

(*) si impone che il vettore **F**$_c$ = **N** + **P** sia orizzontale

(**) facoltativo

Peso e peso apparente(*)

il peso di una persona può essere definito come la forza esercitata sul pavimento



Ascensore accelerato ($\vec{a}$)

tipico sistema *non* inerziale se **a** ≠ 0

$\vec{R}$ – sul pavimento

$-\vec{R}$ – sulle persone

$m\vec{a} = \vec{P} - \vec{R}$ eq. di moto

(*) facoltativo

Peso e peso apparente (2)(*)

$$\Rightarrow \quad \vec{R} = \vec{P} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

se $\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{cost} \qquad \vec{R} = \vec{P} = m\vec{g}$

" $\vec{a}$ verso l'alto $\qquad R = m(g+a) > P$

" " verso il basso $\qquad R = m(g-a) < P$

- quindi il peso apparente sarà inferiore (superiore) a quello reale se l'ascensore accelera verso il basso (alto)
- NB si noti che mentre *m è costante*, ***P*** *può variare*, per es. andando in montagna, in orbita o all'equatore si diminuisce di peso! (al polo si aumenta)

(*) facoltativo

Sistemi isolati e conservazione q.d.m.

- isolati: sistemi di 2 o più corpi che si scambiano forze, interne, che a 2 a 2 si elidono (risultante nulla)
- es. corpi 1 e 2 su piano orizzontale senza attrito

su 1 agisce $\mathbf{F}_2$ (dovuta a 2)

su 2 agisce $\mathbf{F}_1$ (dovuta a 1)

$\mathbf{F}_1 = \Delta\mathbf{q}_2/\Delta t$; $\mathbf{F}_2 = \Delta\mathbf{q}_1/\Delta t$

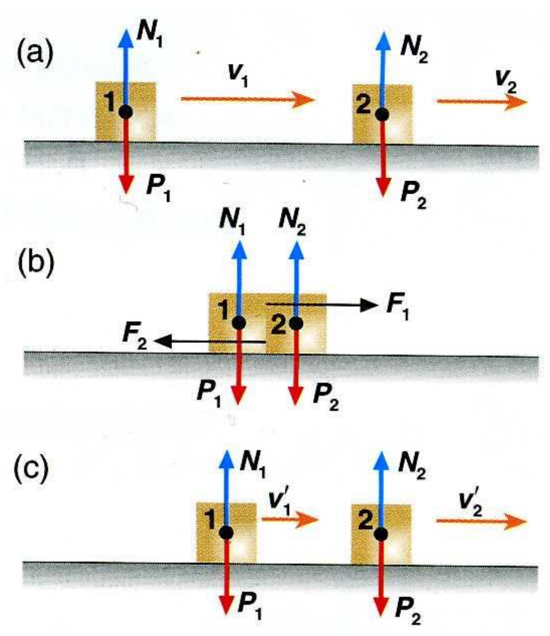
ma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$

=> $\Delta\mathbf{q}_1/\Delta t + \Delta\mathbf{q}_2/\Delta t = 0$

ossia $\Delta\mathbf{q}_1 + \Delta\mathbf{q}_2 = \Delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = 0$

la variazione della q.d.m. totale è nulla, da cui ricavo

$\boxed{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \text{cost}}$



urto fra due corpi

Conservazione q.d.m. (2)

- se $\mathbf{q}_i$ e $\mathbf{q}_i$' indicano le q.d.m. prima e dopo l'urto, avrò

  $$\boxed{\mathbf{q}_1' + \mathbf{q}_2' = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}$$

  $$m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

  conservazione della q.d.m.: l'interazione fra due corpi non modifica la q.d.m - oppure – per un sistema isolato (soggetto a risultante nulla) la q.d.m. si conserva

- es. locomozione di celenterati, motori termici a getto, la q.d.m. iniziale è uguale zero

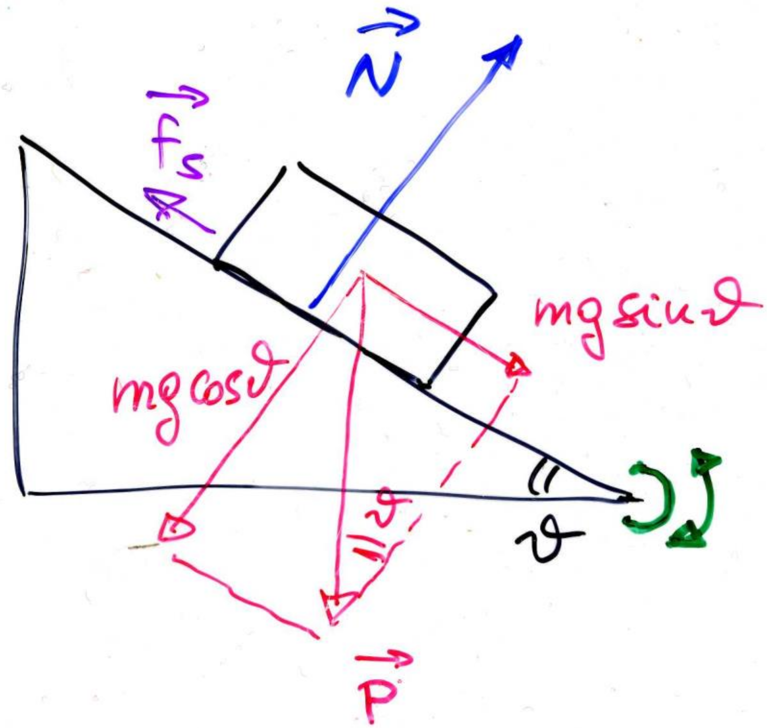
  => $m_a\mathbf{v_a} + m_c\mathbf{v_c} = 0$

  da cui

  $\mathbf{v_c} = -(m_a/m_c)\mathbf{v_a}$

Attrito statico: dimostrazione

- si può usare un piano inclinato, ad inclinazione variabile: la forza peso è scomponibile parallelamente ($P\sin\theta$) ed ortogonalmente al piano ($P\cos\theta$); solo la componente normale è equilibrata dalla reazione vincolare; basta quindi far crescere l'angolo θ per aumentare la forza motrice e, per un certo angolo critico, θ_c, il blocco comincerà a muoversi, non appena $mg\sin\theta$ supera la forza di attrito $f_{s,max}$



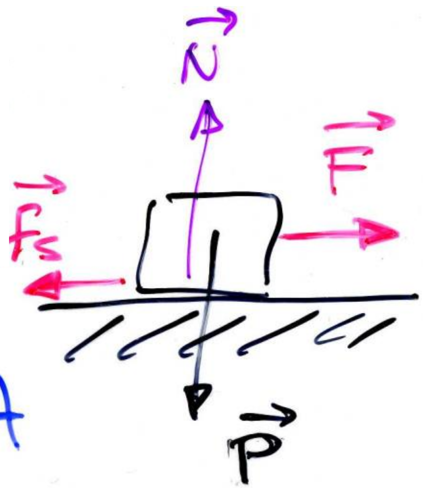
anche un PC portatile può servire per la dimostrazione

NB se $\theta < \theta_c$, $P\sin\theta$ è equilibrato da una f_s uguale e contraria (il corpo rimane in equil.)

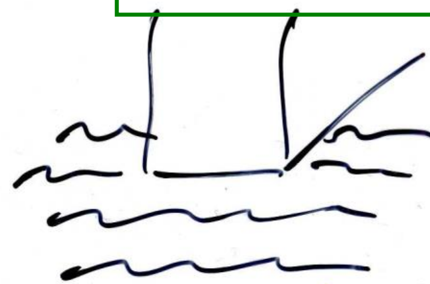
Forza d’attrito, leggi dell’attrito statico

- consideriamo ora un corpo appoggiato su una superficie reale, se applicassi una forza in assenza di attrito il corpo dovrebbe comunque accelerare, invece non si muove finchè $F \le \mu_s N$

attrito statico
(impedisce
l’inizio del moto)



1) l’a.s. non dipende dall’area A di contatto



superfici ruvide

A microscopica << A contatto

$\forall A$

2) l’a.s. cresce fino ad un valore max

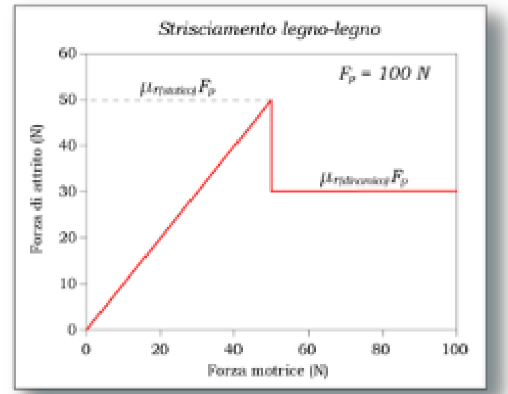
$$f_{s,max} = \mu_s N$$

$$(f_s \le \mu_s N)$$

Attrito (2)

- una volta superata la $f_{s,max}$ il corpo è accelerato da una forza $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{f}_c$ ed acquisterà una $\vec{v}$:

  $F' = F - f_c$ (dove f_c è un po' inferiore a $f_{s,max}$)



$\vec{f}_c$ dipende da $\vec{v}/|\vec{v}|$ (direz.) non da v (modulo) [*]

attrito cinetico o dinamico
(agisce durante il moto)

$$f_c = \mu_c N \qquad \mu_c < \mu_s$$

legno - legno ~ 0.3
metallo - metallo ~ 0.4
superfici lubrificate $\mu_c \approx 0.05$

in prima approssimazione (per es. negli esercizi) si può non distinguere fra f_c e $f_{s,max}$, quindi $\mu_c = \mu_s = \mu$

[*] 3a legge dell'attrito

Misura del coefficiente d'attrito statico

con riferimento al piano inclinato di p. 66 e relativa discussione

se $\vartheta \nearrow$, $mg \sin\vartheta \nearrow$ (1° quadrante!)

