



Stay hungry,
stay foolish!
Steve Jobs

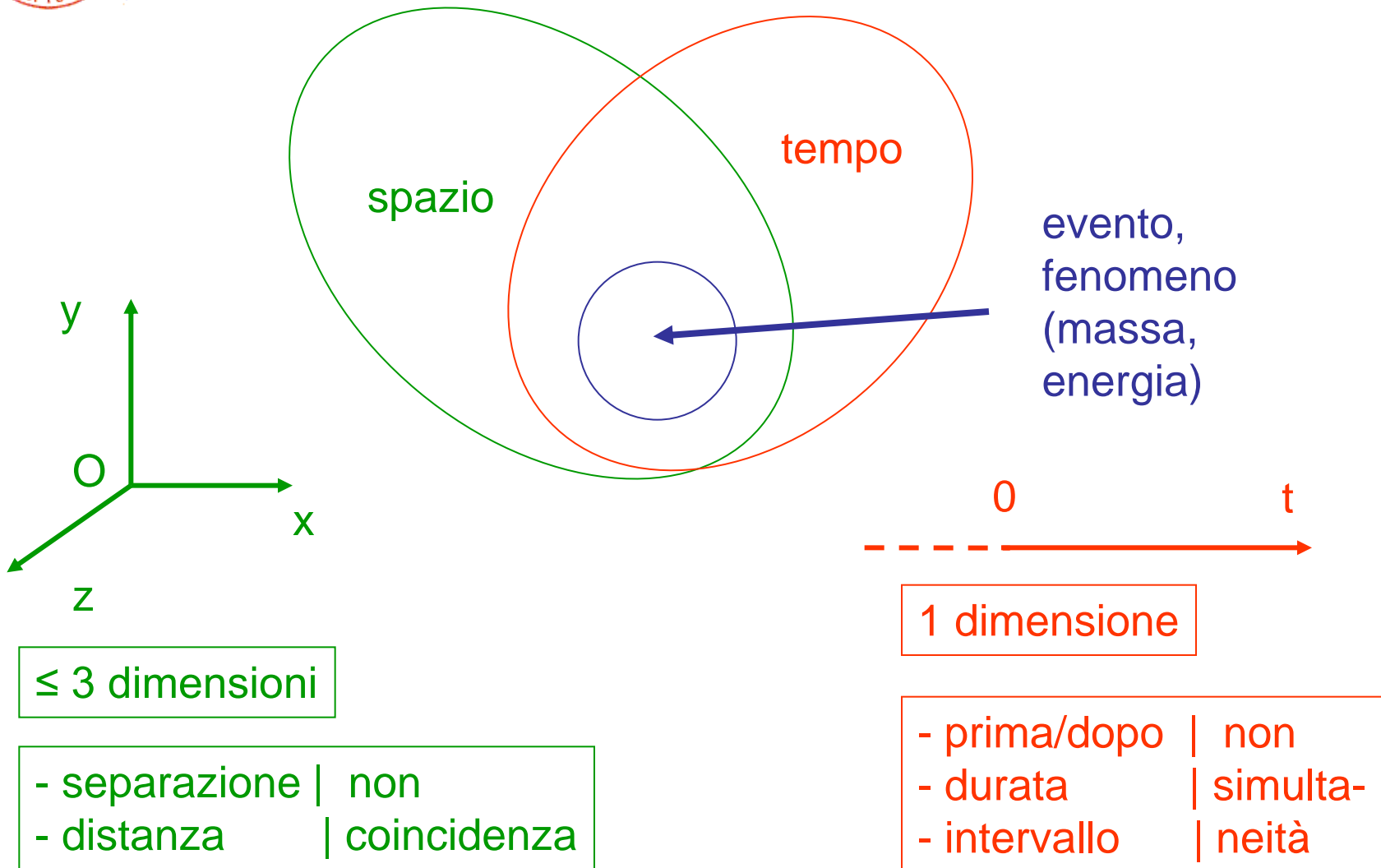
Meccanica



Corso di Fisica per CTF
AA2015/16



Preliminari: spazio & tempo

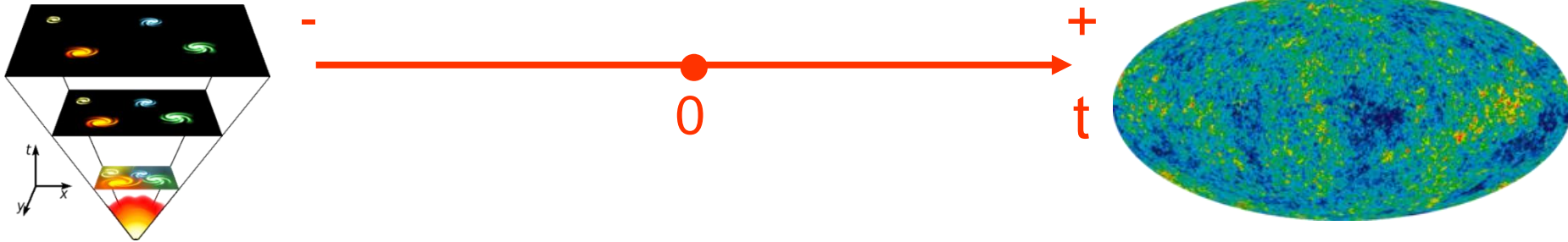




Tempo (2)



- tempo, t , trascorso a partire da un'origine dei tempi (arbitraria, comoda), +vo o -vo, futuro o passato – noi andiamo solo verso il futuro



(non esiste il tempo «assoluto»; il big bang, la nascita dell'universo, ha avuto luogo $\approx 13.7 \times 10^9$ anni fa, Edwin Hubble, 1929(*))

- intervallo di tempo, $\Delta t = t_2 - t_1$, fra due eventi, del tutto svincolato dall'origine dei tempi (matematicamente è quasi lo stesso se si pone $t_1 = 0$ e $t_2 = t$)

(*) La tecnica per misurare la distanza delle galassie lontane è stata sviluppata da Henrietta Leavitt, 1912. L'idea dell'universo in espansione è di Georges Lemaître, 1927



Punto materiale (P)

- estensione piccola rispetto al laboratorio
- struttura ininfluyente ai fini del movimento
- es.
 - stella rispetto ad una galassia, pianeti rispetto al sistema solare
 - sasso rispetto alla terra e/o
Aula_2D_Via_della_Beverara_123/1
 - molecola in un volume di gas (ad es. 1 litro)
 - etc.
- NB1 il p.m. è differente da (non è identico a) un punto geometrico
- NB2 il fatto che sia materiale (m) sarà rilevante poi nella dinamica



Meccanica 1a parte

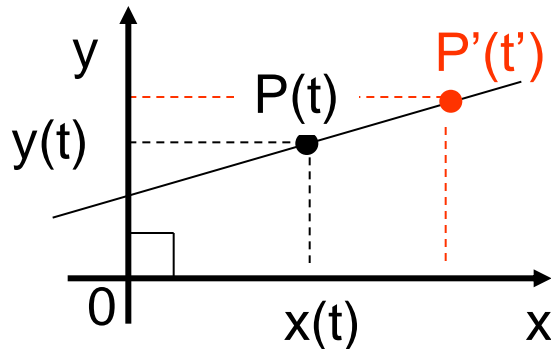


Cinematica



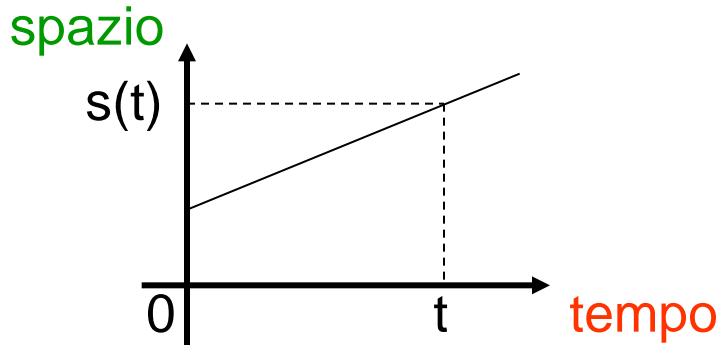
Sistemi di riferimento, eq. oraria

- il moto è relativo => sistema di riferimento



(P occupa varie posizioni nel piano/spazio [2d/3d] cartesiano al passare di t; 1 dimensione: x occupa varie posizioni lungo l'asse x al passare di t => $x = x(t)$)

- spazio percorso nel tempo, eq. oraria

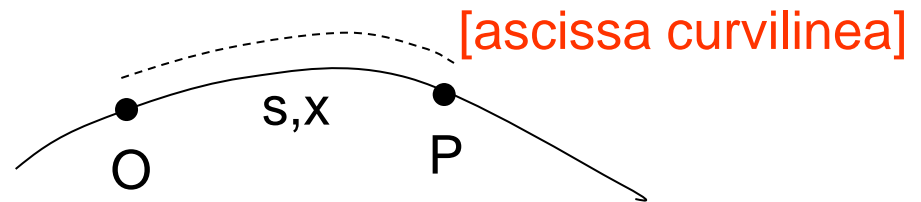
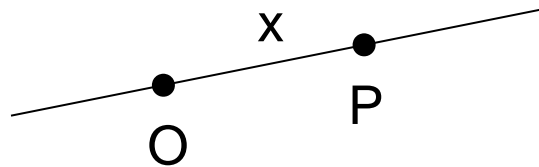


se ci interessa la distanza percorsa in un certo tempo indipendentemente dalla direzione



Moto in 1 dimensione

- in questo caso conta solo il verso +vo o -vo dello spostamento nel tempo => possiamo usare quantità scalari (non cambia la direzione)
- due possibilità: **moto lungo una retta, x**, o **moto lungo una traiettoria (curva) fissata, s o x**



- si definisce
velocità media = $\frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato a percorrerlo}}$

$$\boxed{v_m = \frac{s}{t}} \quad \text{o} \quad \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{o} \quad \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad [\rightarrow \Delta t = \Delta x/v]$$

(utile negli esercizi)

(ad es. il sistema tutor sull'A14, sull'A1 etc.)



Velocità

- la velocità istantanea è ($\Delta t \rightarrow 0$, uguale a $t_2 \rightarrow t_1$)

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{dx}{dt}$$

in generale

$$x = x(t)$$

$$v = v(t)$$

- le dimensioni di v sono

$$[v] = [s/t] = [st^{-1}] = [LT^{-1}]$$

- l'unità di misura nel SI è m/s, nel CGS cm/s – altra unità usata è km/h etc. (eg v_{US708} o $HVS2 \sim 1200$ km/s)

6 m/s = ? cm/s; si moltiplica per $1 = 10^2$ cm/m

$$6(\cancel{\text{m/s}}) \cdot 10^2 \text{ cm}/\cancel{\text{m}} = 6 \cdot 10^2 \text{ cm/s}$$

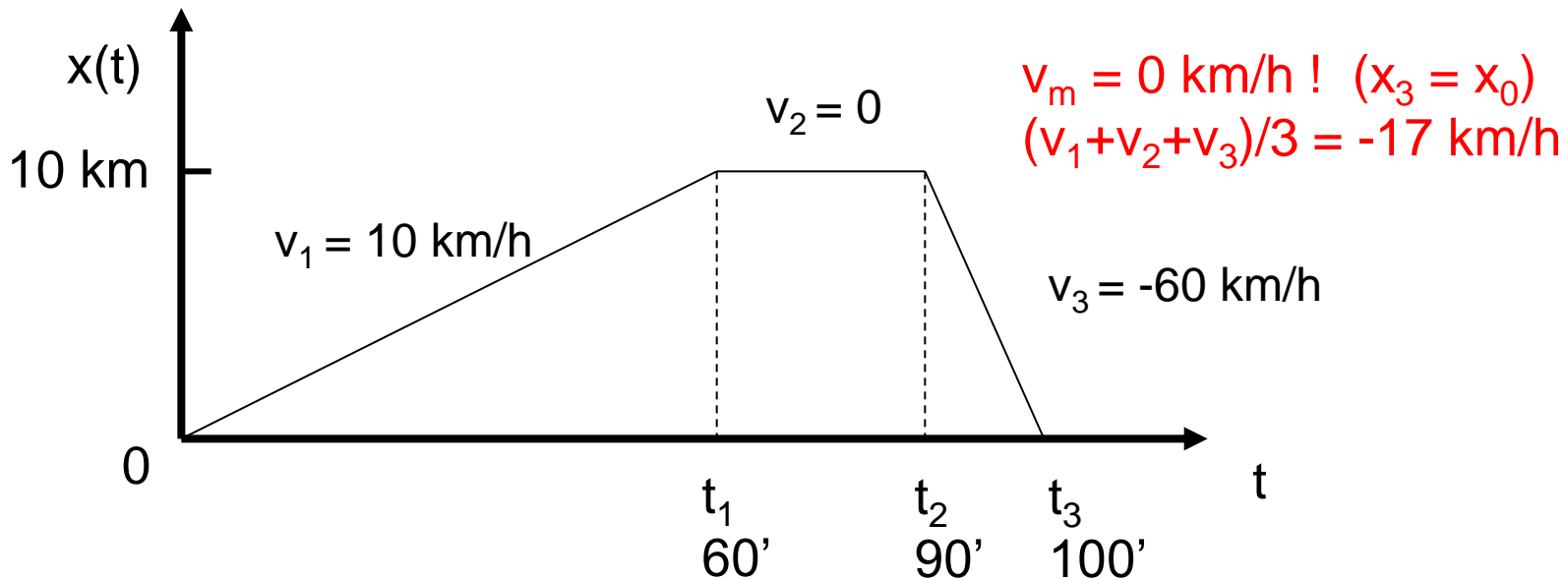
se devo convertire un'unità a numeratore la metto a denominatore nel rapporto unitario etc.; NB $s^{-1} \rightarrow s^{-1}$

(ad es. \sim l'autoveloX)



Velocità (2)

- $2.5 \text{ m/s} = ? \text{ km/h}$: $1 = 1 \text{ km}/10^3 \text{ m}$ $1 = 3.6 \cdot 10^3 \text{ s/h}$
 $2.5 \cancel{\text{m/s}} \cdot 3.6 \cdot 10^3 \cancel{\text{s/h}} \cdot 1/10^3 \cancel{\text{km/m}} = 2.5 \cdot 3.6 \text{ km/h} = 9.0 \text{ km/h}$
- **NB in generale: v . media \neq media delle velocità**
(se i Δt sono diversi), ad es.