$(= f_s)$

$$\cancel{m}\cancel{g} \sin\vartheta_c = f_{s,max} = \mu_s \cancel{m}\cancel{g} \cos\vartheta_c$$

inizia a scivolare

$$\mu_s = \frac{\sin\vartheta_c}{\cos\vartheta_c} = \mathrm{tg}\,\vartheta_c$$

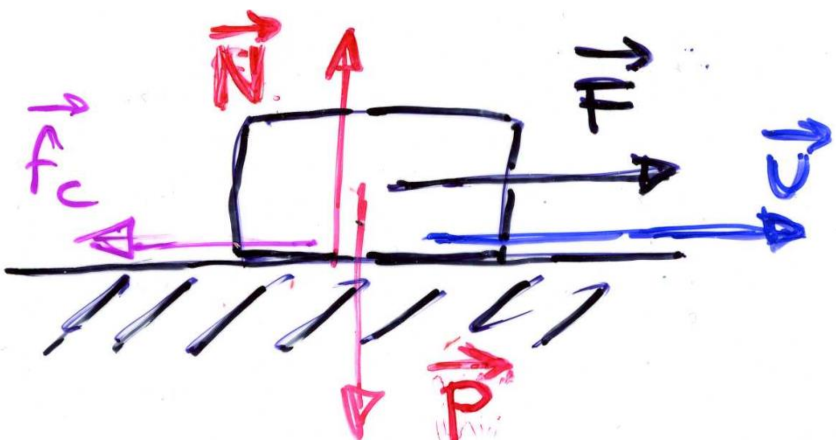
θ_c indica l'angolo critico, angolo per cui il corpo comincia a scivolare

Eq. di moto in presenza di attrito

- (senza attrito: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$)
- con attrito: $\mathbf{a} = 0$ per $|\mathbf{F}|<f_{s,max} = \mu_s N$

$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{f}}_\mathbf{c}$ per $|\mathbf{F}|>f_{s,max}$; $f_c = \mu_c N$

$\vec{\mathbf{f}}_\mathbf{c} = -\mu_c N\, \vec{\mathbf{v}}/v$ si oppone al moto



$\rightarrow\ ma = F - \mu_c N$

$\boxed{a = (F - \mu_c N)/m}$ $<F/m$

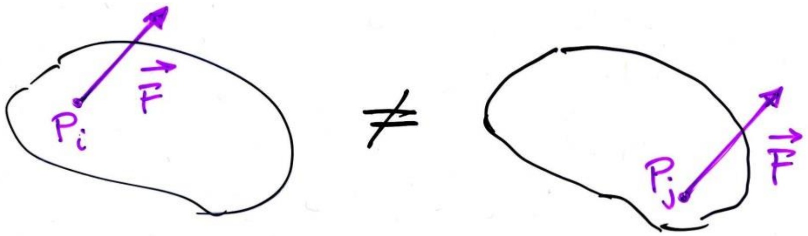
$a = F/m - \mu_c g$

(l'ultima vale su un piano orizzontale, $\mathbf{N} = -\mathbf{P}$, $N = mg$)

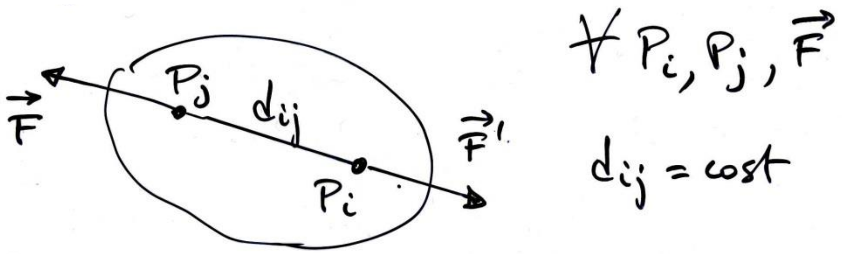
NB i vettori sono in grassetto e/o con la freccetta

Corpo rigido

– per i corpi estesi, il punto di applicazione delle forze diventa importante



– def. di corpo rigido



– sperimentalmente: 1) due **F** uguali e contrarie lungo la stessa retta di applicazione in punti diversi non alterano lo stato di moto del c.r.;
2) una **F** applicata ad un punto può essere spostata lungo la sua retta di applicazione senza alterarne gli effetti

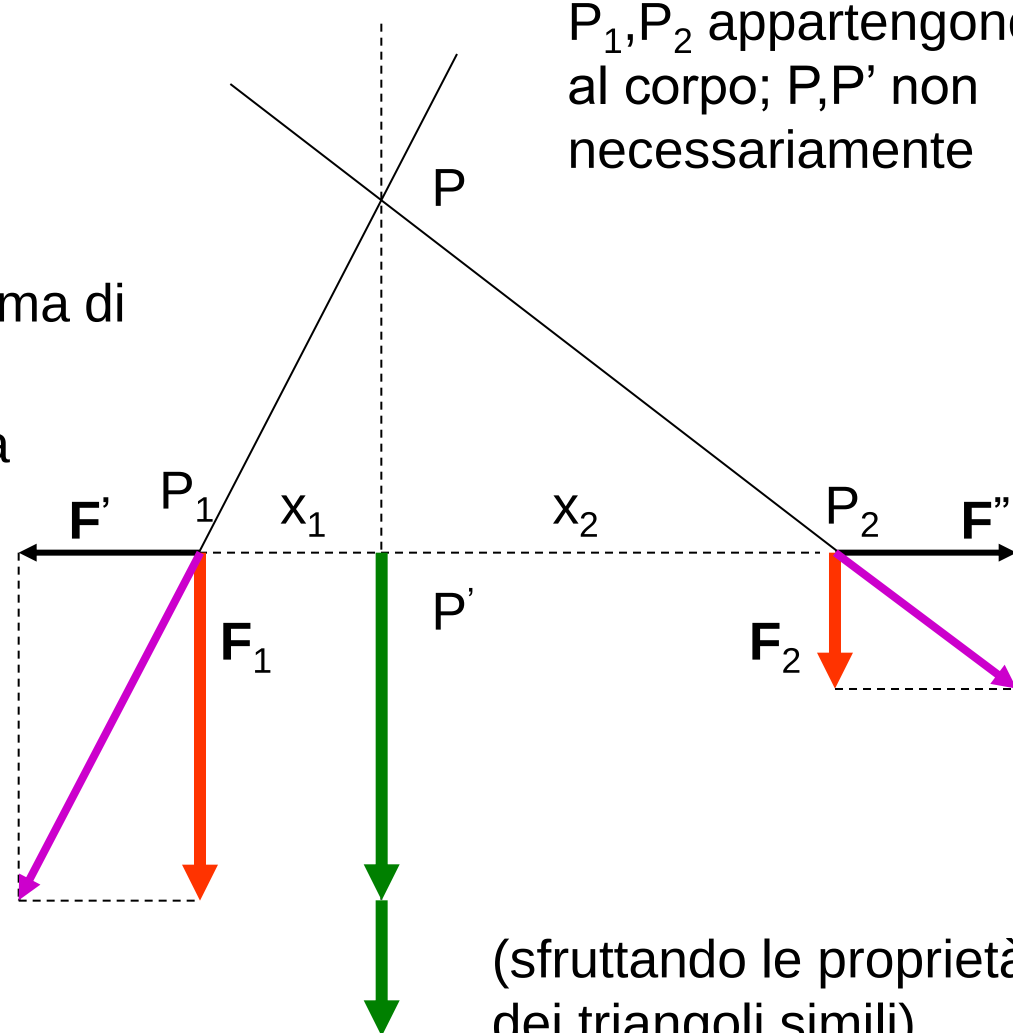
Corpo rigido: risultante di forze parallele(*)

- aggiungo **F'** e **F''** = - **F'** (**F'** a piacere, arbitraria)
- traslo le risultanti in P: le componenti orizzontali si annullano, rimane la somma di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$
- posso ritraslare la somma in P'
- la risultante è la somma di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ lungo P'P con

$$\boxed{\frac{P_1P'}{P_2P'} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1}}$$

$$\left(\frac{P_1P'}{PP'} = \frac{F'}{F_1}; \qquad \frac{P_2P'}{PP'} = \frac{F''}{F_2}\right)$$

P_1,P_2 appartengono al corpo; P,P' non necessariamente

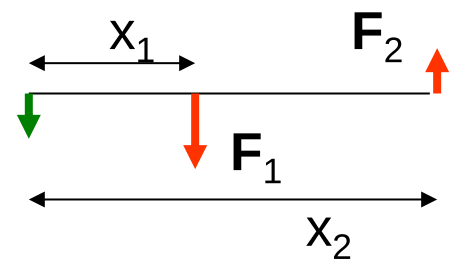


(sfruttando le proprietà dei triangoli simili)

(*) dimostrazione facoltativa

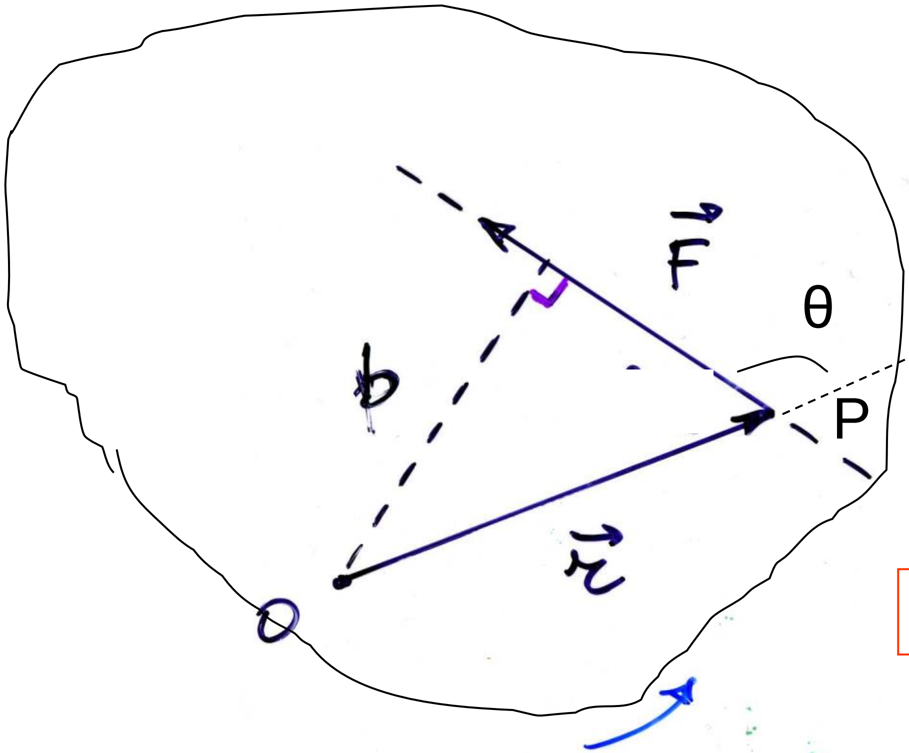
Risultante di forze parallele (2), baricentro

- posso riscrivere la rel. precedente come (forze parallele)
  $\boxed{F_1x_1 = F_2x_2}$
- se $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ sono antiparallele, la risultante ha per modulo la differenza dei moduli, verso quello della **F** più grande, retta di applicazione all'esterno dalla parte della **F** più grande, con
  $F_1x_1 = -F_2x_2$ (F_1, F_2 intese come componenti)
  $|F_1x_1| = |F_2x_2|$



- se si considera un corpo rigido esteso diviso in volumetti di massa m_i e di peso $m_i\mathbf{g}$, nel limite in cui **g** è costante, la risultante di tutte le forze peso è il peso del corpo $\mathbf{P} = \Sigma_i m_i \mathbf{g} = \mathbf{g}\Sigma_i m_i = m\mathbf{g}$ che sarà applicato nel centro di gravità o baricentro (per un corpo omogeneo è il centro geometrico – in generale il b. può anche trovarsi fuori dal corpo)

Momento di una forza rispetto a un punto



momento di **F** rispetto ad O (in evidenza): il prodotto vettoriale

$\mathbf{M} = \overrightarrow{OP}\ \mathbf{x}\ \mathbf{F}$

ossia

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

b, minima distanza fra O e la retta di applicazione di **F**, è il braccio

modulo del vettore **M** = braccio•F:

$$\boxed{M = rF\sin\theta = Fb}$$

siccome $\sin(180^o-\theta) = \sin\theta$

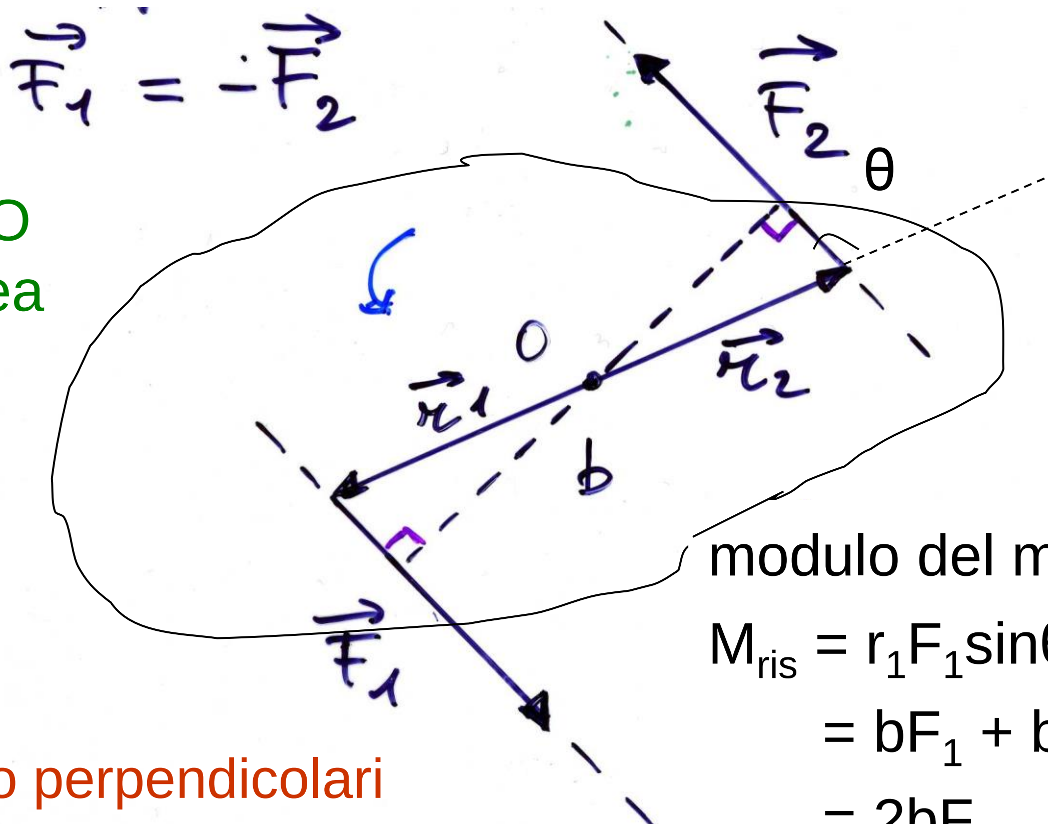
il momento è perpendicolare al piano individuato da **r** e **F**

NB **M** = 0 se **r** parall. **F**

[Momento] = [LF] = [ML^2T^{-2}]
unità SI: N·m
CGS: 1 dyne·cm =
= 10^{-5} N·10^{-2} m = 10^{-7} Nm

Coppia di forze

NB nel caso della coppia di forze, il momento della coppia ***non*** dipende dalla scelta di O



spostando O lungo la linea tratteggiata si ottiene sempre lo stesso M_{ris} etc.

modulo del momento risultante:

$$M_{ris} = r_1F_1\sin\theta + r_2F_2\sin\theta =$$
$$= bF_1 + bF_2 =$$
$$= 2bF_1$$
$$[= (x_1+x_2)F_1, \text{ con } x_1+x_2=2b]$$

M_1 e **M_2** sono perpendicolari al piano individuato da **r_1** e **F_1** e sono paralleli (producono una rotazione nello stesso verso)

Condizioni generali di equilibrio di un corpo rigido

perchè il c.r. sia in equilibrio (permanga nel suo stato di moto uniforme precedente):

1. la risultante delle forze esterne applicate al c.r. deve essere nulla
2. il momento risultante delle forze esterne applicate al c.r. deve essere nullo

$$\begin{cases} \vec{F}_{ris} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \vec{M}_{ris} = \sum_i \vec{M}_i = 0 \end{cases}$$

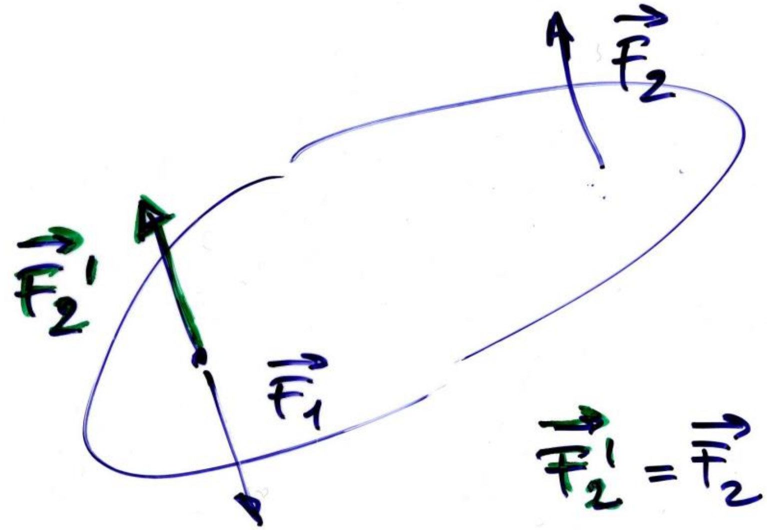
forze esterne

"

una risultante non nulla è causa di una variazione nel moto di traslazione; un momento risultante non nullo causa le rotazioni

Condizioni di equilibrio (2), esempio

es.



forze uguali e contrarie, con rette d'azione uguali o diverse

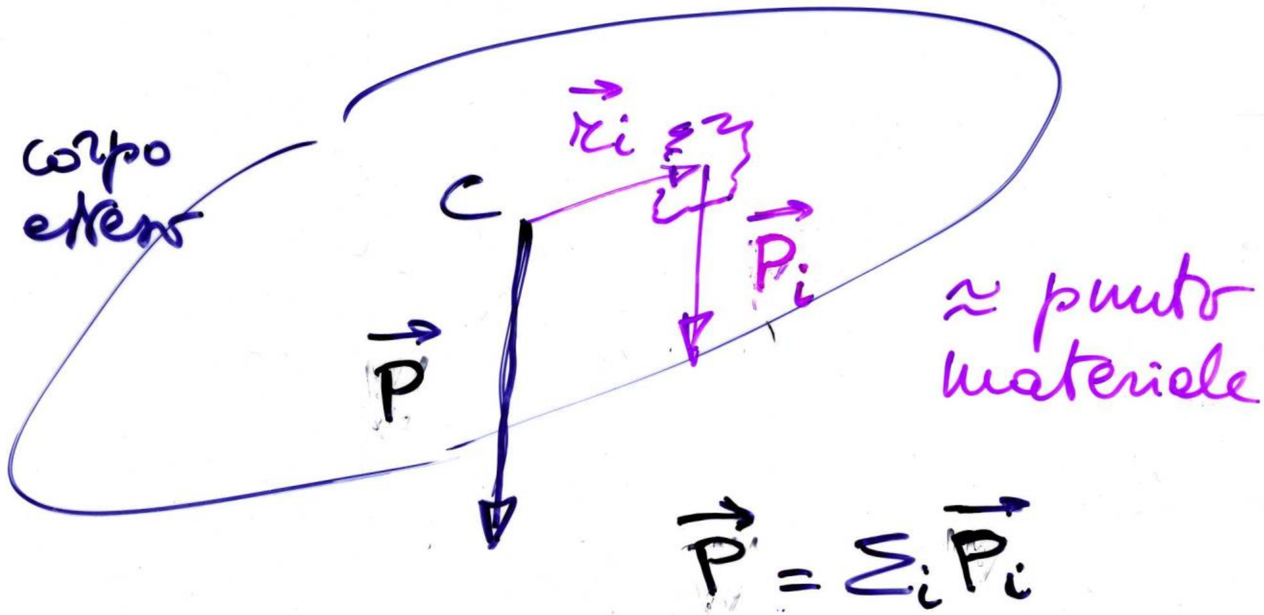
$$\vec{F}_2' = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

caso 1
$$\begin{cases} \vec{F}'_{ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2' = 0 \\ \vec{M}'_{ris} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2' = 0 \end{cases}$$
sta fermo

caso 2
$$\begin{cases} \vec{F}_{ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \\ \vec{M}_{ris} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \neq 0 \end{cases}$$
ruota