Velocità (3)

- $v_m = [x(t_3) - x(0)] / (t_3 - 0) = (0 - 0) \text{ km} / 100 \text{ min} = 0$ ←
- $\underline{v} = (\sum_{i=1,3} v_i) / 3 = (10 + 0 - 60) / 3 \text{ km/h} = -17 \text{ km/h}$ ←
- in formule (*)

$$v_m = (\sum_{i=1,n} \Delta x_i) / (\sum_{i=1,n} \Delta t_i) = (\sum_{i=1,n} v_i \Delta t_i) / (\sum_{i=1,n} \Delta t_i)$$

quindi solo se i Δt_i sono tutti = Δt , si ha

$$\sum_{i=1,n} \Delta t_i = \sum_{i=1,n} \Delta t = n \Delta t \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1,n} v_i \Delta t = \Delta t \cdot \sum_{i=1,n} v_i$$

→ $v_m = \Delta t \cdot (\sum_{i=1,n} v_i) / (n \Delta t) = (\sum_{i=1,n} v_i) / n = \underline{v}$

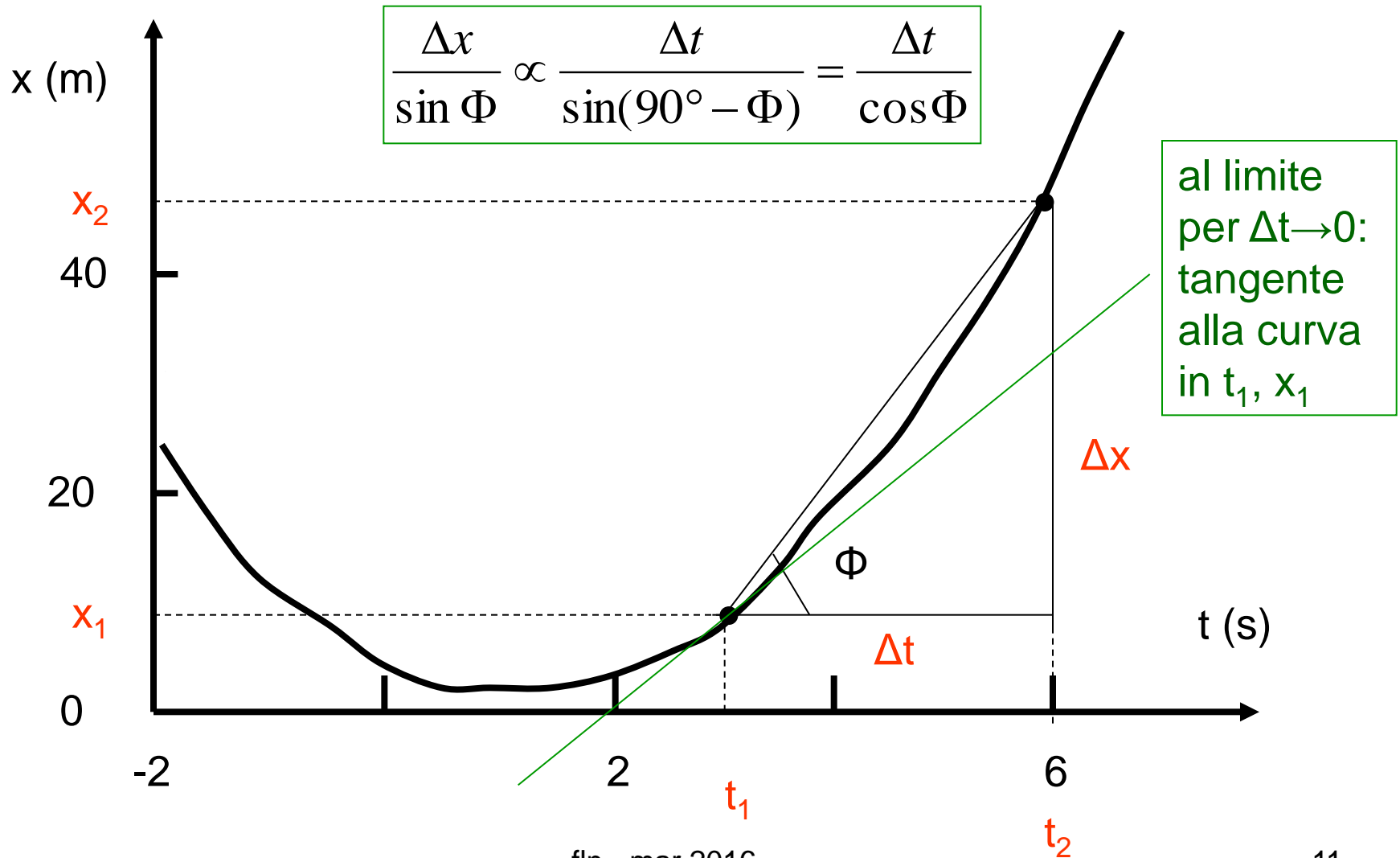
- se si conoscono $\Delta x_i, v_i \Rightarrow \Delta t_i = \Delta x_i / v_i$ e si ha

$$v_m = (\sum_{i=1,n} \Delta x_i) / (\sum_{i=1,n} \Delta x_i / v_i)$$

(formula utile per gli esercizi)



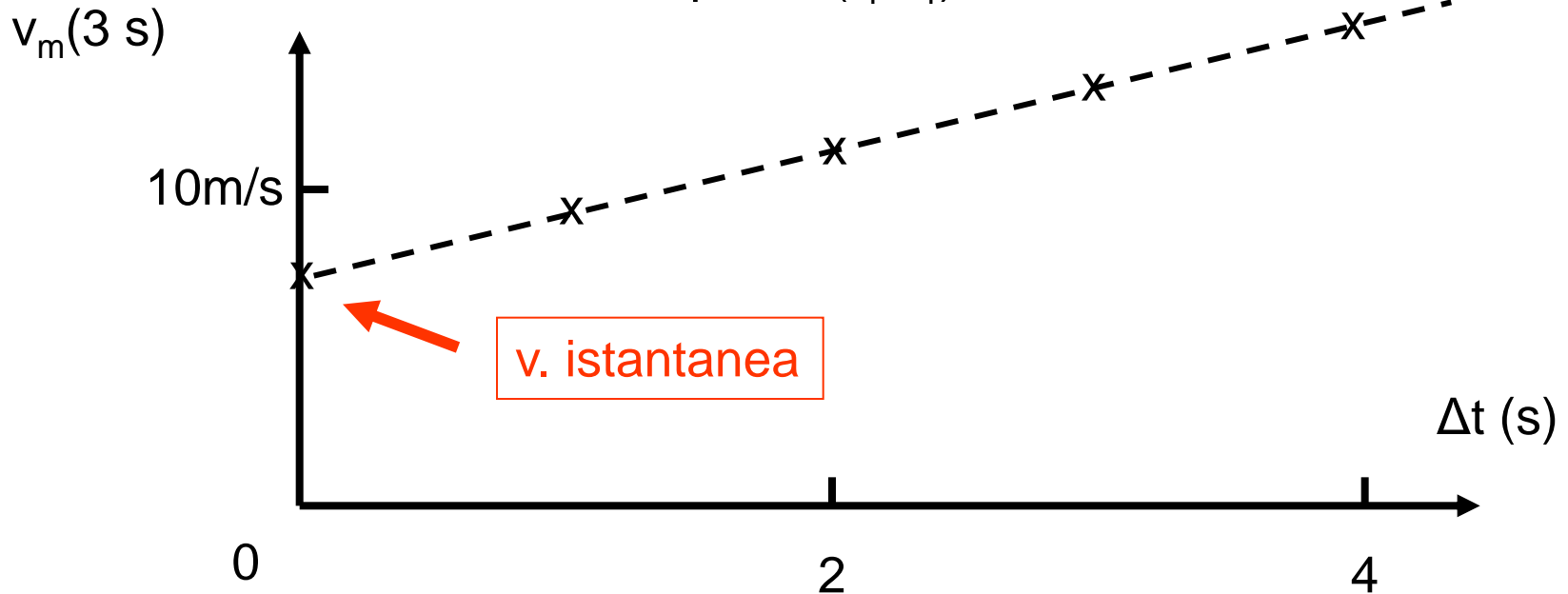
Significato geometrico di v_m (corda) e di v istantanea (tangente alla eq. oraria)





Significato geometrico di v_m e di v istantanea (2) (*)

- data la curva $x = x(t)$ (lucido precedente)
 - $v_m = \Delta x / \Delta t \sim \text{tg } \Phi$ dà la direzione della corda tirata fra i punti (t_1, x_1) e (t_2, x_2)
 - $v(t_1) = dx/dt|_{t_1}$ dà la direzione della tangente alla curva nel punto (t_1, x_1)





Accelerazione media e istantanea

- in generale $v = v(t)$, si definisce accelerazione media

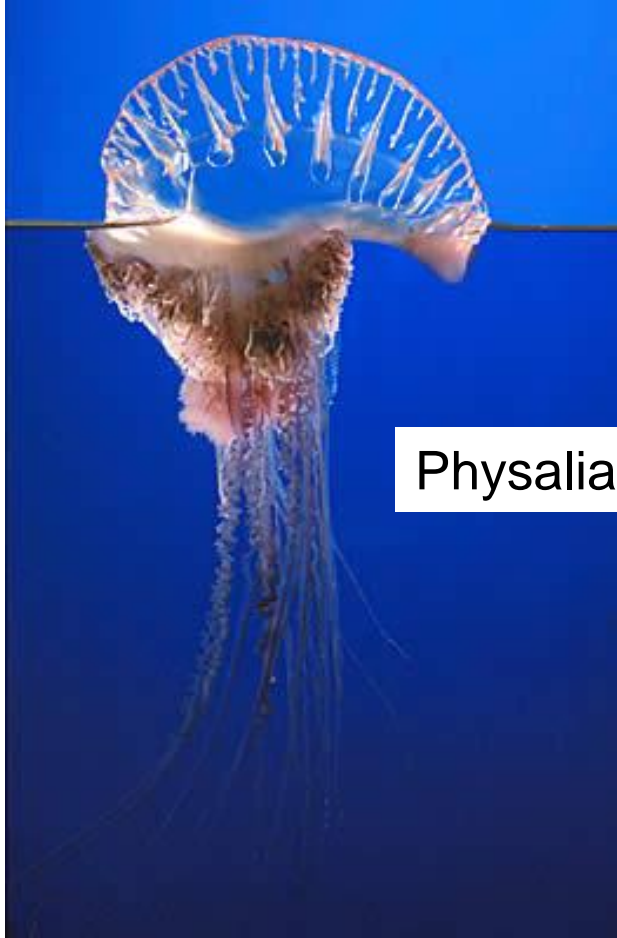
$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- e accelerazione istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

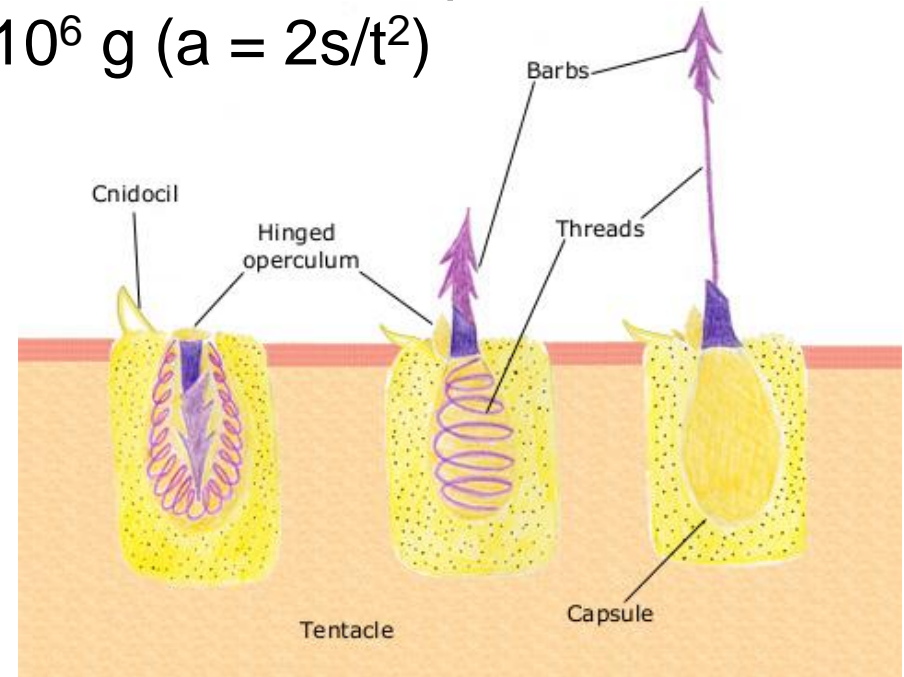
- $[a_m] = [a] = [v/t] = [st^{-1}t^{-1}] = [LT^{-2}]$
- unità SI: m/s^2 CGS: $cm/s^2 = 10^{-2} m/s^2$
- g (accelerazione di gravità) $\approx 9.81 m/s^2 = 981 cm/s^2$

Un esempio di accelerazione



Physalia

- L'esplosione dei pungiglioni del Portuguese Man O' War (una colonia di 4 specie di polipi, che dipendono gli uni dagli altri) dura appena 700 ns su 13 μm \rightarrow
 $a = 5 \cdot 10^6 \text{ g}$ ($a = 2s/t^2$)



[per la formula $a = 2s/t^2$
vedi i lucidi successivi]



Moto uniforme e uniformemente accelerato

Casi particolari

- moto uniforme (rettilineo o su traiettoria fissa, potrei usare anche x)

$$v_m = v_0 = \text{cost} = \Delta s / \Delta t = (s - s_0) / (t - 0) \quad \text{indipendente da } t$$

$$\Rightarrow \boxed{s = v_0 t + s_0} \quad (*) \quad s = s(t)$$

$$a = 0 \quad \text{infatti } a_m = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) = (v_0 - v_0) / (t_2 - t_1) = 0$$

- moto uniformemente accelerato

$$a_m = a_0 = \text{cost} = \Delta v / \Delta t = (v - v_0) / (t - 0) \quad \text{indipendente da } t$$

$$\Rightarrow \boxed{v = a_0 t + v_0} \quad (*) \quad v = v(t)$$

capita spesso!
per es. $a_0 = g$

(*) le cost. s_0 nella 1a eq. e v_0 nella 2a dipendono dalla scelta dell'origine dei t



Moto uniformemente accelerato (2)

per trovare $s(t)$ partiamo dalla def. di v_m nell'intervallo $(0, t)$

$$v_m = [s(t) - s_0]/t$$

siccome $v(t)$ varia linearmente, v_m sarà compreso fra v_0 e $v(t)$, sostituiamo quindi (*) a v_m la velocità a metà dell'intervallo $[v_0 + v(t)]/2$ ed usiamo l'ultima eq. della pag. precedente, $v(t) = v_0 + a_0 t$, ottenendo

$$[v_0 + v(t)]/2 = [2v_0 + a_0 t]/2 = [s(t) - s_0]/t$$

ossia risolvendo per $s(t)$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + 1/2 a_0 t^2$$

(*) può sembrare un «artificio», ma siccome la dipendenza è lineare, il calcolo integrale dà esattamente lo stesso risultato



Moto uniformemente accelerato (3)

recapitolando avremo tre eq. che descrivono il moto unif. acc.

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a(t) = a_0 \end{cases}$$

dove s_0, v_0 sono spazio percorso e velocità a $t = 0$. Se uso x per indicare lo spostamento in un moto rett. unif. acc. (o x anche per l'ascissa curvilinea), la prima eq. sarà

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad \text{etc.}$$

[applicazione, ad es.: misura di g per antimateria atomica (esperimento GBAR, 2018) <https://cds.cern.ch/record/1386684/files/SPSC-P-342.pdf> p. 77, interviene anche il principio d'indeterminazione!].



Moto uniformemente accelerato (4)

Se considero la caduta di un grave che parte da fermo **in assenza di attrito**, chiamando $h(t)$ l'altezza rispetto al suolo, ponendo cioè $h(0) = h_0$, poiché $a_0 = -g$ accelerazione di gravità in questo sistema di riferimento, ho

$$\begin{cases} h(t) = h_0 - \frac{1}{2} gt^2 \\ v(t) = -gt \\ a(t) = -g \end{cases}$$

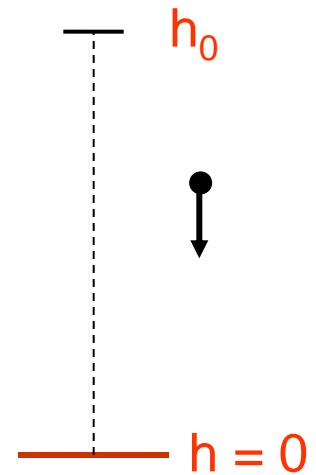
e il grave raggiunge il suolo, $h = 0$, dopo un tempo

$$t = \sqrt{2h_0/g} \quad (\text{da } 0 = h_0 - \frac{1}{2} gt^2)$$

$$h_0 = 55.86 \text{ m}, \theta = 3^\circ 59.4' \rightarrow t = ? \quad \Delta x \text{ alla base} = ?$$

$$t = 3.38 \text{ s} \quad \Delta x = 3.90 \text{ m}$$

fln - mar 2016





Moti in una dimensione

- vario $a = a(t)$ (il più generale)
se $av > 0$ accelerato ($av < 0$ decelerato)
 - uniforme $a = 0; v = cost$
 - uniformemente accel. $a = cost = a_0; v = v(t)$
- dalle 2 eq. per $x(t)$ e $v(t)$ *si elimina* il parametro t ,
per es. sostituendo dalla 2^a(*),

$$t = (v(t) - v_0) / a_0$$

e sostituendo nella 1^a

$$x(t) = x_0 + \underbrace{v_0(v(t) - v_0) / a_0}_t + \frac{1}{2} a_0 \underbrace{[(v(t) - v_0) / a_0]^2}_{t^2}$$




Una relazione molto importante per il moto unif. acc.

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \cancel{v_0}t/a_0 - v_0^2/a_0 + \frac{1}{2}(v^2 - \cancel{2v_0}t + v_0^2)/a_0 \\ &= x_0 - \frac{1}{2} v_0^2/a_0 + \frac{1}{2} v^2(t)/a_0 = x_0 + \frac{1}{2}(v^2(t) - v_0^2)/a_0\end{aligned}$$

che può essere riscritta

$$2a_0(x(t) - x_0) = v^2(t) - v_0^2$$

valida per **qualsiasi** moto uniformemente accel. –
intervengono esplicitamente solo **lo spazio, la
velocità e l'accelerazione**, per es. si ha

 $v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2a_0(x(t) - x_0)}$ etc.



Derivazione e integrazione

- se conosco $x(t)$ \longrightarrow $v(t) = dx(t)/dt$; $a(t) = dv(t)/dt$
- però nei problemi di meccanica (e non solo) si conosce l'accelerazione $a = F/m$ (vedi 2^a legge della dinamica, $\vec{F} = m\vec{a}$, più avanti)

\longrightarrow bisogna seguire il cammino inverso ed integrare

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt; \quad s(t) = \int_0^t v(t)dt$$

(questa operazione è stata fatta “di nascosto” nel ricavare le formule del moto uniformemente accelerato, vedi anche p. 23)



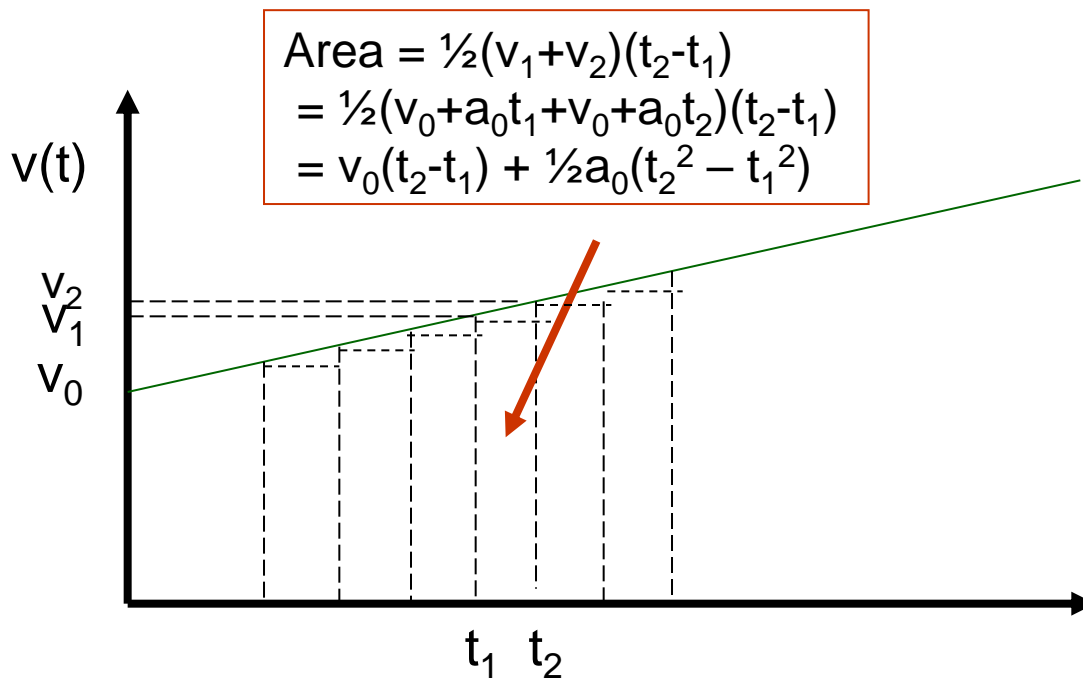
Qualche semplice regola(*)

- la derivata di una costante è zero $(d/dt)\text{cost} = 0$
(**ma anche $\Delta(\text{cost}) = \text{cost} - \text{cost} = 0$!**)
ad es. $dv_0/dt = 0$, $ds_0/dt = 0$ etc.
- una costante può essere portata fuori dal segno di derivazione (e di integrazione)
ad es. $d/dt(\frac{1}{2}a_0t^2) = \frac{1}{2}a_0(d/dt)t^2 = a_0t$ etc.
- la derivata di t^1 è $(d/dt)t = 1t^0 = 1$
ad es. $d(v_0 + a_0t)/dt = 0 + a_0$ etc.
- l'integrale di una costante è una retta di pendenza costante
ad es. $v(t) = \int_0^t a_0 dt = a_0 \int_0^t dt = a_0[t]_0^t = a_0(t-0) = a_0t$
- l'integrale di t^1 è $t^2/2$ etc.



L'interpretazione geometrica dell'integrazione(*)

- l'integrazione corrisponde al calcolo dell'area sotto la curva descritta dalla funzione – a rigore è la somma delle aree dei rettangoli $v_1(t_1)(t_2-t_1)$ quando $t_2 \rightarrow t_1$ o $\Delta t \rightarrow 0$



$$\Delta t = \Delta v / a_0$$

nel nostro es.,
variazione lineare,
l'integrale può
essere calcolato
direttamente
sommando l'area
dei trapezi



Sommario cinematica ad 1 dimensione(*)

- $x(t) \rightarrow v(t) \rightarrow a(t)$ procedimento diretto
 derivazione derivazione
- $a(t) \rightarrow v(t) \rightarrow x(t)$ procedimento inverso
 integrazione integrazione
- **NB** in dinamica si parte da $\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m$



Moto in 2 (3) dimensioni





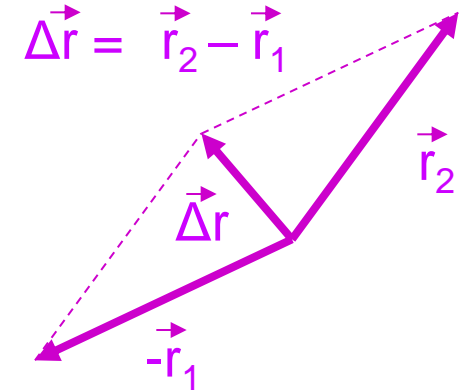
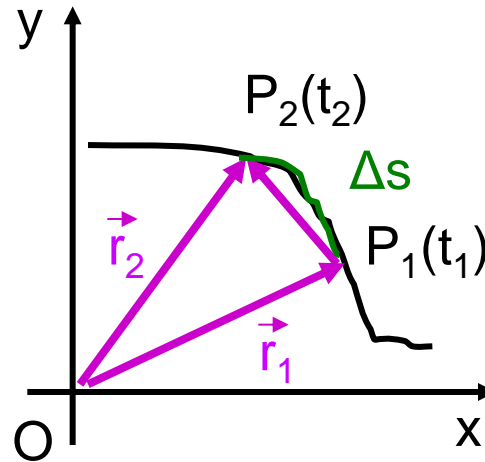
Velocità nel piano

(spostamento)

\vec{r} – raggio vettore

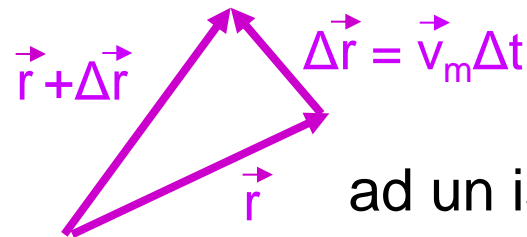
vettore velocità media:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



vettore velocità istantanea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



ad un istante generico t

il vettore velocità al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ (ossia per $t_2 \rightarrow t_1$) risulta *sempre* tangente (proporz. a $\Delta \vec{r}$, Δt è scalare) alla traiettoria (nell'es. in P_1)



Accelerazione nel piano

- \vec{a} nel piano è in generale sia tangenziale che centripeta (\vec{v} in generale varia sia in modulo che in direzione e verso)

- accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

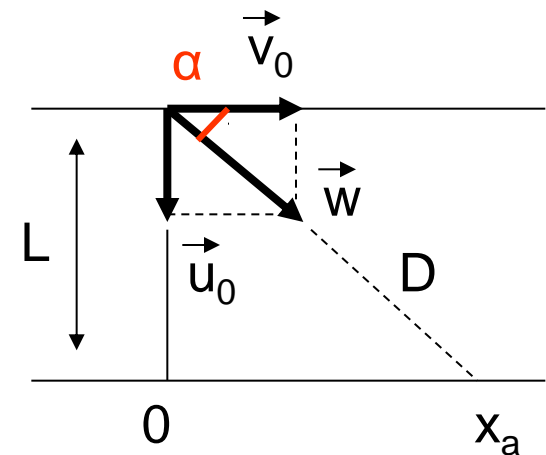
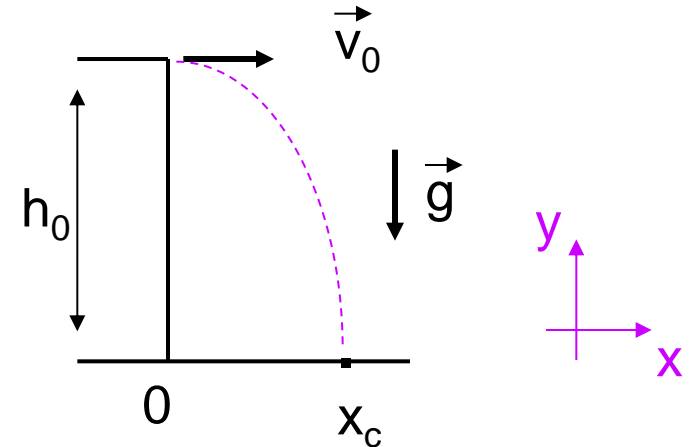
- NB nel moto rettilineo \vec{v} varia solo in modulo e verso (v) \Rightarrow \vec{a} risulta esclusivamente tangenziale (a)



Moti piani - composizione dei movimenti

(x, y sono indipendenti (\perp))

- $v_0 = 6 \text{ m/s}$; $h = 20 \text{ m}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
 $y_{\text{caduta}} = 0 \text{ m}$; $x_{\text{caduta}} = ?$
 $x = v_0 t$; $y = h_0 - \frac{1}{2} g t^2$
 $\rightarrow t_c = \sqrt{2h_0/g} = 2.02 \text{ s}$ (lo stesso che cadendo da fermo)
 $\rightarrow x_c = v_0 \sqrt{2h_0/g} = 6 \cdot 2.02 = 12.1 \text{ m}$
- barca (nuotatore) vs corrente
o vespa (mosca) vs abitacolo
attraversam.: $t_a = L/u_0 = D/w = x_a/v_0$
(lo stesso che senza corrente ($v_0 = 0$))
 $w = \sqrt{v_0^2 + u_0^2}$ (velocità vista dalla riva (o ciglio della strada))
 $x_a = v_0 t_a = v_0 L/u_0$; $y_a = 0$
 $\alpha = \text{arctg}(u_0/v_0)$

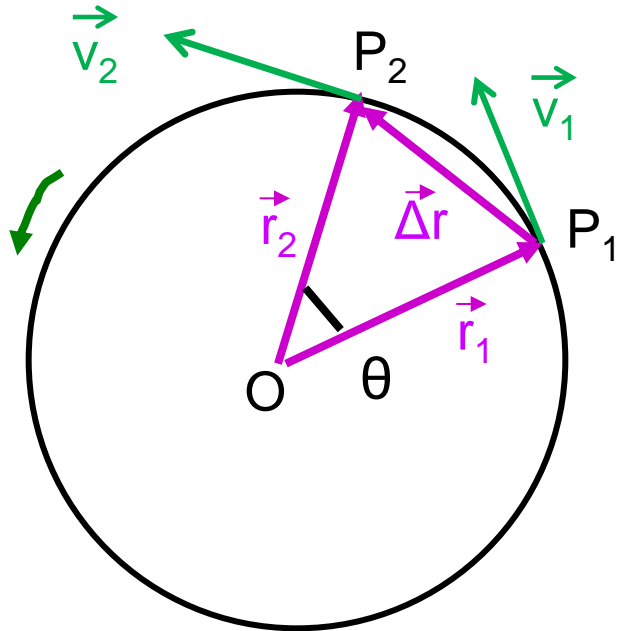




Moto circolare uniforme (e non)

L'altro es. di moto piano (l'opposto del m. rettilineo)

- moto circolare: $r = |\mathbf{r}| = \text{cost}$ $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$
- uniforme/periodico: solo se $v = |\mathbf{v}| = \text{cost}$ $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$



Il periodo T è il tempo impiegato a fare un giro completo ($r, v = \text{cost}$)

$$T = 2\pi r/v = 1/\nu$$

(frequenza = periodo⁻¹)

La velocità angolare $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ è l'angolo per unità di tempo

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu \quad (\omega = v/r)$$

NB ω si misura in rad/s

ν si misura in s⁻¹ o hertz (Hz)

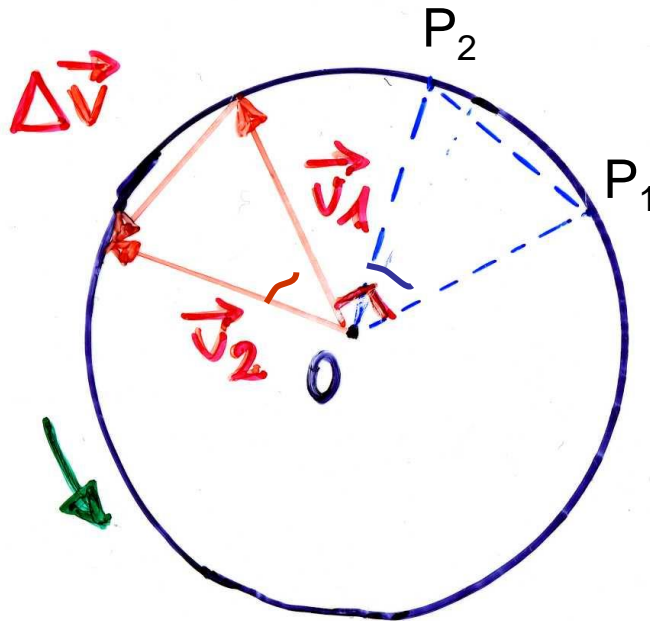
gli inglesi differenziano
fra speed (v) e velocity (\vec{v})