Centro di gravità o baricentro

in modo del tutto equivalente alla def. precedente, il baricentro è individuabile imponendo che la somma dei momenti delle forze peso (ottenuta scomponendo il c.r. in *piccole* parti) rispetto ad esso sia nulla



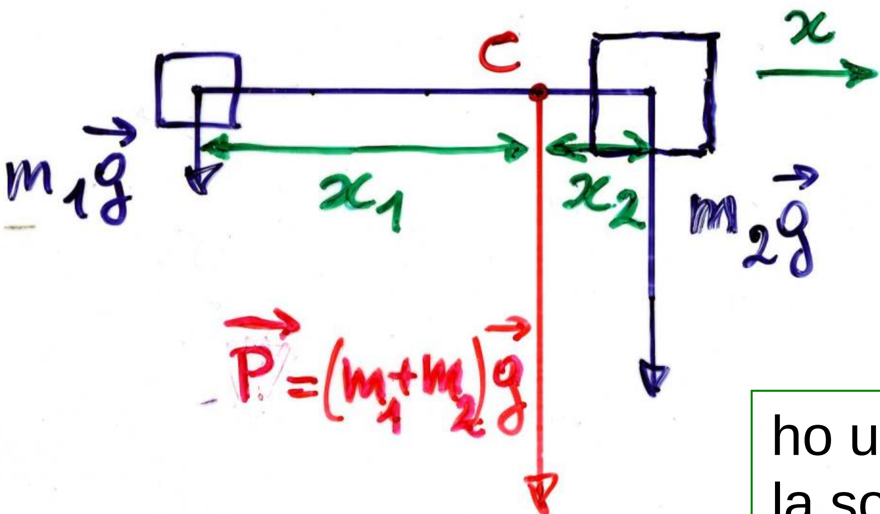
da $\sum_i \vec{r_i} \times \vec{P_i} = 0$ → baricentro (il baricentro risulta essere il punto intorno al quale il c.r. ruota)

Es. di calcolo del baricentro

es.1 corpo uniforme : centro geometrico

(per simmetria dei mom.)

es.2 due masse



$$m_1 g x_1 = m_2 g x_2$$

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}}$$

ho usato la definizione di baricentro: la somma dei momenti rispetto al baricentro C deve essere nulla:

$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0 \Rightarrow M_1 = M_2$

(i moduli sono uguali)

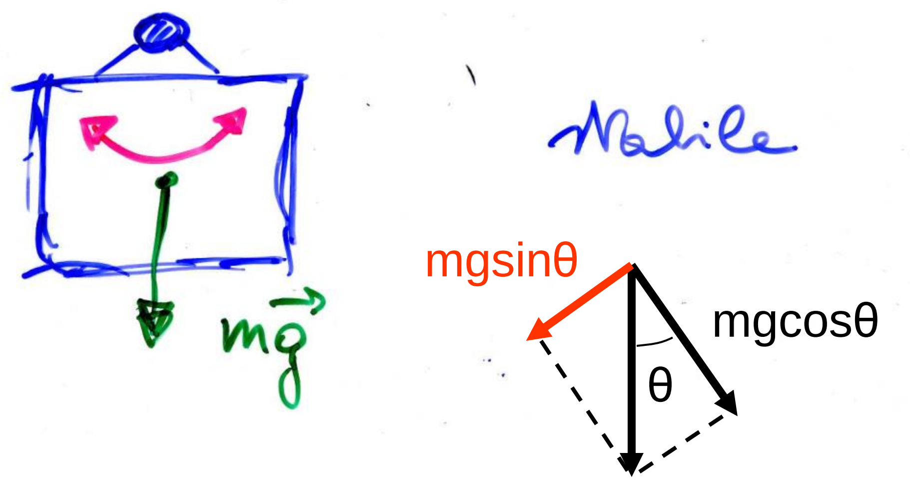
uguale al risultato ottenuto a pag. 70

$x_1/x_2 = F_2/F_1$

$x_1F_1 = x_2F_2$

Tipi di equilibrio (asse fisso)

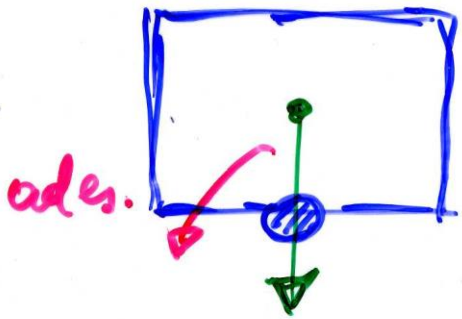
1)



la componente mgcosθ è annullata dalla reazione del vincolo, invece mgsinθ rappresenta una f. di richiamo verso la posizione di equilibrio (cf. pendolo)

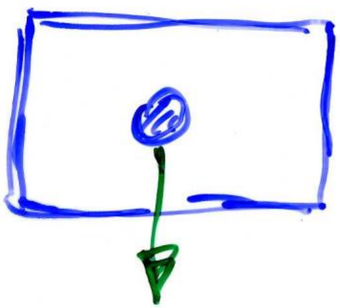
Tipi di equilibrio (2)

2)



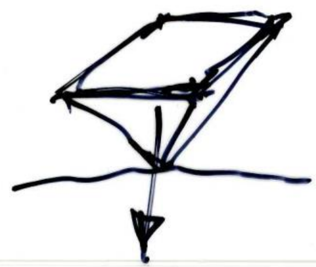
instabile

3)



indifferente!
(da non verificare)

Pisa?



perché le piramidi non hanno le punte in basso?

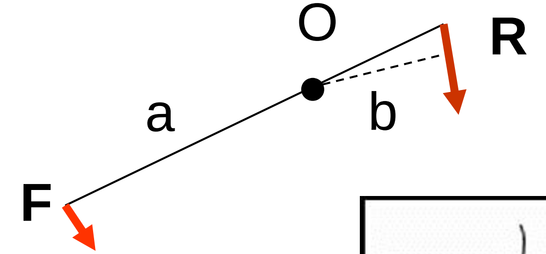
Leve (macchine semplici)

- leva: c.r. che ruota attorno ad un asse fisso (fulcro) in modo che M_F (potenza) possa bilanciare M_R (resistenza)

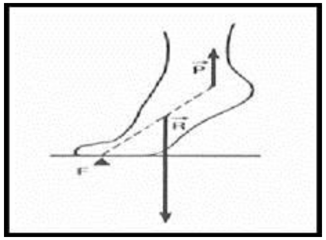
  $\mathbf{M_F + M_R = 0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M_F = -M_R}$

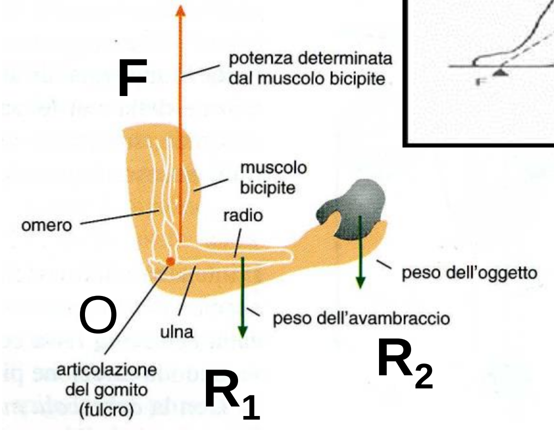
  $\rightarrow$ Fa = Rb $\rightarrow$ F/R = b/a con a,b rispettivi bracci

  (vantaggiosa, se F<R)



- leva di 1° tipo: fulcro O fra F e R (R e F concordi) – eg capo
- leva di 2° tipo: R fra O e F (R e F discordi) – eg piede
- leva di 3° tipo: F fra O e R (R e F discordi) – eg braccio



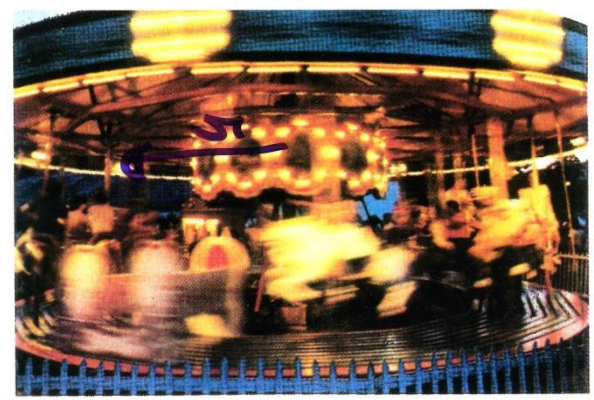


Moto in generale

- il moto di un c.r. libero in generale è scomponibile nel moto di traslazione del baricentro e nel moto di rotazione intorno al baricentro – per un c.r. con un asse fisso è possibile solo il moto di rotazione

v

ω

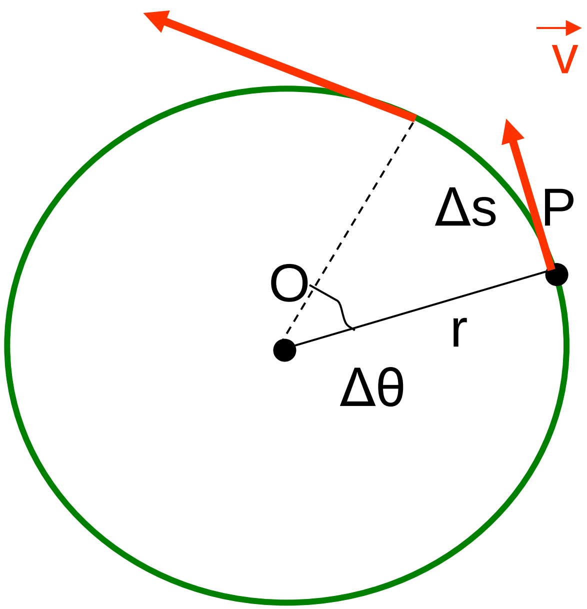


Carolina Kostner in pura traslazione e in pura rotazione (bronzo alle Olimpiadi, Sochi, 2014) – argento ai Mondiali 2013

una giostra in pura rotazione attorno ad un asse fisso: stessa ω, diversa $v = \omega r$, diversa $a_c = \omega^2 r$

Rotazioni: p.m. rispetto ad asse fisso
(moto circolare generico)

- circonferenza di raggio r, fisso, costante
- quando P si muove lungo la circonferenza varia $\theta = \theta(t)$, in rad.! – (p.m. oppure disco, cilindro scomposti in particelle)
- $\Delta s = r\Delta\theta$ OP = r
- $v = \Delta s/\Delta t = r\Delta\theta/\Delta t = r\omega$
- $a_t = \Delta v/\Delta t = r\Delta\omega/\Delta t = r\alpha$
- $a_c = v^2/r = \omega^2 r$



- se α = cost si può ricavare

  $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

  cf. $v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$ [vedi p. 20, basta dividere per r^2]

(NB $\alpha = 0$ nel moto circolare uniforme)

Momento angolare e momento d'inerzia

- p.m., si definisce momento angolare (o della q.d.m.) il vett.

  $\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}}$

  $L = mvr = (mr^2)\omega = I\omega$ (poichè **r** e **v** sono ⊥ nelle rotazioni)

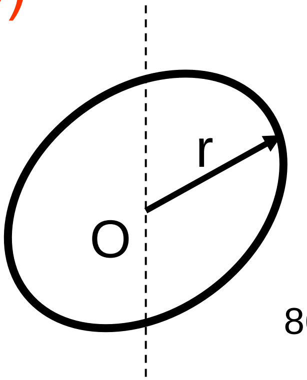
  il prodotto $I = mr^2$ si chiama momento d'inerzia (scalare) e gioca per le rotazioni il ruolo giocato della massa per le traslazioni

- c.r. esteso scomposto in particelle m_i, r_i, v_i – stesse ω, α

  $L = \Sigma_i L_i = \Sigma_i m_i r_i^2 \omega = \omega(\Sigma_i m_i r_i^2) = \omega I$ ($\mathbf{r_i}$ e $\mathbf{v_i}$ perpendicolari)

  $\boxed{I = \Sigma_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm}$ momento d'inerzia (scalare)

  ad es. anello di raggio r cost. $I = r^2\int dm = mr^2$



Momento angolare e momento d'inerzia (2)

dimensioni e unità del momento angolare

- [Momento angolare] = [LQ] = $[ML^2T^{-1}]$
- unità SI: $1\ kg\ m^2\ s^{-1} = 1\ J \cdot s$ [joule (J) unità di energia]
- CGS: $1\ g\ cm^2\ s^{-1} = 1\ erg \cdot s =$ [erg unità di energia]
- $= 10^{-7}\ J \cdot 1s = 10^{-7}\ Js$

dimensioni e unità del momento d'inerzia

- $[I] = [ML^2]$
- unità SI: $kg \cdot m^2$
- CGS: $1\ g \cdot cm^2 =$
- $= 10^{-3}\ kg \cdot 10^{-4}\ m^2 = 10^{-7}\ kg\ m^2$
- (I di vari solidi si trova calcolato su numerosi libri)

Il principio per i corpi in rotazione

- p.m., si parte da **F** = m**a** (F = ma = mrα) e si moltiplica vettorialmente a sx per **r**, (**r**x)**F** = (**r**x)m**a**, si ha in modulo

  $M = rF = rma = rmr\alpha = (mr^2)\alpha = I\alpha$ [$\mathbf{F_c}$,$\mathbf{a_c}$ || -**r** danno 0]

- c.r. esteso, analogamente avremo, dopo averlo scomposto in particelle,

  $M_{ris} = \Sigma_i M_i = (\Sigma_i m_i r_i^2)\alpha$ (poichè tutti gli $\mathbf{M_i}$ sono paralleli)

  $\boxed{M_{ris} = I\alpha}$ (cf. $\mathbf{F_{ris}} = m\mathbf{a}$)

- possiamo riscrivere

  $M_{ris} = I\Delta\omega/\Delta t = \Delta(I\omega)/\Delta t = \Delta L/\Delta t$ (I è cost.!)

  $\boxed{\begin{array}{l} \text{se } M_{ris} = 0 \\ \Delta L/\Delta t = 0, \;\; L = \text{cost.} \end{array}}$ si ha (conservazione del momento angolare)

cons. momento angolare (es.)

- pattinatrice su ghiaccio durante una piroetta: se chiude le braccia, I [$= \Sigma mr^2$] diminuisce e ω aumenta e viceversa (L è costante, $M_{peso} = 0$ rispetto all'asse di rotazione)

  $L = I_0\omega_0 = I\omega \quad \rightarrow \quad \omega = (I_0/I)\omega_0$

- collasso stellare(*) – stella con $m = 2M_S$, $r_1 = R_S = 7 \cdot 10^5$ km, $T_{rot} = 10$ g che collassa gravitazionalmente ad una stella di neutroni molto densa, stessa massa, $r_2 = 10$ km; quale sarà la nuova velocità angolare?

  si può calcolare

  Assumiamo sfere uniformi: $I_i = 2/5\ mr_i^2$ - il sistema è isolato, niente F_{est}: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

  $\omega_2 = \omega_1(I_1/I_2) = \omega_1(\cancel{2/5}\cancel{m}r_1^2)/(\cancel{2/5}\cancel{m}r_2^2) = \omega_1(r_1^2/r_2^2) = 4 \cdot 10^4 \text{rad/s}$

OK? $v_{perif} = 4\ 10^4$ rad/s $\cdot\ 10^4$ m $= 4\ 10^8$ m/s !! ci vorrebbe un calcolo relativistico

(*) facoltativo

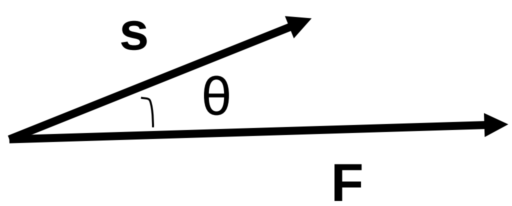
Lavoro di una forza

1. forza cost. **F** applicata ad un p.m., spostamento finito rettilineo **s** del p.m.

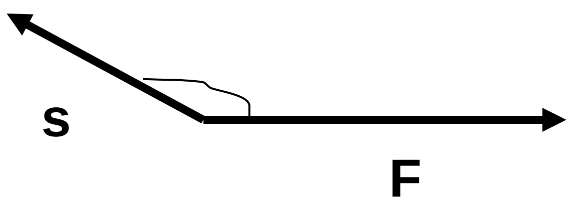
   $\mathcal{L} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = F\ s \cos\theta$ (= $\mathbf{s}\cdot\mathbf{F}$)

   prodotto scalare

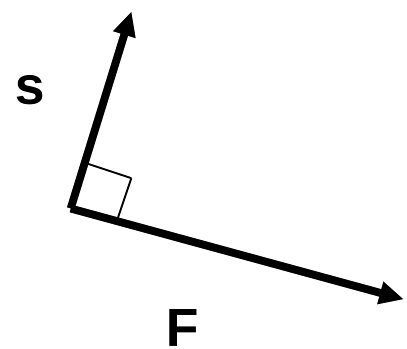
   spostamento del punto di applicazione di **F** parallelo ad **F**: $\mathcal{L} = 0$ se $F = 0$, $s = 0$, $\theta = 90°, 270°$



$\mathcal{L} > 0$



$\mathcal{L} < 0$



$\mathcal{L} = 0$

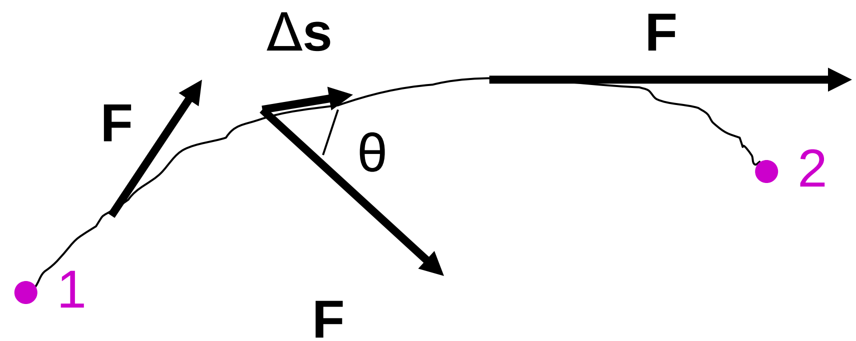
Lavoro (2)

- dimensioni del lavoro (stesse del momento di F)
  $[\mathcal{L}] = [Fs] = [MLT^{-2}\,L] = [ML^2T^{-2}]$
  unità SI: $1N \cdot 1m$ = 1 joule = 1 J = 1/9.81 $kg_p m$ "
  CGS: $1cm \cdot 1dina$ = 1 erg "
  1 erg = 10^{-2} m · 10^{-5} N = 10^{-7} J
  (J e erg sono usate solo per lavoro, energia e calore)

- Potenza: rapidità con cui è eseguito un lavoro
  $\mathcal{P} = \mathcal{L} / \Delta t$ (a v cost. $\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} / \Delta t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv\cos\theta$)
  $[\mathcal{P}] = [ML^2T^{-3}]$
  unità SI: 1 J/s = 1 watt = 1 W; CGS: 1 erg/s
  altra unità, cavallo vapore: 1 CV = 735 W = 0.735 kW
  es. metabolismo basale: 2000 kcal/giorno = $2 \cdot 10^6$ cal/g (*4.186 J/cal) = 8.372 10^6 J/g (*1/86400 g/s) ~ 100 W

Lavoro di una forza variabile

2. forza variabile (modulo,direz.,(verso)), traiettoria curva; dividiamo la traiettoria in trattini Δ**s** con **F** cost. nel tratto (→ definiz. precedente)



$\Delta\mathcal{L} = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s} = F\,\Delta s\cos\theta$

per ottenere il lavoro totale:

$\mathcal{L} = \Sigma\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s} = \Sigma F\,\Delta s\cos\theta$

in effetti a rigore:

$\mathcal{L} = \lim_{\Delta s\to 0} \Sigma F\Delta s\cos\theta = \int_1^2 F\cos\theta\, ds$

(somma su ∞ tratti di lunghezza infinitesima ds)

Lavoro di F_{ris} e energia cinetica

- p.m. di massa m soggetto a $\mathbf{F}_{ris}$ = **F** cost, **a** = **F**/m => moto unif. accel; prendiamo Δt => $\Delta x = x_2 - x_1$ nella direzione. del moto; si ha

  $a(x_2 - x_1) = ½(v_2^2 - v_1^2)$ [vedi p. 20]

  $\mathcal{L} = F(x_2 - x_1) = ma(x_2 - x_1) = ½mv_2^2 - ½mv_1^2$

  si definisce energia cinetica

  $\boxed{K = ½mv^2}$ **(*sempre* ≥ 0, poichè m ≥0 e v^2 ≥0)**

  il lavoro di F_{ris} uguaglia ΔK del p.m.