Moto circolare uniforme (2)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} \perp \vec{r}$$



$$\boxed{v = r\omega} = r 2\pi \nu \quad (\text{in modulo})$$

[dalla def. di T: $v = 2\pi r/T = (2\pi/T)r$]

ω

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} \text{ anti } // \vec{r}}$$

(\vec{a} è parallela a $\Delta \vec{v}$)

$$a = \Delta v / \Delta t = (v/r) \Delta r / \Delta t$$

($\Delta v/v = \Delta r/r$, triangoli simili)



Accelerazione centripeta

passando al limite si ha il modulo di a , l'indice c implica una a centripeta

$$a = \frac{v}{r} v$$

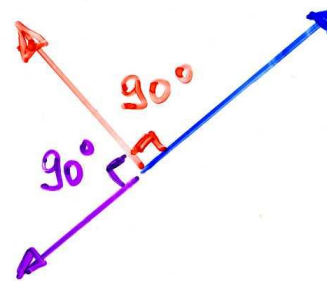
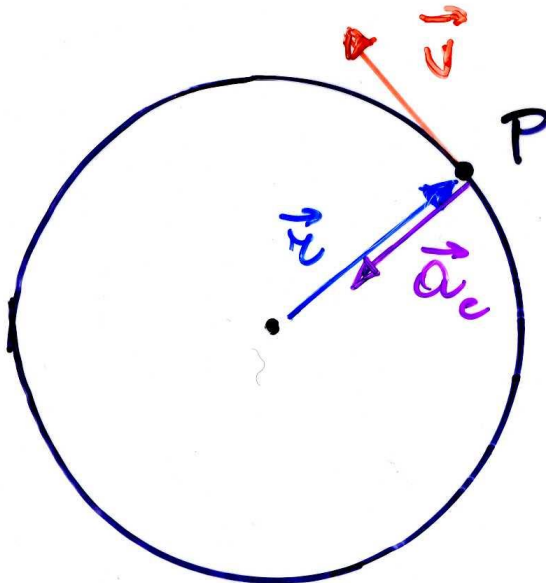


$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

(in modulo)

\vec{a}_c : direzione di \vec{r} , verso opposto

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$



$$a_c = \omega v$$

(l'acc. centripeta, \vec{a}_c , è diretta verso il centro della circonferenza; in generale, se la traiettoria non è circolare, verso il centro di curvatura della traiettoria)

se il m.c. non è uniforme ci sarà anche una $a_t = r\Delta\omega/\Delta t$ (vedi p. 86)



L'accelerazione nel moto circolare uniforme (*)

- nel piano abbiamo 2 eq. differenziali
 - $\vec{r}(t)$ ha componenti $x(t)$ e $y(t)$; $\vec{v}(t)$ ha componenti $v_x(t)$ e $v_y(t)$; $\vec{a}(t)$ ha componenti $a_x(t)$ e $a_y(t)$

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y(t)$$

- soluzione: \forall funzione $f(t)$ che derivata 2 volte dia $-\omega^2 f$ [ad es. $f(t) = x_0 \cos(\omega t)$, $df/dt = -\omega x_0 \sin(\omega t)$, $d^2f/dt^2 = d(df/dt)/dt = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t)$ con $x_0 = |\mathbf{r}|$ etc.]
 - ciascuna componente è armonica (v. dopo)

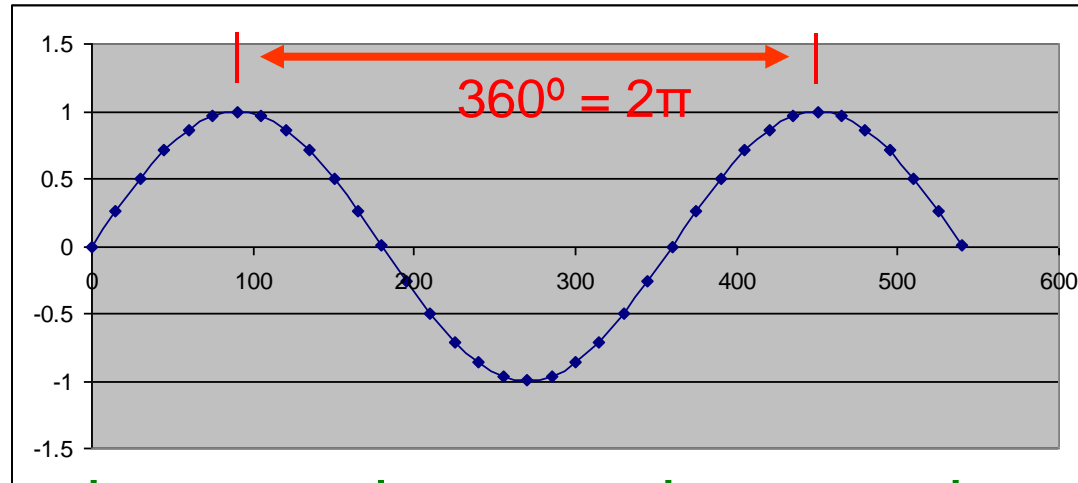


Funzioni elementari periodiche(*)

ad es.

$\sin \alpha$

periodo (distanza fra massimi o fra minimi successivi) = $360^\circ = 2\pi$



$\alpha (^\circ)$

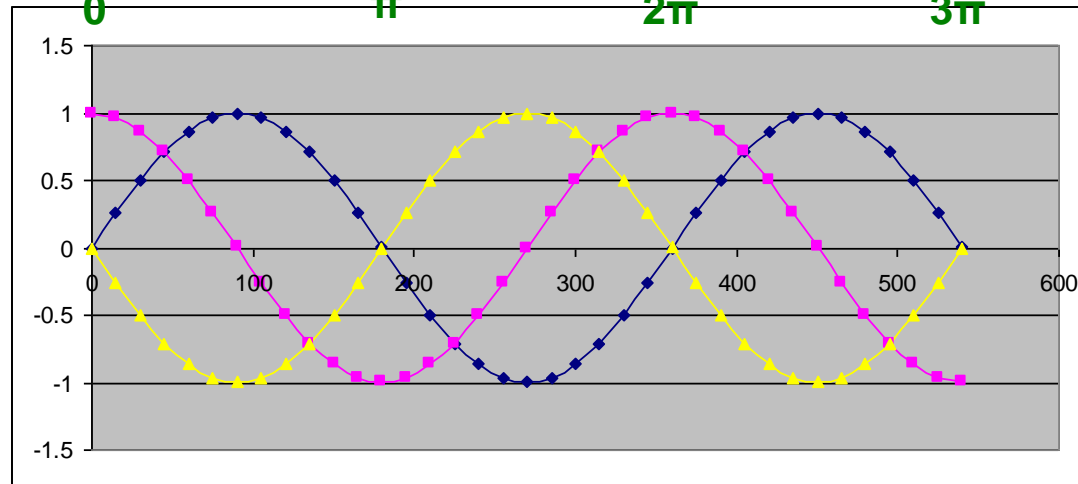
0 π 2π 3π α (rad)

$\sin \alpha$, la sua derivata 1^a, $\cos \alpha$, e la derivata 2^a, $-\sin \alpha$, hanno tutte uguale periodo

$\sin \alpha$

$\cos \alpha$

$-\sin \alpha$



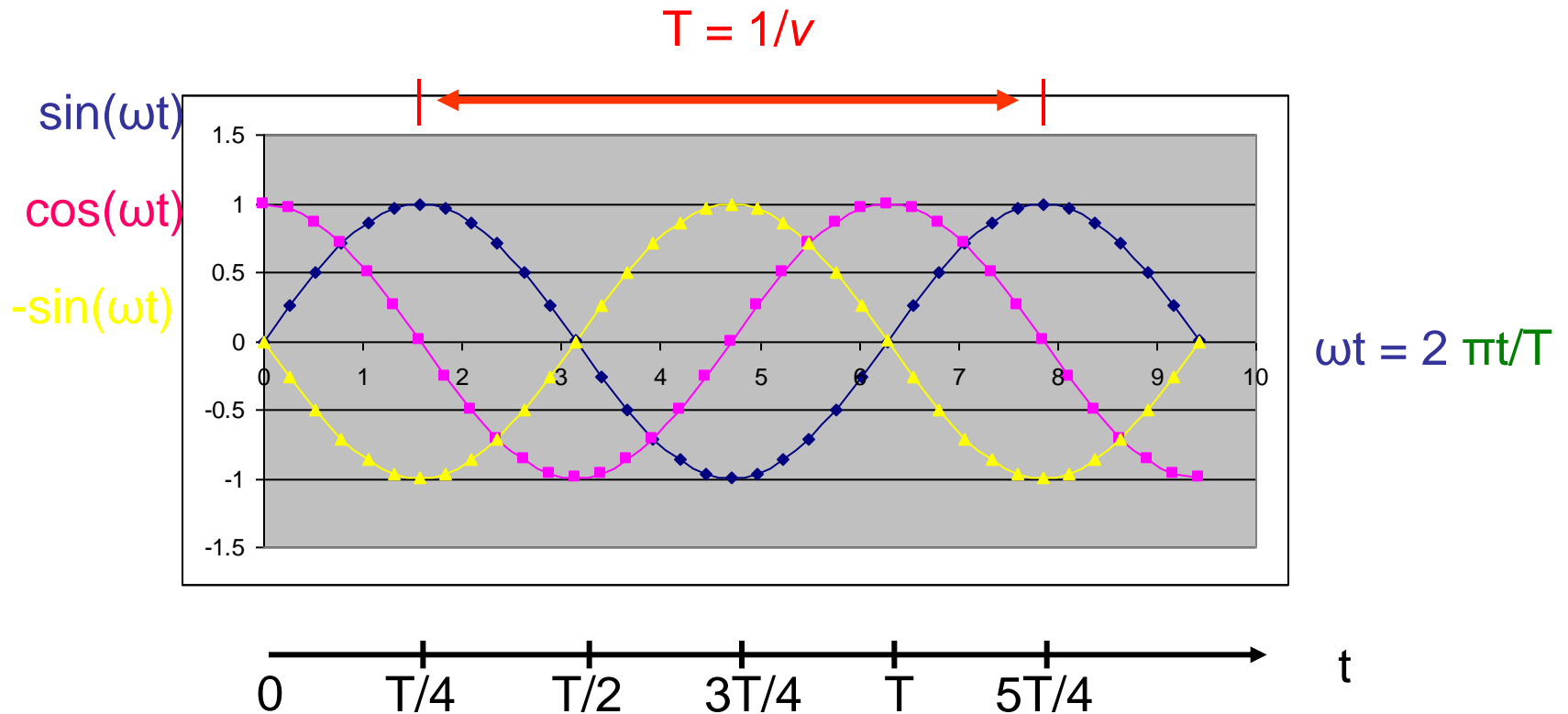
$\alpha (^\circ)$

(*) facoltativo



Funzioni elementari periodiche (2)(*)

$$f(t) = \sin(\omega t) = \sin(2\pi t/T); \quad df(t)/dt = \omega \cos(2\pi t/T); \quad d^2f(t)/dt^2 = -\omega^2 \sin(2\pi t/T)$$



NB ω in rad/s, t in s, ωt in rad

(*) facoltativo



Meccanica 2a parte

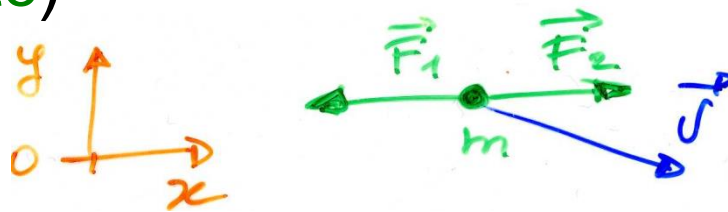


Dinamica



Enunciati dei 3 principi della dinamica, p.m. (Newton)

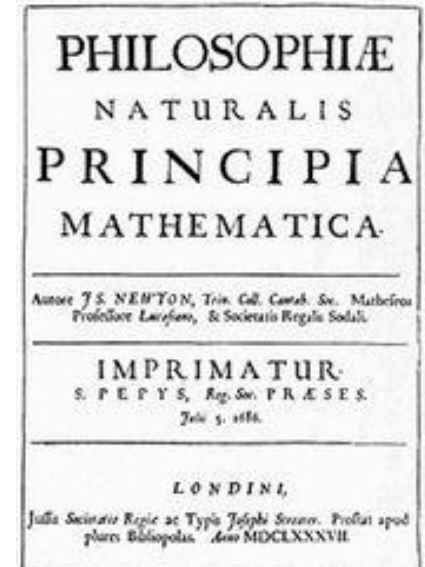
1. Inerzia: se $\Sigma_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{q} = m\vec{v} = \text{cost.}$
($\Sigma_i \vec{F}_i = \text{risultante}$)



2. Se $\Sigma_i \vec{F}_i \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \Sigma_i \vec{F}_i / m$ ($\vec{F} = m\vec{a}$)



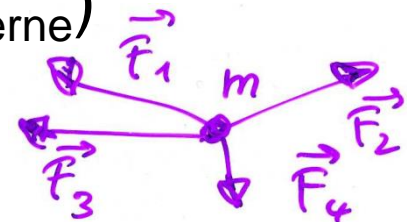
3. Simmetria delle azioni: $\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$





Cause del moto: le forze

- per la modifica dello stato di quiete/moto di un corpo: occorre un'interazione con altri corpi (a contatto o a distanza) - l'interazione è necessaria per variare la \vec{v} o la quantità di moto, $\vec{q} = m\vec{v}$, del corpo (**II principio**)
- in assenza d'interazione (forza) lo stato di quiete/moto (rettilineo uniforme) permane: principio d'inerzia (**I principio**)
- sistema inerziale (in cui vale il principio d'inerzia): per es. terna centrata sul sole, fissa rispetto alle stelle lontane – la terra è solo approx inerziale (rotazione)
- la risultante $\Sigma_i \vec{F}_i$ determina il moto del punto materiale (per oggetti estesi saranno solo le \vec{F}_{esterne})



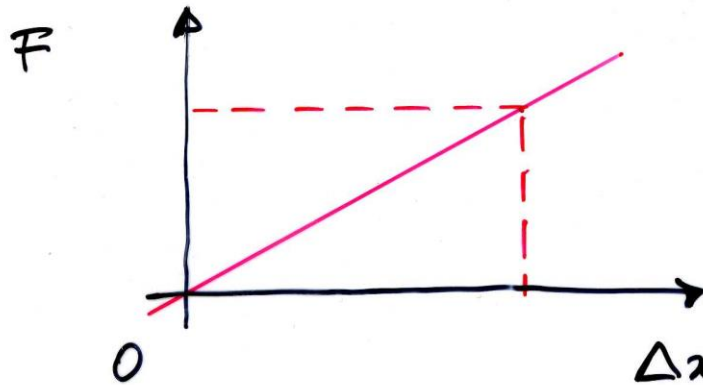


Forze: effetto dinamico ed effetto statico

- occorre una definizione operativa di forza, ossia dare il metodo di misura
- **constatazione**: tutti i gravi, se sono liberi di cadere, si sentono attratti dalla terra e cadono lungo la verticale verso il basso: sentono la forza peso o di gravità (effetto dinamico)
- **altra constatazione**: se lo stesso grave è vincolato ad una molla elicoidale non cade ma la deforma, la allunga (effetto statico)
- in generale, \forall forza vincolata produce una qualche deformazione
- la molla (il dinamometro) può essere usata per misurare le forze previa calibrazione ed entro il limite di elasticità (limite dato dalla validità della legge di Hooke): una volta calibrata, la molla può essere usata per \forall tipo di forze (elett., magn., etc.)
- la direzione del vettore forza è quella dell'asse della molla ed il verso è quello in cui si produce l'allungamento



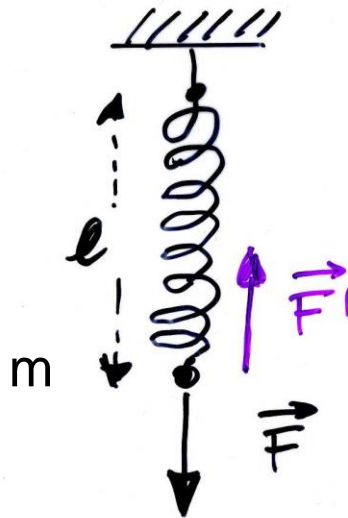
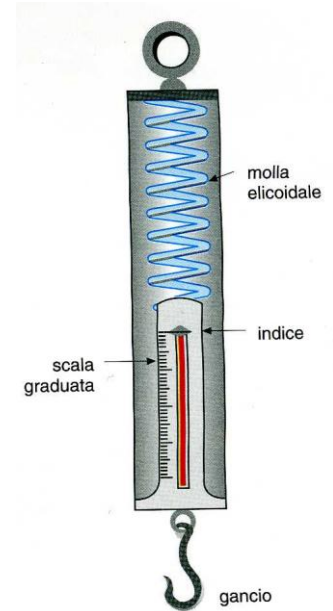
Dinamometro (molla) e misura statica delle forze



$$F = k \Delta x$$

↑
costante
delle molle

$$\Delta x = l - l_0$$



Legge di Hooke:
forza \propto allungamento

ad es. il cilindretto di Fe portato a lezione
($m = 44.83 \text{ g}$) produce una $l = 26 \text{ cm}$ sulla
molla ($l_0 = 19 \text{ cm}$): $\Delta x = l - l_0 = 7 \text{ cm}$

→ $k \propto m/\Delta x$

(si può vedere usando altre coppie m' , $\Delta x'$...)



Massa e Il principio della dinamica

- avendo fissato una scala di forza, possiamo constatare che una forza produce un'accelerazione (effetto dinamico)
 - in via di principio, posso applicare $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 \dots$ etc. note e registrare le accelerazioni $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \dots$ etc. sul corpo o p.m.:
i rapporti $F_1/a_1 = F_2/a_2 = F_3/a_3 = \dots = \text{cost.} = m$
 $\Rightarrow F/a = m$ ossia $F = ma$
 $\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$ (Il principio)
- con m massa (inerziale) del corpo
- \vec{F} e \vec{a} sono vettori e si combinano con la regola del parallelogramma – m non dipende dall'orientazione, **scalare**, nè dal tipo di forza (gravit., elast., elett., magn. ...), **proprietà intrinseca del corpo o p.m.**



Il principio, dimensioni e unità della forza

- dal II principio

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

scalare (inerzia)

{molla (f. elastica), peso, f. elettrica, f. magnetica}

il I principio si ottiene
per $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$

- dimensioni della f.:

$$[F] = [ma] = [MLT^{-2}]$$

- unità

- SI: $1\text{N} = 1\text{kg} \cdot 1\text{ms}^{-2}$ (newton)
- CGS: $1\text{dyne (o dina)} = 1\text{g} \cdot 1\text{cms}^{-2} =$
 $= 10^{-3}\text{kg} \cdot 10^{-2}\text{ms}^{-2} = 10^{-5}\text{N}$
- sist. ingegneri $1\text{kpg} = 1\text{kg} \cdot \text{g} = 1\text{kg} \cdot 9.81\text{ms}^{-2} = 9.81\text{ N}$
- $1\text{N} \approx$ forza peso esercitata da una mela (piccola, $m \approx 100\text{g}$)



q.d.m. e Il principio

- def.: $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$
 $[q] = [mv] = [MLT^{-1}]$;

quantità di moto
unità SI: kg m s^{-1}

$$\frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \vec{v} + m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

variazione della qdm

$$\text{se } m = \text{cost} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

(se $m = \text{cost}$; $\Delta m = 0$; m può essere portata fuori dal limite)

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = m\vec{a} = \vec{F}$$

- $\mathbf{F} = \Delta \mathbf{q} / \Delta t$; $\rightarrow \mathbf{F} \Delta t = \Delta \mathbf{q}$

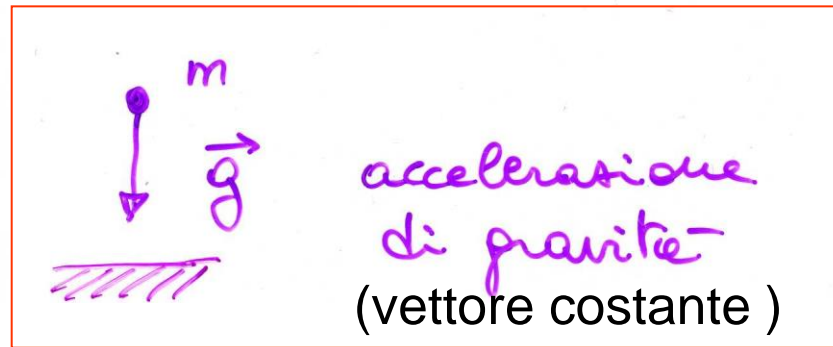
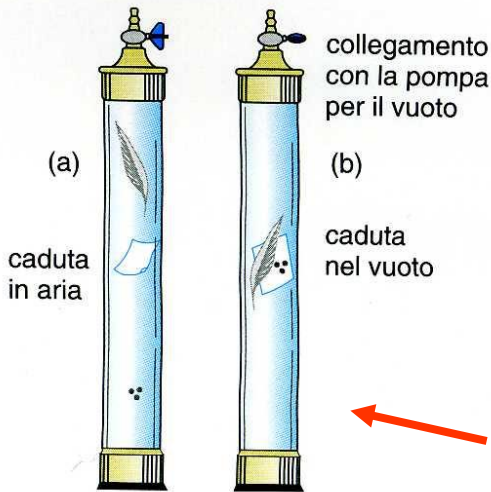
Il principio, alternativamente

l'impulso di una f., $F\Delta t$,
uguaglia la variazione
della qdm del corpo su
cui agisce (teorema
dell'impulso) – utile nei
problemi d'urto ($\Delta t \sim 0$)



Forza peso

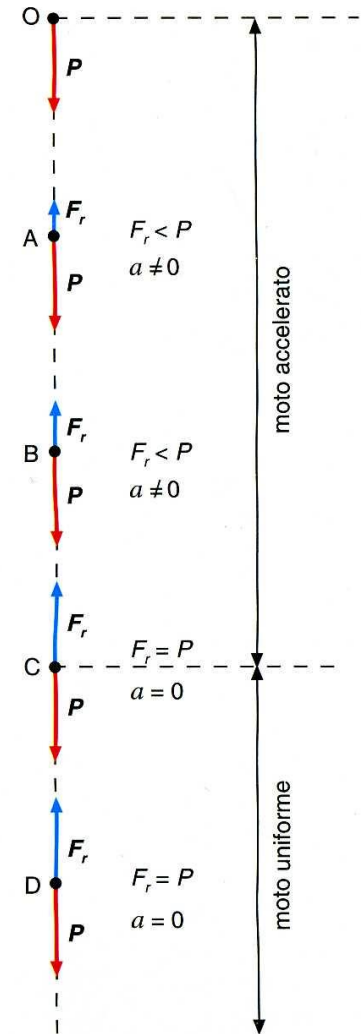
$mg = \mathbf{P}$ (per \mathbf{P} si usa anche la notazione \mathbf{F}_g)
accelerazione, forza dirette lungo la verticale verso il basso: \mathbf{g} è costante per tutti i corpi vicino alla superficie della terra (e.g. piuma, foglio di carta, pallini di Pb), \mathbf{P} è costante per un dato corpo



← assenza di attrito (dell'aria): tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione \mathbf{g}

attrito dell'aria

$$F_r = CAv^2$$





Peso ed equazione di moto

vicino alla superficie della terra
 $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$
(err. rel. = 0.34%)

eq. di moto generica

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

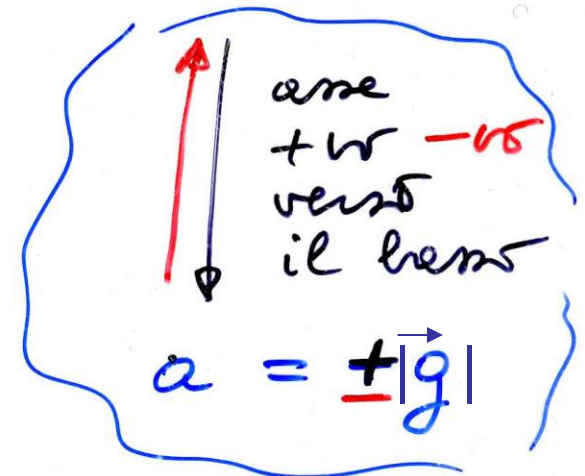
ad es. sotto l'azione delle forze per

$$\cancel{m} \vec{a} = \cancel{m} \vec{g}$$

eq. di moto di un corpo sotto l'azione della sola gravità \Rightarrow

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\vec{F}}{m} \\ (\vec{r}_0, \vec{v}_0 \text{ iniz.}) \end{aligned} \right\}$$



[$g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ a 0 m slm e 45° di lat. (varia dai poli all'eq.)]

fln - mar 2016

componente di \vec{a} secondo la verticale

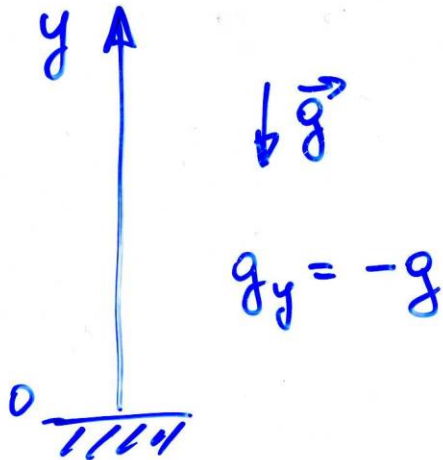


g e scelta del sistema di riferimento (*)

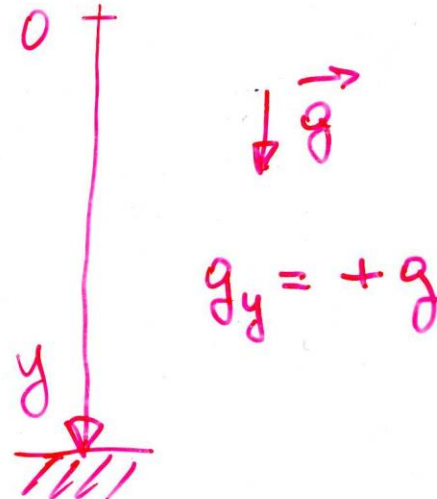
equatore	0m	9.780
poli	0m	9.832
45°	10Km	9.776

1) la terra ruota intorno al proprio asse; 2) non è esattamente sferica

se scelgo



se scelgo



g_y indica la componente di $\vec{g} = g_y \vec{j}$ secondo la verticale, dipende dalla scelta del riferimento, cioè dal verso del versore \vec{j}

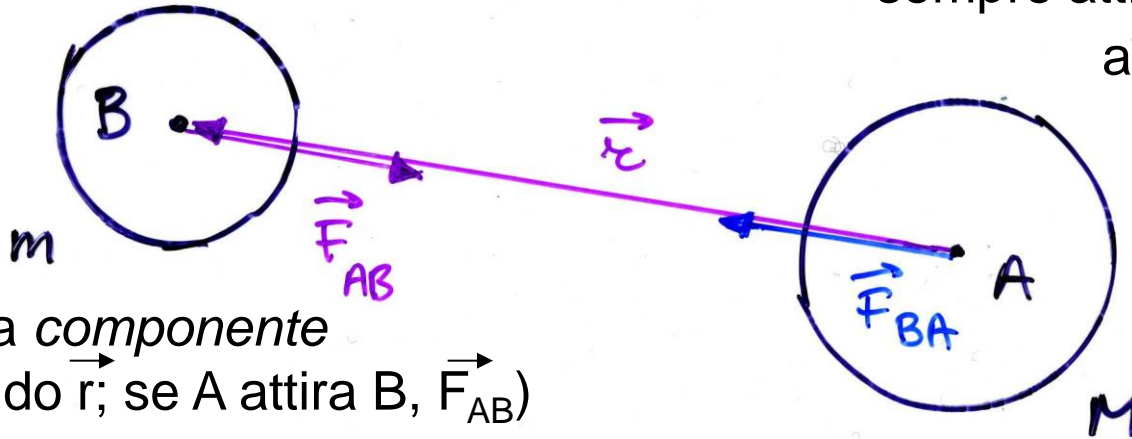
se lancio un corpo verso l'alto il moto sarà ritardato, se lo lascio cadere sarà accelerato

(*) facoltativa



Forza di attrazione gravitazionale (Newton)

corpi puntiformi (o sferici)



la forza gravitazionale è sempre attrattiva, cioè è antiparallela a \vec{r} ,
 $\vec{F}_g \propto$ vettore unitario
 - \vec{r}/r diretto in verso opposto a \vec{r}

(F_g indica la *componente* di \vec{F}_g secondo \vec{r} ; se A attira B, \vec{F}_{AB})

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \quad (*)$$

Legge di gravitazione universale -> unificazione caduta dei gravi, moto dei pianeti

valore attuale

$$G = (6.6738 \pm 0.0008) \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

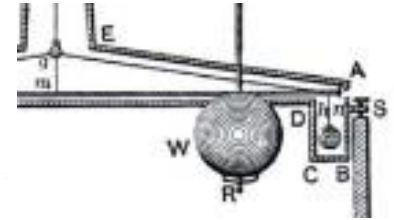
esperienza di Cavendish

fln - mar 2016

$$(*) \quad (1/r^2) \cdot \vec{r}/r = \vec{r}/r^3 !$$

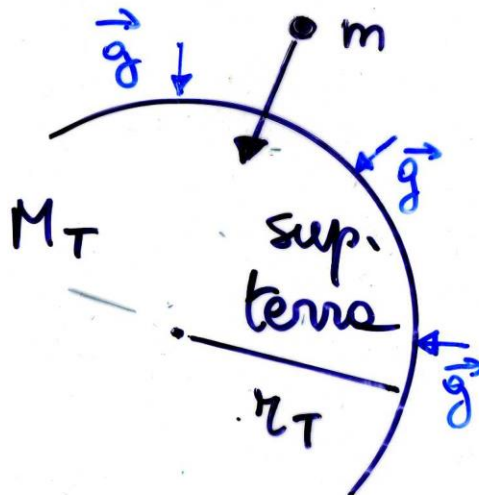


Forza di attrazione gravitazionale (2) e peso



$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

(III principio)



esperienza in lab.
(Cavendish)(*)

$$F_g = \left(G \frac{M_T}{r_T^2} \right) m = g m = P$$

$$M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ Kg}$$

si ricava

$$r_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

si misura, astron.

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

si misura, caduta

$$\rightarrow M_T = g r_T^2 / G$$

(*) con m, M, r e F,
tutte misurate $\rightarrow G$



Gravitazione universale: applicazioni



"Nothing yet. ...How about you, Newton?"