- corpo di massa m, moto traslatorio (stessa **v** per tutti i punti): $K = ½mv^2$; sistema di forze agenti sul corpo che trasla (traiettoria retta o curva)

  $\boxed{\mathcal{L}_{ris} = ½m(v_2^2 - v_1^2) = \Delta K}$ **(teorema dell'energia cinetica)**

  lavoro totale delle f. agenti = variazione energia cinetica

Energia

- energia = capacità di compiere lavoro (dimensioni, unità: le stesse del lavoro)
- es.1 energia cinetica: corpo in moto (**v**, K) comprime una molla, $\mathcal{L}$ contro la f. elastica (variabile, $k(x-x_0)$)
- es.2 sasso lanciato verso l'alto ($\mathbf{v}_0$, K), $\mathcal{L}$ contro la f. di gravità (costante, mg)

- es.3 si lascia cadere un corpo da fermo (K = 0): l'energia cinetica raggiunta quando il c. tocca il suolo dipende dalla quota iniziale (energia potenziale) – moto unif. acc. $v_0^2=2gh$

Forze conservative

- <u>se</u> il lavoro $\mathcal{L}$ delle f. dipende ***esclusivamente*** dalla posizione 1 (iniziale) e 2 (finale) e ***non*** dalla scelta del percorso 12, (quindi anche, per uno spostamento che riporta al punto di partenza, <u>ciclo chiuso</u>, $\underline{\mathcal{L}_{11}} = \mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{21} \underline{= 0}$, ossia $\sum_i \Delta\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{F}_i = 0$): → forze conservative
- <u>le f. che dipendono solo dalla posizione sono conservative</u> (in particolare le f. costanti sono conservative!)
- esempi di f. conservative: f. peso **P** = m**g**, f. elastica **F** = k(**x**-$\mathbf{x_0}$), f. elettrostatica **F** = q**E**, vedi più avanti, etc.
- se le f. dipendono da t esplicitamente *oppure* anche solo implicitamente [ad es. attraverso la velocità, f. di attrito (resistenza) dell'aria $\mathbf{F_a} = -cAv^2(\mathbf{v}/v)$, f. di attrito radente $\mathbf{f} = -\mu N(\mathbf{v}/v)$, f. magnetica **F** = q**v** x **B**, vedi più avanti, etc.] ***non*** sono forze conservative

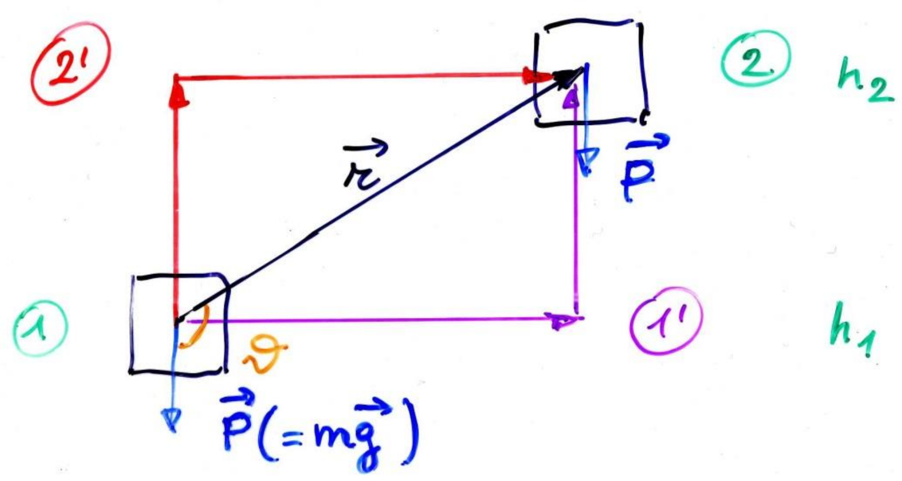
Forze conservative (2)

- es. f. peso (costante), supponiamo di spostare una massa m da una quota h_1 ad una h_2, posso scegliere <u>diversi percorsi</u>: 12 (diretto), 11'2, 12'2 etc.

$\mathcal{L}_{12} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{r} = Pr\cos\theta = -mg(h_2-h_1)$

$\mathcal{L}_{11'2} = \mathcal{L}_{11'} + \mathcal{L}_{1'2} = 0 + [-mg(h_2-h_1)] = -mg(h_2-h_1)$

$\mathcal{L}_{12'2} = \mathcal{L}_{12'} + \mathcal{L}_{2'2} = -mg(h_2-h_1) + 0 = -mg(h_2-h_1)$



Forze conservative (3)

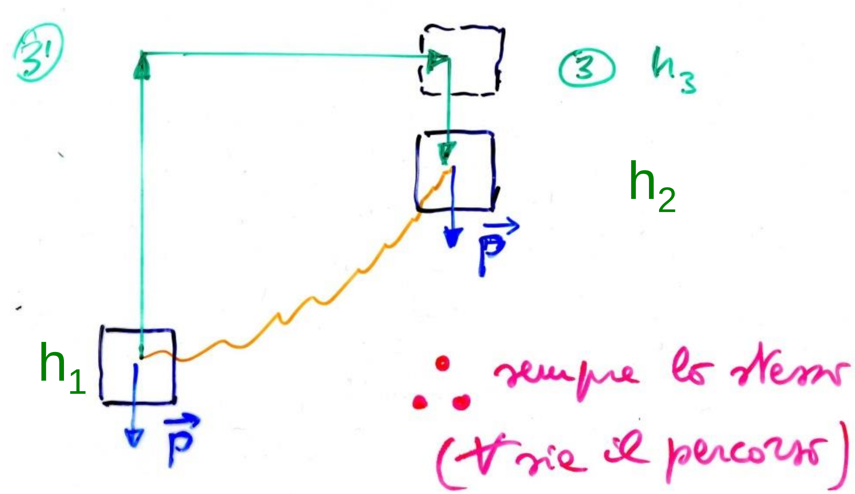
- il lavoro è sempre lo stesso, proviamo 13'32, 12 secondo una spezzata (a scalini), 12 secondo una curva continua ...

$$\mathcal{L}_{13'32} = \mathcal{L}_{13'} + \mathcal{L}_{3'3} + \mathcal{L}_{32} = -\,mg(h_3-h_1) + 0 + mg(h_3-h_2)$$
$$= -\,mg(h_2-h_1)$$

$$\mathcal{L}_{12spezzata} = \Sigma(0 + [-mg\Delta h]) \qquad = -\,mg(h_2-h_1)$$

...

- il lavoro dipende solo dalla quota iniziale e finale, non dal modo in cui si passa da 1 a 2



Energia potenziale

- se **F** è conservativa (dipende solo dalla posizione) ho che $\mathcal{L}_{12}$ ***è indipendente dal percorso e dipende solo dagli estremi*** (di conseguenza sarà anche $\mathcal{L}_{11} = 0$ sempre)
- posso porre

$$\boxed{\mathcal{L}_{12} = W_1 - W_2 = -\Delta W}$$

se una forza fa lavoro +vo (-vo) c'è perdita (acquisto) di e.p.

dove W è l'energia potenziale: il lavoro da 1 a 2 è = – (la variazione dell'energia potenziale)

NB si definisce ***solo* la variazione** dell'e.p., ***non*** il suo valore in assoluto

ad es. f. peso

$W(h) - W(0) = -\mathcal{L}_{0h} = \mathcal{L}_{h0} = mgh$

***se**, arbitrariamente*, scelgo $W(0) = 0$, ho $W(h) = mgh$

[ma qualsiasi cost. in +(-) andrebbe bene lo stesso: $\Delta W = W_2 - W_1 = W_2' - W_1' = (W_2+c) - (W_1+c) = W_2 + c - W_1 - c$ con c cost.]