- Un satellite TV deve essere fisso rispetto alla parabola a terra. Che **altezza (h)** deve avere?
- $T = 1$ giorno siderale = 86164 s (**orbita geostazionaria**)
 $\omega = 2\pi/T = 7,292 \cdot 10^{-5}$ rad/s
 $a_c = \omega^2 r$ ma è anche $GM_T m/r^2 = ma_c$ [**F = ma**]
 $\rightarrow \frac{GM_T}{r^3} = \omega^2$ (**3^a legge di Keplero**)
 $r = \sqrt[3]{GM_T/\omega^2} = 4.216 \cdot 10^7$ m
 $h = r - r_T = 35.79 \cdot 10^6$ m
- **$T_{Luna} = ?$**
- sapendo che $R = 3.844 \cdot 10^8$ m (**distanza_m TL**)
 a_c della luna = $g(r_T/R)^2 = 2.700 \cdot 10^{-3}$ ms⁻²
ma è anche $a_c = (2\pi/T)^2 R$
 $\rightarrow T = 2\pi\sqrt{R/a_c} = 27.4$ giorni

NB all'equatore, che corrisponde alla «cintura» di (Sir Arthur C.) Clarke* (quello che ha avuto l'idea), 1945

vedi, più avanti, cap. Oscillazioni, T del pendolo s., piccole oscillazioni: dov'è la somiglianza?



Leggi di Keplero ($F \sim 1/r^2$)

es. sistema S/Pianeti

(anche atomo di Rutherford

–Bohr, p/e^- , $F=1/(4\pi\epsilon_0)e^2/r^2$):

1. orbite dei P ellittiche,
con S in un fuoco

2. il raggio vettore r_{SP}
spazza Aree uguali
in t uguali

3. $GM_S = \omega^2 r^3 \propto r^3/T^2$ →
 $M_S = \omega^2 r^3/G$

$\sim 2 \cdot 10^{30}$ kg

($r=1.5 \cdot 10^{11}$ m, $T=1$ a)

per orbite circolari

fln - mar 2016

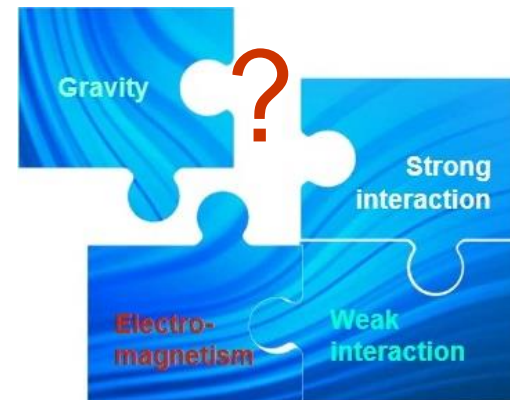




Storia dell'unificazione delle forze fondamentali

- Gravi cadono al suolo (Galilei)
 - Luna orbita la terra (Keplero)
 - Pianeti orbitano il sole (")
- Forza di gravità
(Newton ~1687)
- Elettricità
 - Magnetismo
 - Ottica
- Elettromagnetismo
(Faraday, Maxwell ~1860) (*)
- Forza nucleare debole ~1970-80
 - Forza nucleare forte ~1990

Rimane da spiegare perchè la gravità è così debole, $\sim 10^{-36}$ rispetto all'e.m. (*)



(*) vedi cap. e.m.



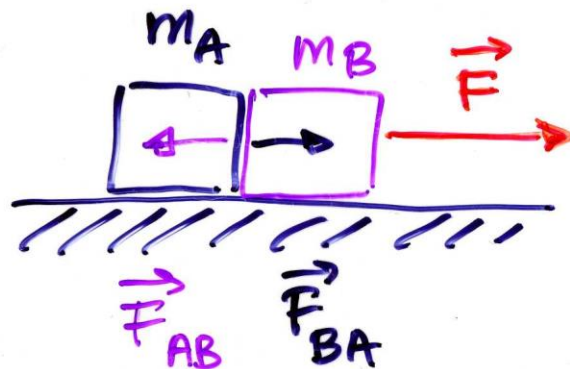
III principio e forze di contatto (*)

dati i corpi A e B che interagiscono,
per il III principio si ha $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$

III principio

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

- ad es. forze di contatto
(oggetti esteri)



$$m = m_A + m_B$$





III principio e forze di contatto (2) (*)

applichiamo separatamente il II principio ad A, B e A+B per trovare la forza di contatto \vec{F}_{AB} (\vec{F}_{BA})

$$A+B : m \vec{a} = \vec{F}$$

$$A : m_A \vec{a} = \vec{F}_{BA}$$

$$B : m_B \vec{a} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}$$

$$\sum (m_A + m_B) \vec{a} = \vec{F}$$

componente x

$$m a = F$$

$$m_A a = F_{BA}$$

$$m_B a = F - F_{AB}$$

$$(m_A + m_B) a = F$$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F} + \vec{F} \frac{m_B}{m_A + m_B} = -\vec{F} \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

NB F_{AB} cresce con F : un vincolo ideale è quindi in grado di sostenere una $F \forall$, non così un vincolo 'reale' (carico di rottura, vedi più avanti, elasticità)



III principio e forze di contatto/vincoli (3)

dati i corpi A e B che interagiscono, per il III principio si ha

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

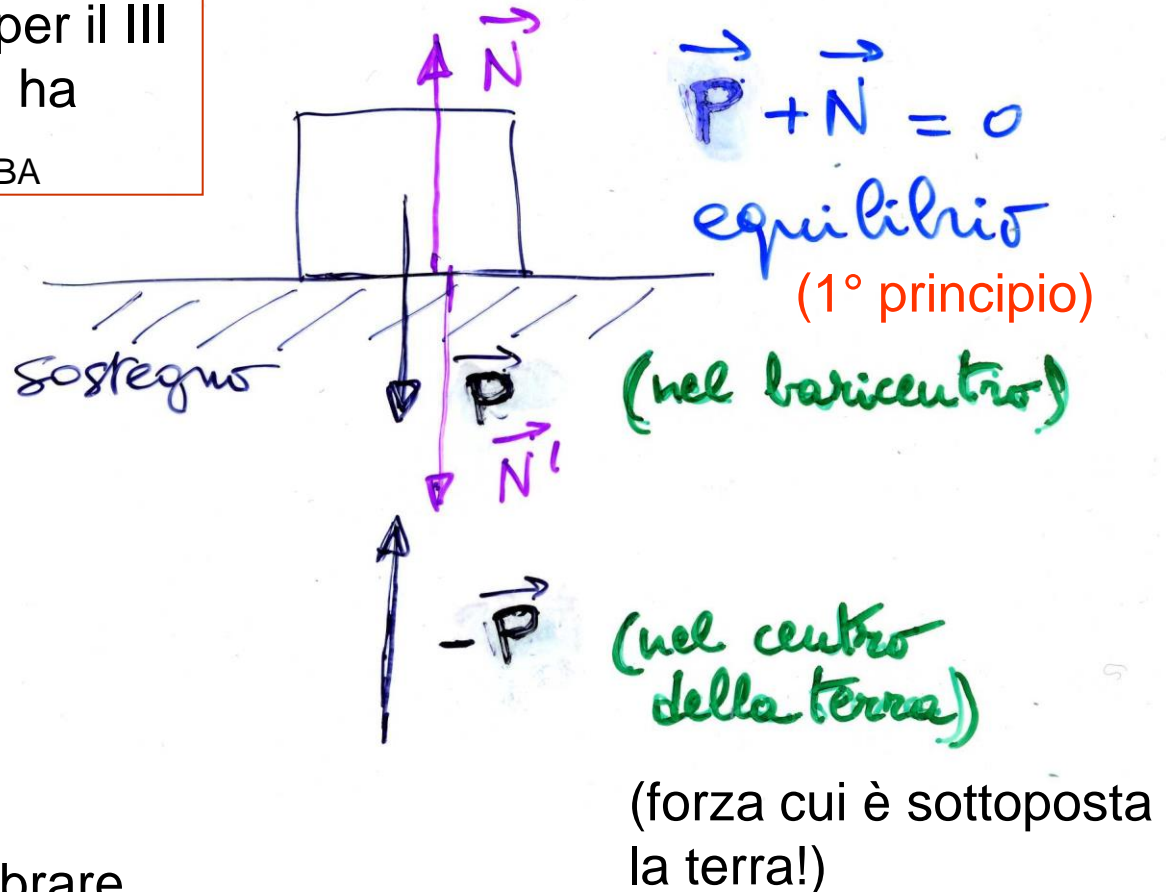
le coppie di forze del III principio sono applicate a corpi diversi

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$
$$\mathbf{N} + \mathbf{N}' = 0$$

la spinta \mathbf{N}' sul sostegno è dovuta a \mathbf{P} e lo uguaglia
 $\Rightarrow \mathbf{P} + \mathbf{N} = 0$

un vincolo ideale può equilibrare $\forall \mathbf{P}$, un vincolo reale no

(\rightarrow non appoggiate mai un elefante su una sedia)





La robustezza di un vincolo reale



**Pourquoi maltraitons-nous
nos articles ?**

Chez nous, nous soumettons
toujours nos meubles à des
tests rigoureux pour nous
assurer qu'ils peuvent résister
à presque tout.

Voilà pourquoi.

Publicità basata sulla fisica di una nota ditta di mobili



III principio e forze di contatto (4)

piano inclinato (ossia perché
N si chiama **N**): scompongo
P // ($P \sin \theta$) e \perp ($P \cos \theta$) al p.i.

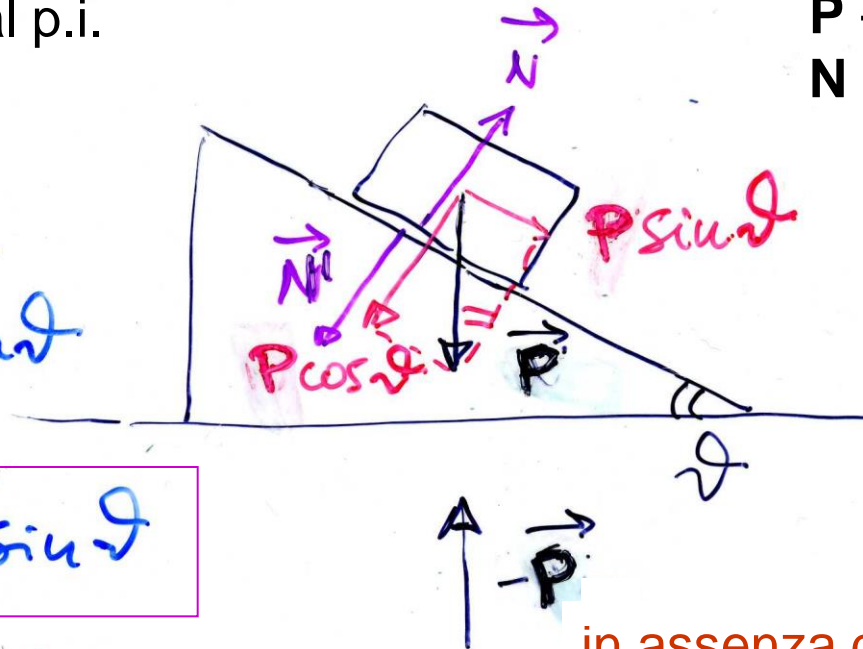
$$P \cos \theta = N$$
$$\cancel{ma} = P \sin \theta$$
$$= \cancel{mg} \sin \theta$$

eq. di moto
in assenza \Rightarrow
di attrito

$$a = g \sin \theta$$

la componente $P \cos \theta$
è equilibrata dalla
reazione vincolare **N**
(non c'è moto \perp al p.i.)

III principio:
 $\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$
 $\mathbf{N} + \mathbf{N}' = 0$



in assenza di attrito non
vi può essere equilibrio:
la componente $P \sin \theta$
non è equilibrata

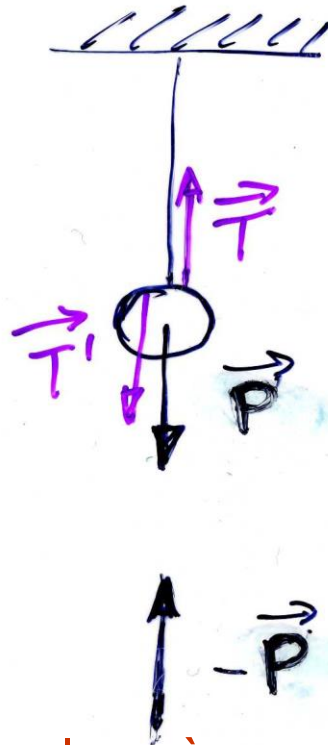


III principio e forze di contatto (5)

III principio:

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

$$\mathbf{T} + \mathbf{T}' = 0$$



un filo (funne) ideale può sostenere $\forall \mathbf{P}$, un filo (funne) reale sosterrà un carico max, oltre si spezza

fune, filo (NB di massa trascurabile)

\mathbf{T}' tensione della fune, del filo (\mathbf{T} agisce sulla sfera di massa m)

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{T}} = 0$$

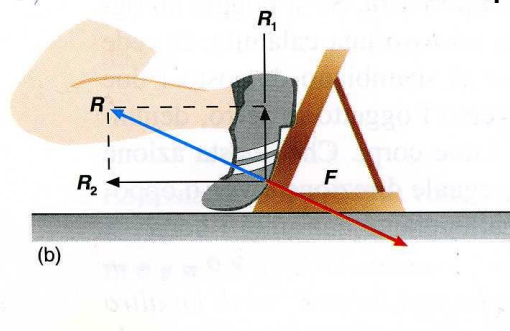
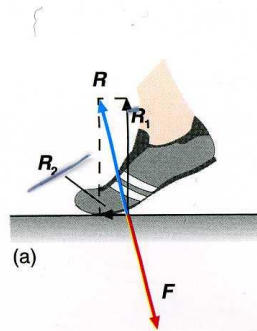
equilibrio (1° principio)

(forza cui è sottoposta la terra!)

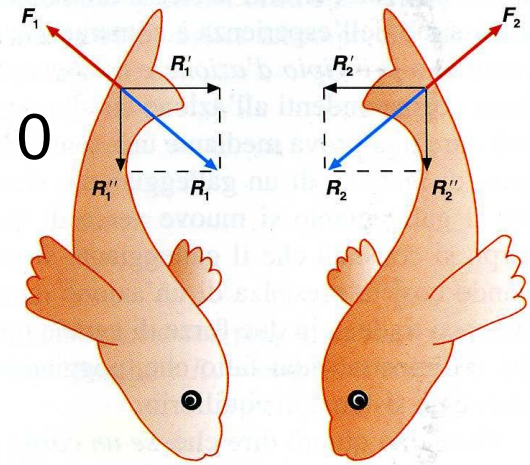
III principio e sistemi propulsori(*)

- dati due corpi A e B che interagiscono: azione e reazione uguale e contraria $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$
- ad es. blocchi di partenza: aumentano la spinta nella direzione del moto
- altro es. locomozione di animali: spinta sul mezzo circostante (suolo, acqua, aria)

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0$$



$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0$$



III principio e moti curvilinei(**)

- consideriamo un moto curvilineo (variazione di v in direzione e verso) **assumendo trascurabile l'attrito**
- la forza centripeta deve(*)

essere **quindi** fornita dalla reazione della curva

sopraelevata di raggio R

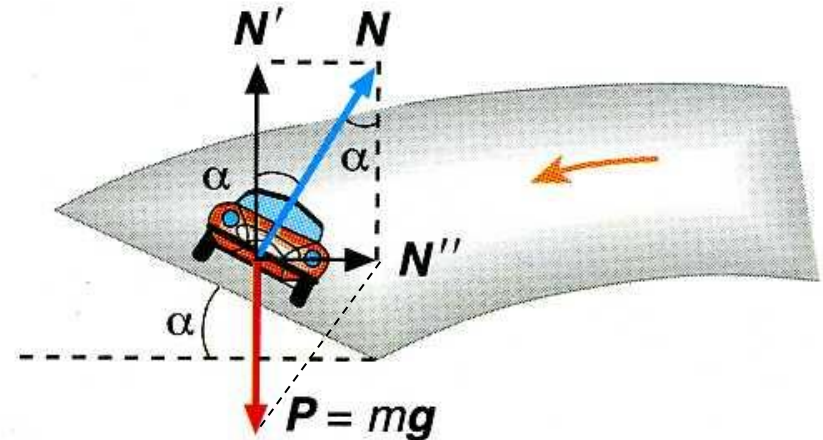
$$F_c = mv^2/R = N'' = N \sin \alpha = N' \operatorname{tg} \alpha = P \operatorname{tg} \alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = v^2/(Rg)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ad es. } v = 50 \text{ m/s} \\ R = 250 \text{ m} \end{array} \right\}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \sim 2500/(250 \cdot 10) \sim 1; \alpha \sim 45^\circ$$

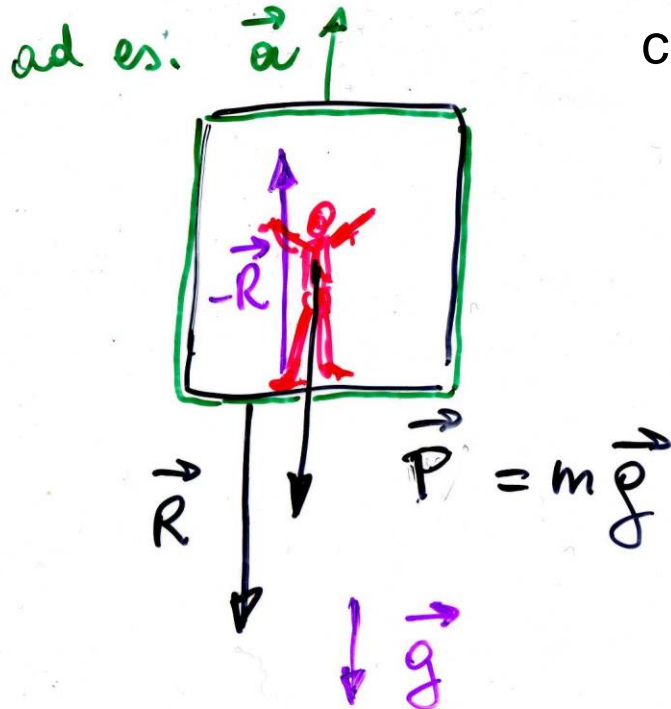
(*) si impone che il vettore $F_c = N + P$ sia orizzontale





Peso e peso apparente(*)

il peso di una persona può essere definito come la forza esercitata sul pavimento



Ascensore accelerato

(\vec{a}) tipico sistema **non** inerziale se $a \neq 0$

\vec{R} - sul pavimento
 $-\vec{R}$ - sulle persone

$$m\vec{a} = \vec{P} - \vec{R} \quad \text{eq. di moto}$$



Peso e peso apparente (2)(*)

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{P} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

$$\text{se } \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{cost} \quad \vec{R} = \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\text{u } \vec{a} \text{ verso l'alto} \quad R = m(g + a) > P$$

$$\text{u } \text{ verso il basso} \quad R = m(g - a) < P$$

- quindi il peso apparente sarà inferiore (superiore) a quello reale se l'ascensore accelera verso il basso (alto)
- NB si noti che mentre m è costante, P può variare, per es. andando in montagna, in orbita o all'equatore si diminuisce di peso! (al polo si aumenta)



Sistemi isolati e conservazione q.d.m.

- isolati: sistemi di 2 o più corpi che si scambiano forze, interne, che a 2 a 2 si elidono (risultante nulla)
- es. corpi 1 e 2 su piano orizzontale **senza attrito**

su 1 agisce \mathbf{F}_2 (dovuta a 2)

su 2 agisce \mathbf{F}_1 (dovuta a 1)

$$\mathbf{F}_1 = \Delta \mathbf{q}_2 / \Delta t; \quad \mathbf{F}_2 = \Delta \mathbf{q}_1 / \Delta t$$

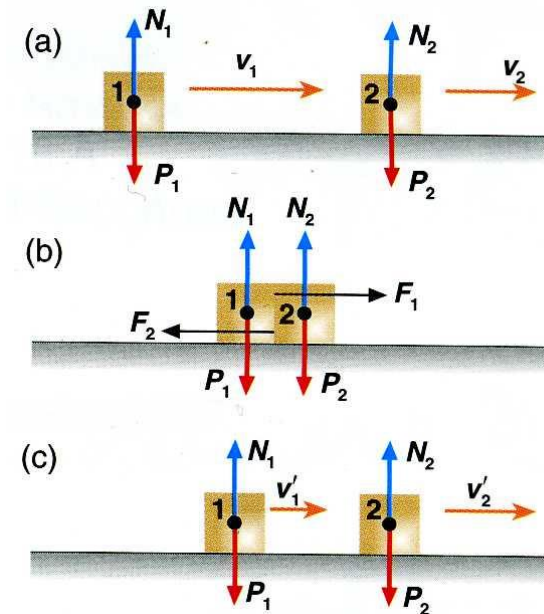
$$\text{ma } \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{q}_1 / \Delta t + \Delta \mathbf{q}_2 / \Delta t = 0$$

$$\text{ossia } \Delta \mathbf{q}_1 + \Delta \mathbf{q}_2 = \Delta (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = 0$$

la variazione della q.d.m. totale è nulla, da cui ricavo

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \text{cost}$$



urto fra due corpi

Conservazione q.d.m. (2)

- se \mathbf{q}_i e \mathbf{q}_i' indicano le q.d.m. prima e dopo l'urto, avrò

$$\mathbf{q}_1' + \mathbf{q}_2' = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$$

$$m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2' = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

conservazione della q.d.m.: l'interazione fra due corpi non modifica la q.d.m - oppure – per un sistema isolato (soggetto a risultante nulla) la q.d.m. si conserva

- es. locomozione di celenterati, motori termici a getto, la q.d.m. iniziale è uguale zero

$$\Rightarrow m_a \mathbf{v}_a + m_c \mathbf{v}_c = 0$$

da cui

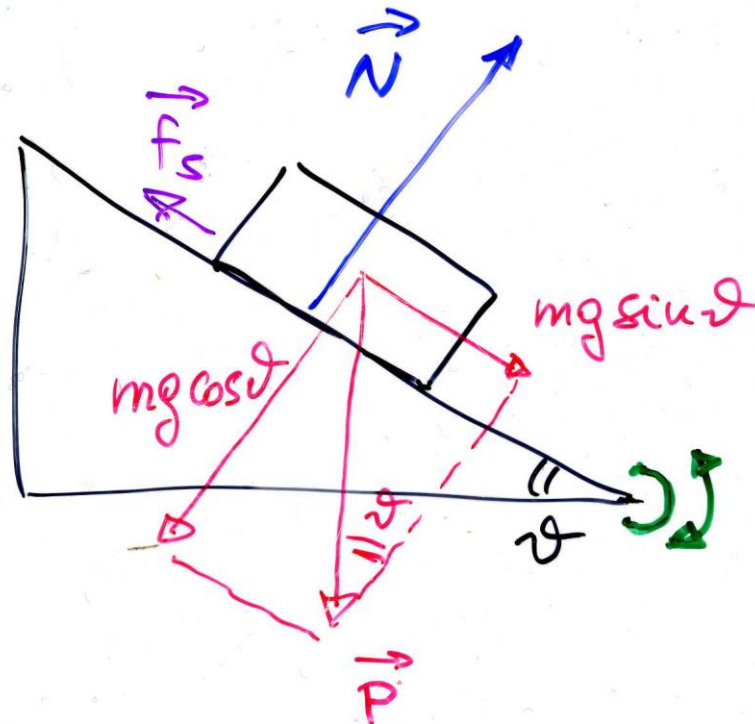
$$\mathbf{v}_c = - (m_a/m_c) \mathbf{v}_a$$





Attrito statico: dimostrazione

- si può usare un piano inclinato, ad inclinazione variabile: la forza peso è scomponibile parallelamente ($P\sin\theta$) ed ortogonalmente al piano ($P\cos\theta$); solo la componente normale è equilibrata dalla reazione vincolare; basta quindi far crescere l'angolo θ per aumentare la forza motrice e, per un certo angolo critico, θ_c , il blocco comincerà a muoversi, non appena $mgsin\theta$ supera la forza di attrito $f_{s,max}$



(anche un PC portatile può servire per la dimostrazione in aula)

NB se $\theta < \theta_c$, $P\sin\theta$

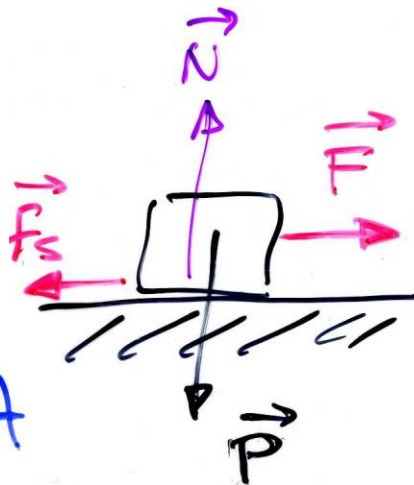
è equilibrato da una f_s uguale e contraria (il corpo rimane in equil.)



Forza d'attrito, leggi dell'attrito statico

- consideriamo ora un corpo appoggiato su una superficie orizzontale reale, se applicassi una forza in assenza di attrito il corpo dovrebbe comunque accelerare, invece non si muove finchè $F \leq \mu_s N$ (v. p. 63)

attrito statico
(impedisce
l'inizio del moto)



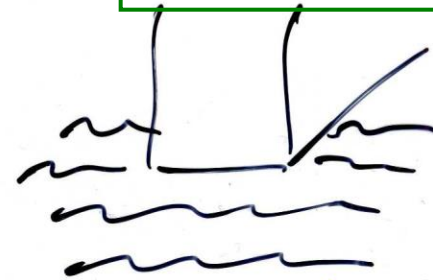
$\forall A$

2) l'a.s. cresce fino
ad un valore max

$$f_{s, \max} = \mu_s N$$

$$(f_s \leq \mu_s N)$$

1) l'a.s. non dipende
dall'area A di contatto



superfici
ruvide

a microscopice
 $\ll A_{\text{contatto}}$



Attrito (2)

- una volta superata la $f_{s,max}$ il corpo è accelerato da una forza $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{f}_c$ ed acquisterà una \vec{v} :

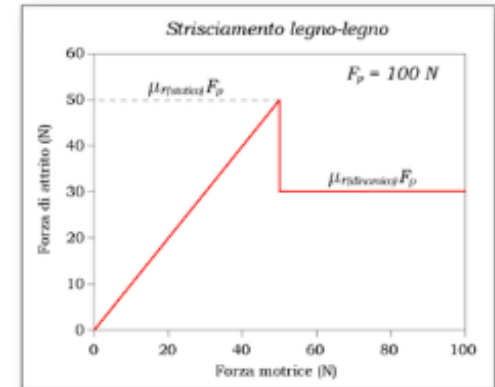
$$F' = F - f_c \quad (\text{dove } f_c \text{ è un po' inferiore a } f_{s,max})$$

\vec{f}_c dipende da $\vec{v}/|\vec{v}|$ (direz.) non da v (modulo) [*]

attrito cinetico o dinamico
(agisce durante il moto)

$$f_c = \mu_c N$$

in prima approssimazione
(per es. negli esercizi) si
può non distinguere fra f_c
e $f_{s,max}$, quindi $\mu_c = \mu_s = \mu$



$$\mu_c < \mu_s$$

$$\text{legno-legno} \sim 0.3$$

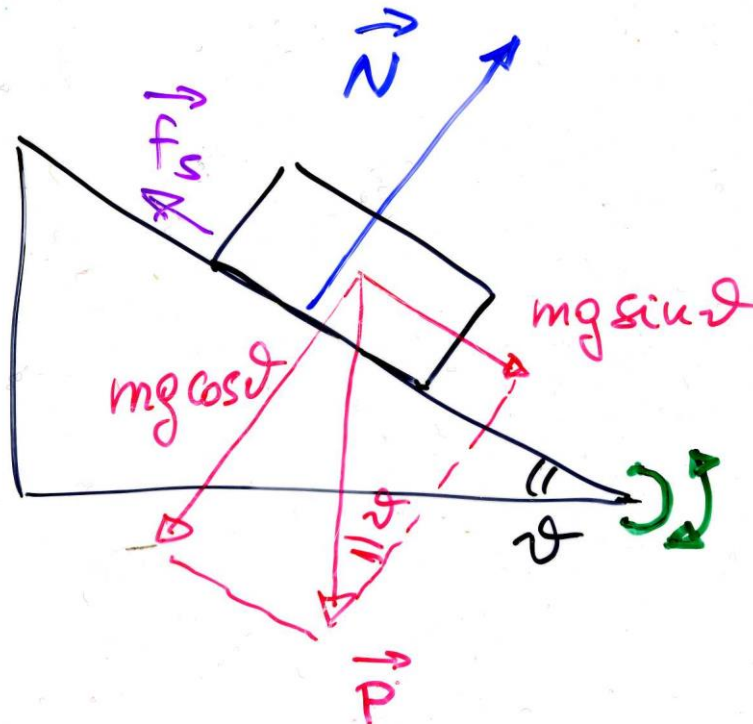
$$\text{metallo-metallo} \sim 0.4$$

superfici lubrificate $\mu_c \approx 0.05$



Misura del coefficiente d'attrito

- si può usare un piano inclinato, ad inclinazione variabile: la forza peso è scomponibile parallelamente ($P\sin\theta$) ad ortogonalmente al piano ($P\cos\theta$); solo la componente normale è equilibrata dalla reazione vincolare; basta quindi far crescere l'angolo θ per aumentare la forza motrice e, per un certo angolo critico, θ_c , il blocco comincerà a muoversi, non appena $mg\sin\theta$ supera la forza di attrito $f_{s,\max}$



(anche un PC portatile può servire per una misura approssimata di μ_s in aula)



Misura del coefficiente d'attrito statico

con riferimento al piano inclinato di p. 66 e relativa discussione

$$\text{se } \vartheta \nearrow, \quad mg \sin \vartheta \nearrow \quad (1^\circ \text{ quadrante!})$$

$(= f_s)$

$$\cancel{mg} \sin \vartheta_c = f_{s, \max} = \mu_s \cancel{mg} \cos \vartheta_c$$

inizie e scivolare

$$\mu_s = \frac{\sin \vartheta_c}{\cos \vartheta_c} = \operatorname{tg} \vartheta_c$$