Conservazione dell’energia meccanica

- p.m. o corpo soggetti a f., posso definire in genere

  $\boxed{E = K + W}$

  energia totale meccanica, somma di e. cinetica ed e. potenziale (con $\mathcal{L}_{12} = K_2 - K_1$, lavoro ***della*** f. risultante, vedi p. 92), scalare

- se le f. sono conservative avrò

  $\mathcal{L}_{12} = K_2 - K_1 = W_1 - W_2$

  da cui

  $\boxed{K_2 + W_2 = K_1 + W_1 = \text{cost.} \qquad (= E_0)}$

  oppure

  $\Delta E = 0$

  legge di conservazione dell’energia totale meccanica

Conservazione dell'energia meccanica (2)

- ad es.1: f. peso / caduta libera, si parte con **v** = 0 dalla quota h

$E(h) = K(h) + W(h) = 0 + mgh = mgh$ $(= E_0)$

$E(0) = K(0) + W(0) = ½mv^2 + 0 = ½m \cdot 2gh = mgh$

genericamente, $0 \leq y \leq h$

$\boxed{E(y) = ½mv_y^2 + mgy = mgh}$ $(= E_0)$

- ad es.2: moto di un p.m. di massa m attaccato ad una molla di costante elastica k, x allungamento della molla

$\boxed{E(x) = K(x) + W(x) = ½mv^2 + ½kx^2 (*)}$ $(= E_0)$

$E(0) = ½mv_{max}^2$ *(posizione di equilibrio, x = 0)*

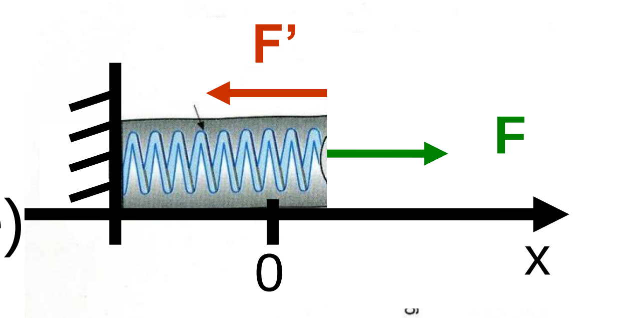
$E(A) = ½kA^2$ *(massima elongazione, v = 0)*

$\Rightarrow E_0 = ½mv_{max}^2 = ½kA^2$

(*) vedi lucidi successivi

Lavoro della forza elastica

- molla orizzontale, $x = 0$ a riposo,
  data una f. deformante
  $x = F/k$ $\quad$ ($F = kx$, legge di Hooke)
  f. elastica della molla F'



⇨ in una nuova posizione di equilibrio

$\mathbf{F} + \mathbf{F'} = 0$; $\quad$ $\mathbf{F'} = -\mathbf{F}$; $\quad$ $F' = -F = -kx$

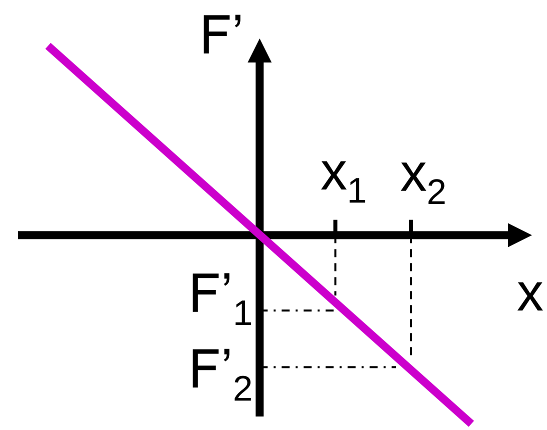
allunghiamo la molla da x_1 a x_2,

F' passa da $F_1' = -kx_1$ a $F_2' = -kx_2$

F' è variabile ⇨ uso $\underline{F'} = (F_1'+F_2')/2$

$\mathcal{L} = \underline{F'}\,\Delta x = (-kx_1 - kx_2)/2 \cdot (x_2 - x_1)$

$= -(\frac{1}{2}k x_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2) = -\Delta W$



En. potenziale elastica ed en. totale

- en. potenziale della molla, allungamento x

  $W = ½kx^2$ (NB ponendo arbitr. $W(0) = 0$)
- [a stretto rigore si sarebbe dovuto fare (il risultato è uguale)

  $\mathcal{L} = \int_{x1}^{x2} F'dx = -\int_{x1}^{x2} kxdx = -k\int_{x1}^{x2} xdx = -k/2\,(x_2^2 - x_1^2)$]
- lancio un blocco di massa m contro la molla con velocità $\mathbf{v_0}$ secondo x: comprimerà la molla fino a fermarsi – ponendo $x_1 = 0$, $x_2 = A$ ($v_1 = v_0 = v_{max}$, $v_2 = 0$); trascuriamo gli attriti, **P** ed **N** non fanno lavoro

  $\mathcal{L} = -½kA^2$ lavoro della f. elastica (molla)

  $\Delta K = 0 - ½mv_{max}^2$ variazione en. cinetica (blocco)

  $\mathcal{L} = \Delta K$ (teor. dell'en. cinet.) ⇒ $½kA^2 = ½mv_{max}^2$

  si ha un trasferimento di energia dal blocco alla molla

En. totale sistema massa più molla

- per due allungamenti generici x_1 e x_2 avrò

  $\Delta K = -\Delta W$

  $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2)$

  ovvero

  $\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$

  o anche

  $\frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = \text{cost}$ $\qquad (= E_0)$

  che è l'energia totale di un moto armonico nel tempo di periodo $T = 2\pi/\omega$ dove $\omega^2 = k/m$

  (se il blocco resta agganciato alla molla, si muoverà di moto armonico semplice in assenza di attriti, v. dopo)

Lavoro delle forze non conservative

- es. considero un blocco, m = 2.04 kg, che si muove senza attrito su un piano sotto l'azione di F =15 N cost. per un tratto d = 2 m (lavoro Fd = 30 J)

  $\mathcal{L} = -\Delta W = K_2 - K_1$

  $W(x) = -Fx + \text{cost} = F(d - x)$ (pongo, arbitr., W(d) = 0)

  $E_0 = 30$ J; K cresce da 0 a 30 J; W diminuisce di conseguenza

  $E(x) = K(x) + W(x) = E_0 = \text{cost}\ (= 30\ \text{J})$

- se c'è attrito, ad es. $\mu_c = 0.5$, dovrò includere il lavoro della f. d'attrito non conservativa, $f = \mu N = \mu mg = 10$ N, che si oppone al moto: $\mathcal{L}_{nc} = -fd = -20$ J

  $\mathcal{L} = -\Delta W + \mathcal{L}_{nc} = K_2 - K_1$

  $E(x) = K(x) + W(x) < E_0$ $E(0) = 30$ J; $E(d) = 30-20 = 10$ J

L'energia cinetica dei corpi in rotazione

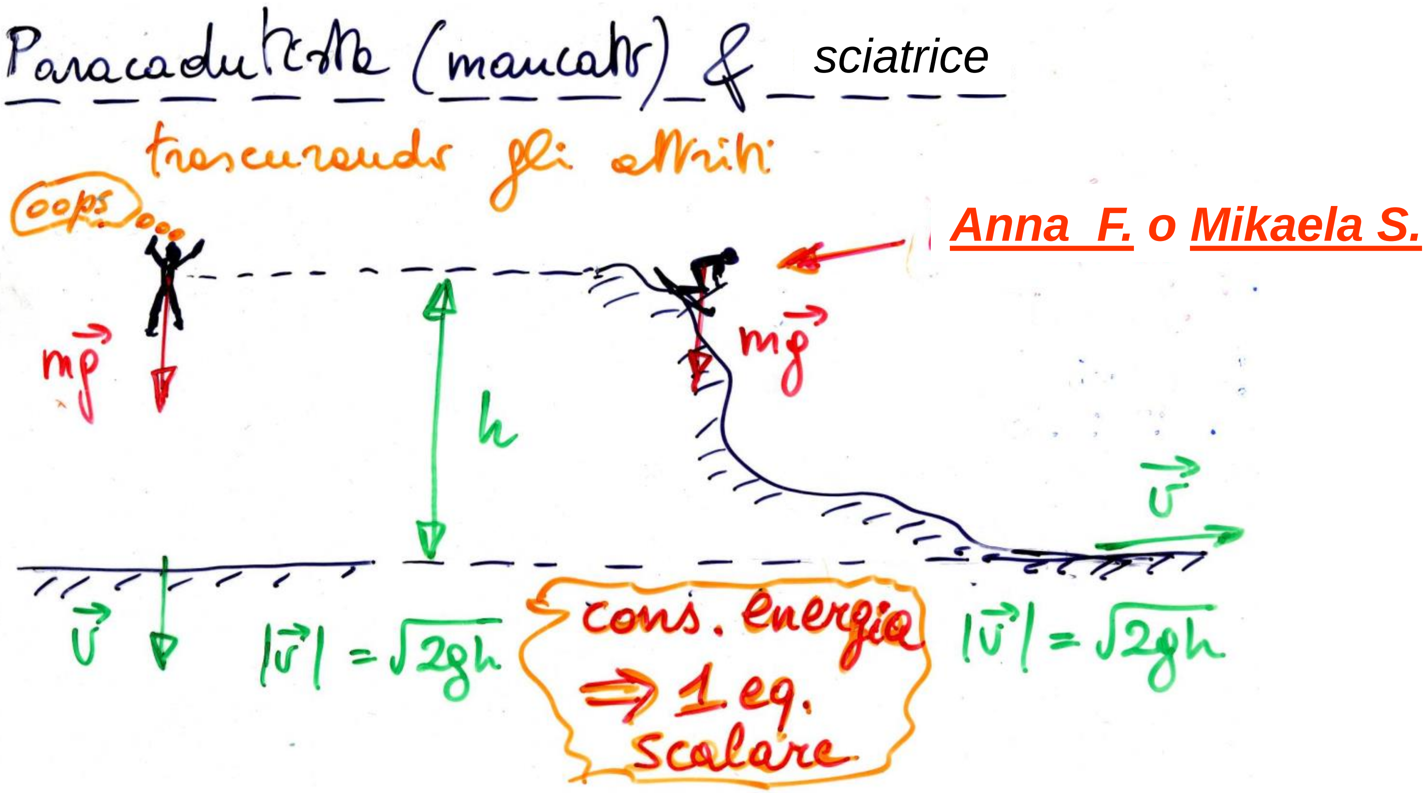
- per un p.m. vincolato su una traiettoria circolare di raggio r che si muove con velocità v si ha

$K = ½\ mv^2 = ½\ mr^2\omega^2 = ½\ I\omega^2$ [$v=\omega r$, vedi p. 84, 85]

- che è l'energia cinetica di rotazione, la stessa formula vale per un corpo di momento d'inerzia I con il baricentro a distanza r dall'asse di rotazione
- per un moto uniforme ($|\mathbf{v}|$ = cost.), l'en. cinetica di rotazione si conserva, $½\ I\omega^2 = ½\ I\omega_0^2$, ossia le forze sono $\perp$ alla traiettoria [forza centripeta, per es. forza magnetica, vedi più avanti]

Caveat

- **l'energia è uno *scalare*** ⇒ direzioni ignote, ad es.



- gli attriti con il mezzo circostante riducono l'en. totale meccanica che si trasforma in altra energia

Meccanica 3a parte

Elasticità

Trazione e compressione

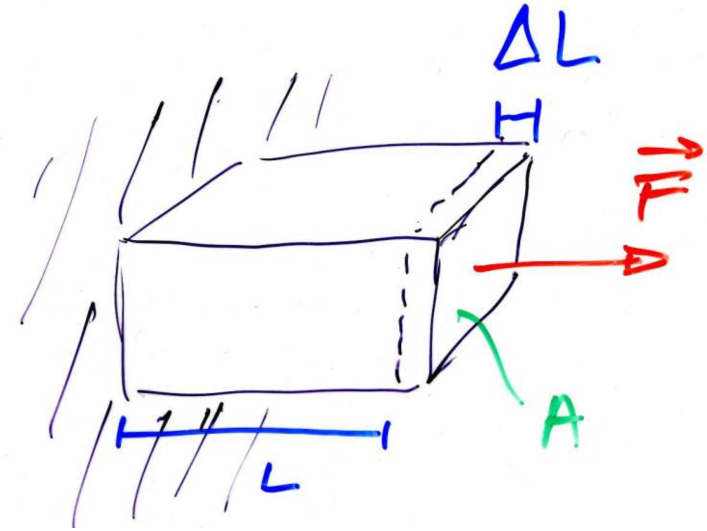
- i corpi reali non sono rigidi ma più o meno deformabili, il tipo di deformazione dipende da come si applicano le f.
- si definisce sforzo la f. applicata su una superficie A divisa la superficie stessa

  sforzo = F/A

  [F/A] = $[MLT^{-2}L^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}]$

  unità SI: N/m^2 o pascal (Pa)

  CGS: 1 dyne/cm^2 = 10^{-1} N/m^2

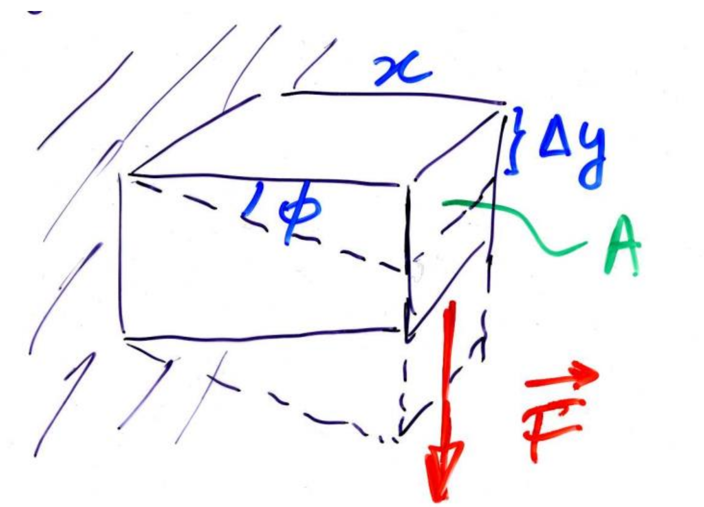


- ***deformazione*** = ΔL/L (numero puro)

  adimensionale - la definizione di deformazione fa riferimento al tipo di sforzo: trazione (compressione) implica sforzo ortogonale alla superficie

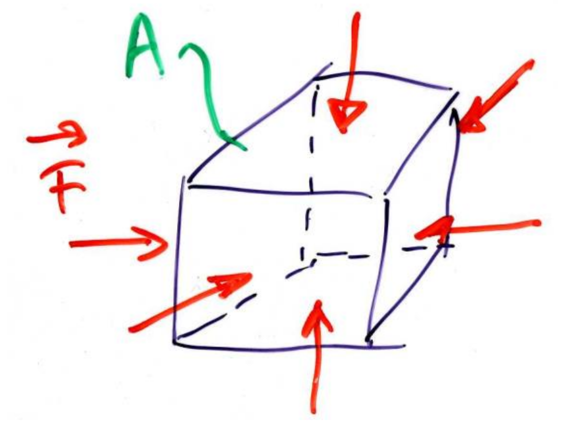
Sforzo di taglio e di volume

- taglio: forza parallela alla sup. A
- sforzo = F/A
- deformazione = Φ (adimensionale)
  con tgΦ = Δy/x



- sforzo di volume (presente anche per liquidi e gas, senza forma propria)
- sforzo = F/A = Δp (pressione, scalare(*))
- deformazione = - ΔV/V

  (l'aumento di p diminuisce V)



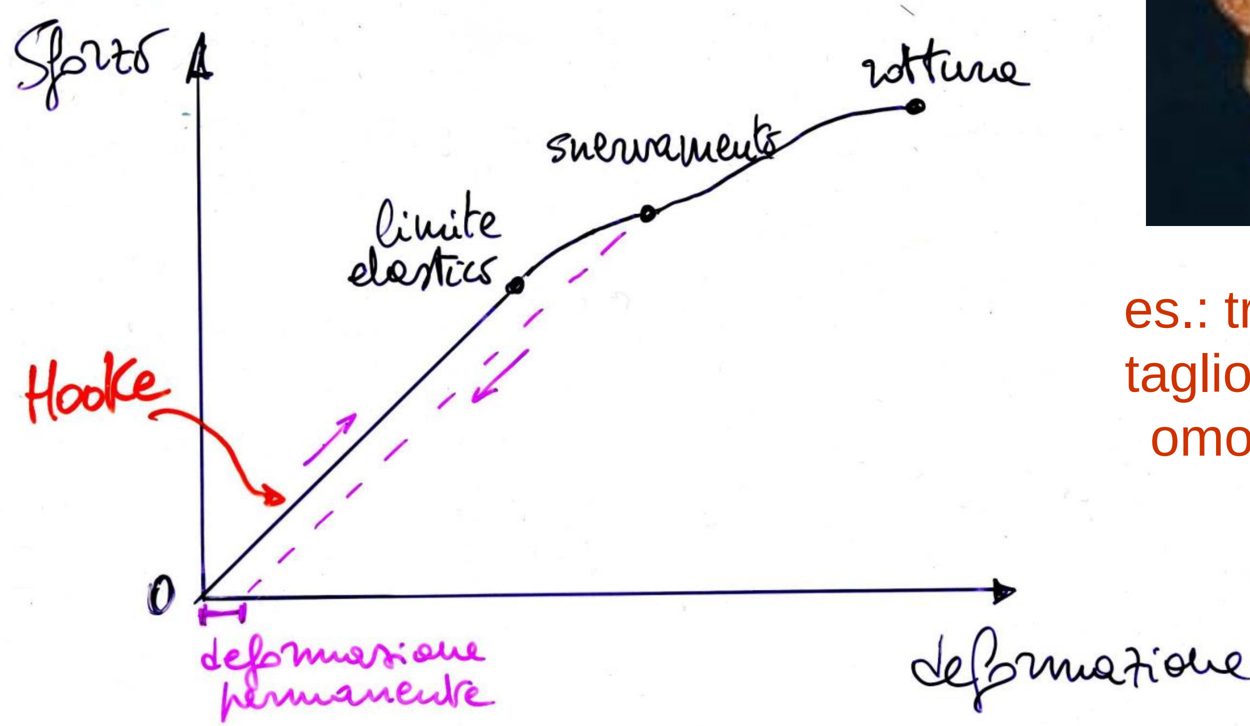
(*) in tutte le direz. → la direz. non conta (vedi più avanti)

Legge di Hooke

- per piccole deformazioni, entro il limite elastico => vale la legge di Hooke

$\boxed{\text{sforzo} \propto \text{deformazione}}$

(cf. con F = kx, forza elastica)



es.: trazione, taglio, sforzo omogeneo

Legge di Hooke (2)

1. trazione/compress.

$\boxed{F/A = Y\ \Delta L/L}$

(Y – modulo di Young)

2. taglio

$\boxed{F/A = n\Delta\Phi}$

(n – modulo di rigidità)

3. elasticità di vol.

$\boxed{\Delta p = -\ B \cdot \Delta V/V}$

(B – modulo omogeneo)

		Y ($10^9\ N/m^2$)	n ($10^9\ N/m^2$)	B ($10^9\ N/m^2$)
Solidi	Acciaio	210	83	170–180
	Pb	18	8	43
	Osso	~10	—	—
Elastomeri	Muscolo	~0.005	—	—
	Gomma	~0.001	—	—
Liquidi	H_2O			2.2
	Hg			26
Gas	gas perfetto (1 atm)			~0.0001

Applicazione della legge di Hooke

- $$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y}\frac{F}{A}$$ => $\Delta L = F \cdot L/(YA) = F/k$ con $k=YA/L$
- quanto si deforma l'osso di una gamba?
- $Y_{osso} \sim 10^{10}$ N/m^2
- 40 kg (su una gamba) => F ~ 400 N
- L ~ 0.9 m (1/2 altezza)
- A ~ 10 cm^2 ~ 10^{-3} m^2

=> $k = YA/L \sim 1.1\ 10^7$ N/m

$\Delta L = F/k \sim 3.6\ 10^{-5}$ m = 36 μm

(verifica a posteriori: $\Delta L/L \sim 4\ 10^{-5}$ piccolo, si può quindi ammettere che valga la legge di Hooke)

Applicazione delle leggi dell'elasticità

- confronto formica-elefante sotto l'azione del proprio peso
- assumiamo che siano fatti con lo stesso materiale, stessa resistenza al carico, stessa densità

  $\rho = M/V = M/L^3$
- schematicamente prendiamo dei cubi, formica, area di base $A = L^2$, $M = \rho V = \rho L^3$
- $F/A = Mg/L^2 = \rho L^3 g/L^2 = \rho L g$
- elefante, $L' = nL$, $A' = n^2 L^2$, $P = n^3 Mg$ $n \sim 1000\text{-}3000$
- $F'/A' = n^3 Mg/n^2 L^2 = n\, \rho L g$

  se lo sforzo di rottura è lo stesso ⇨ zampe (ossa) dell'e. devono essere molto più tozze di quelle della f.

Fine della meccanica