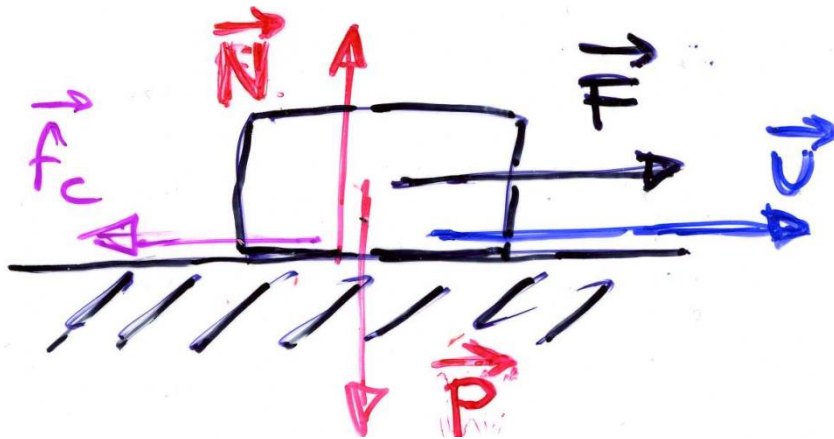
θ_c indica l'angolo critico, angolo per cui il corpo comincia a scivolare:
nell'es. in aula, puntatore laser su PC, $\theta_c = (7 \pm 2)^\circ \rightarrow \mu_s = (0.12 \pm 0.03)$



Eq. di moto in presenza di attrito

• (senza attrito: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$)

• con attrito: $\mathbf{a} = 0$ per $|\mathbf{F}| < f_{s,\max} = \mu_s N$
 $m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{f}}_c$ per $|\mathbf{F}| > f_{s,\max}$; $f_c = \mu_c N$
 $\vec{\mathbf{f}}_c = -\mu_c N \vec{\mathbf{v}}/v$ si oppone al moto



$$\rightarrow ma = F - \mu_c N$$

$$a = (F - \mu_c N)/m < F/m$$

$$a = F/m - \mu_c g$$

(l'ultima vale su un piano orizzontale,

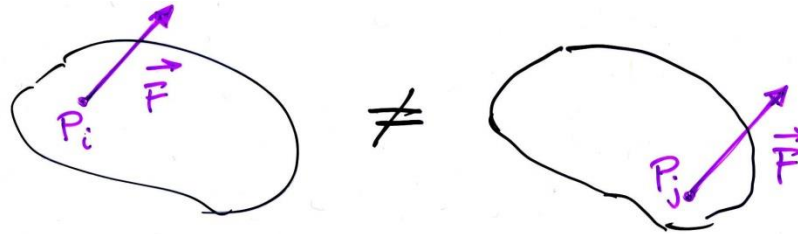
$$\mathbf{N} = -\mathbf{P}, N = mg)$$

NB i vettori sono in grassetto e/o con la freccetta

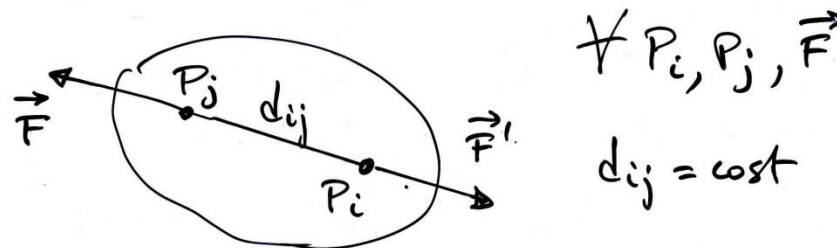


Corpo rigido

– per i corpi estesi, il punto di applicazione delle forze diventa importante



– def. di corpo rigido



– sperimentalmente: 1) due \vec{F} uguali e contrarie lungo la stessa retta di applicazione in punti diversi non alterano lo stato di moto del c.r.;
2) una \vec{F} applicata ad un punto può essere spostata lungo la sua retta di applicazione senza alterarne gli effetti

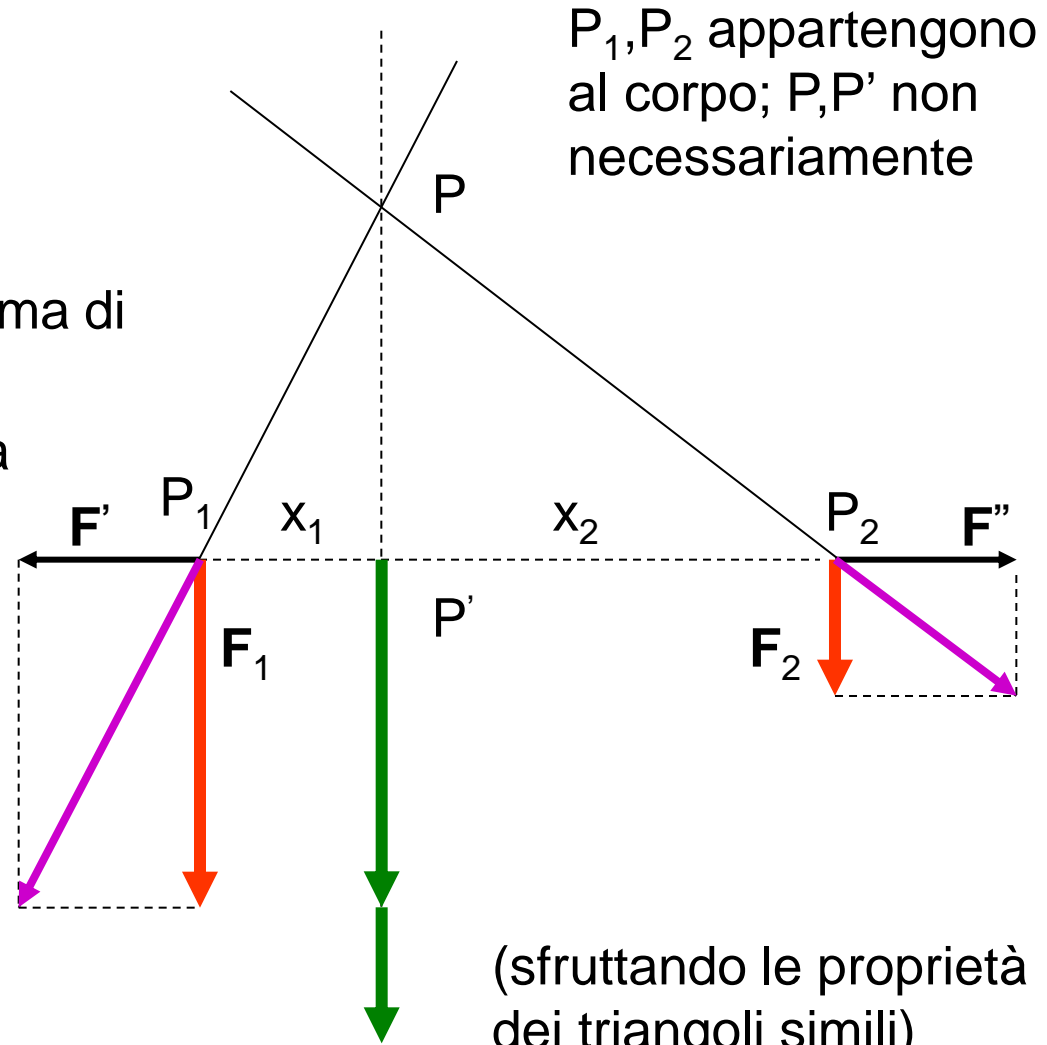


Corpo rigido: risultante di forze parallele(*)

- aggiungo \mathbf{F}' e $\mathbf{F}'' = -\mathbf{F}'$
(\mathbf{F}' a piacere, arbitraria)
- traslo le risultanti in P: le componenti orizzontali si annullano, rimane la somma di \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2
- posso ritraslare la somma in P'
- la risultante è la somma di \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 lungo P'P con

$$\frac{P_1P'}{P_2P'} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\left(\frac{P_1P'}{PP'} = \frac{F'}{F_1}; \quad \frac{P_2P'}{PP'} = \frac{F''}{F_2} \right)$$



P_1, P_2 appartengono al corpo; P, P' non necessariamente

(sfruttando le proprietà dei triangoli simili)



Risultante di forze parallele (2), baricentro

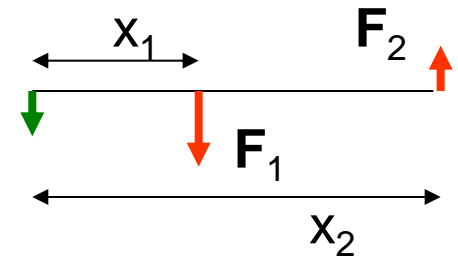
- posso riscrivere la rel. precedente come (forze parallele)

$$F_1 x_1 = F_2 x_2$$

- se F_1 e F_2 sono antiparallele, la risultante ha per modulo la differenza dei moduli, verso quello della F più grande, retta di applicazione all'esterno dalla parte della F più grande, con

$$F_1 x_1 = -F_2 x_2 \quad (F_1, F_2 \text{ intese come componenti})$$

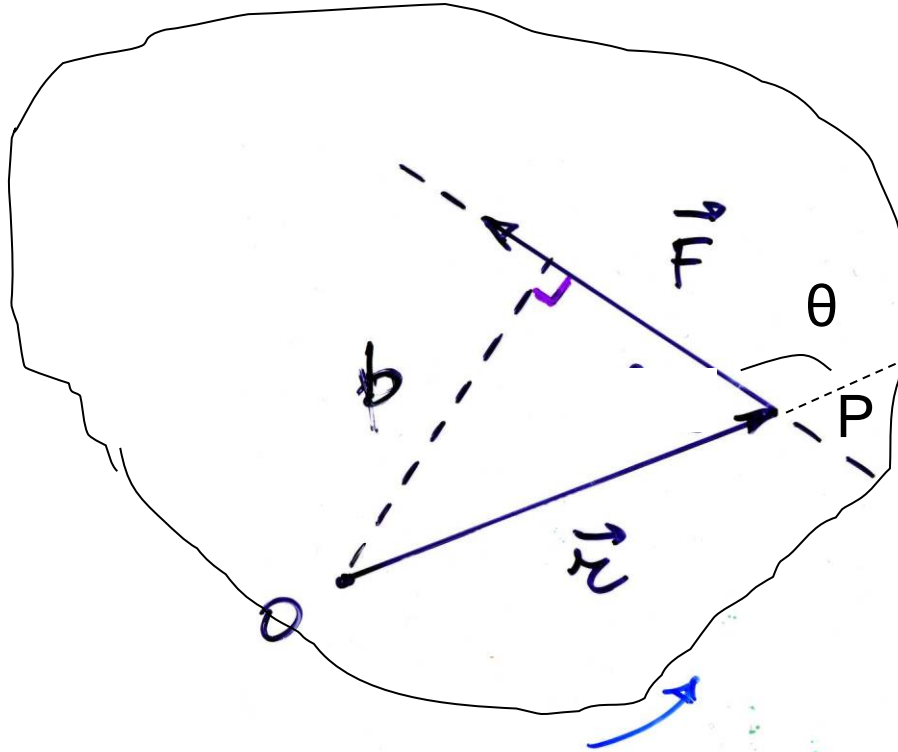
$$|F_1 x_1| = |F_2 x_2|$$



- se si considera un **corpo rigido esteso diviso in volumetti di massa m_i e di peso $m_i g$** , nel limite in cui g è costante, la risultante di tutte le forze peso è il peso del corpo $P = \sum_i m_i g = g \sum_i m_i = mg$ che sarà applicato nel **centro di gravità o baricentro** (per un corpo omogeneo è il centro geometrico – in generale il b. può anche trovarsi fuori dal corpo)



Momento di una forza rispetto a un punto



il momento è perpendicolare
al piano individuato da \mathbf{r} e \mathbf{F}
NB $\mathbf{M} = 0$ se \mathbf{r} parall. \mathbf{F}

momento di \mathbf{F} rispetto ad O (in
evidenza): il prodotto vettoriale
 $\mathbf{M} = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{F}$

ossia

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

b , minima distanza fra O e la retta
di applicazione di \mathbf{F} , è il braccio

modulo del vettore $\mathbf{M} = \text{braccio} \cdot F$:

$$M = rF \sin \theta = Fb$$

siccome $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

$$[\text{Momento}] = [LF] = [ML^2T^{-2}]$$

unità SI: N·m

CGS: 1 dyne·cm =

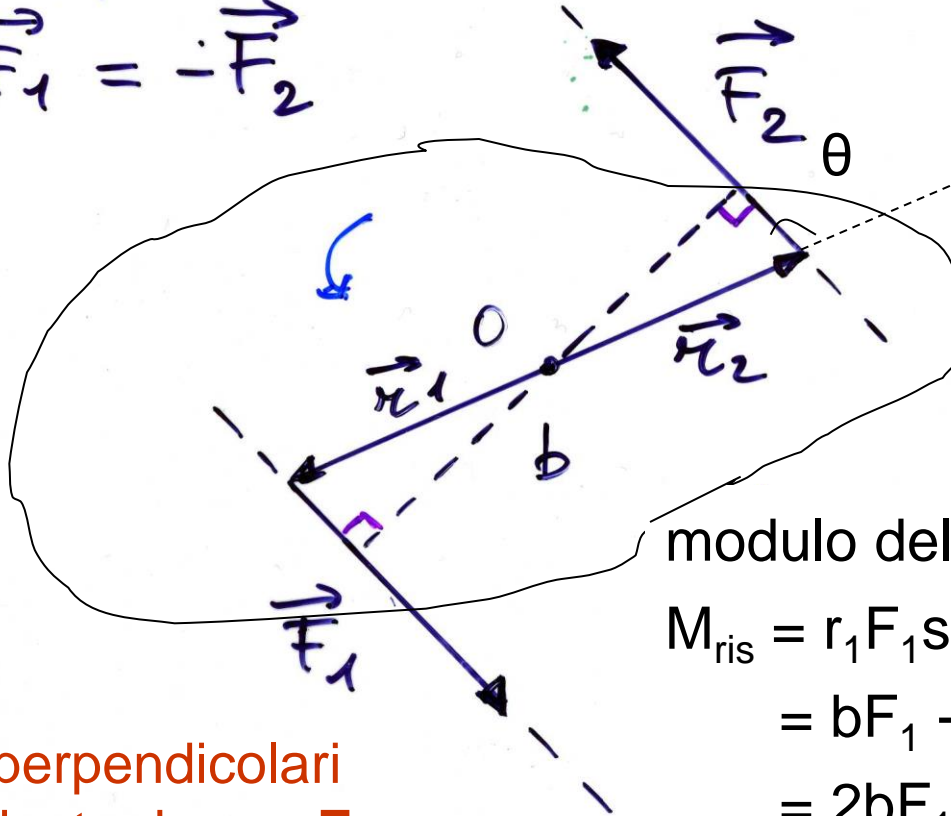
$$= 10^{-5} \text{ N} \cdot 10^{-2} \text{ m} = 10^{-7} \text{ Nm}$$



Coppia di forze

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

spostando O
lungo la linea
tratteggiata
si ottiene
sempre lo
stesso M_{ris}
etc.



NB nel caso della
coppia di forze, il
momento della
coppia **non**
dipende dalla
scelta di O

modulo del momento risultante:

$$M_{\text{ris}} = r_1 F_1 \sin\theta + r_2 F_2 \sin\theta =$$

$$= bF_1 + bF_2 =$$

$$= 2bF_1$$

$$[= (x_1 + x_2)F_1, \text{ con } x_1 + x_2 = 2b]$$

M_1 e M_2 sono perpendicolari
al piano individuato da r_1 e F_1
e sono paralleli (producono una
rotazione nello stesso verso)



Condizioni generali di equilibrio di un corpo rigido

perchè il c.r. sia in equilibrio (permanga nel suo stato di moto uniforme precedente):

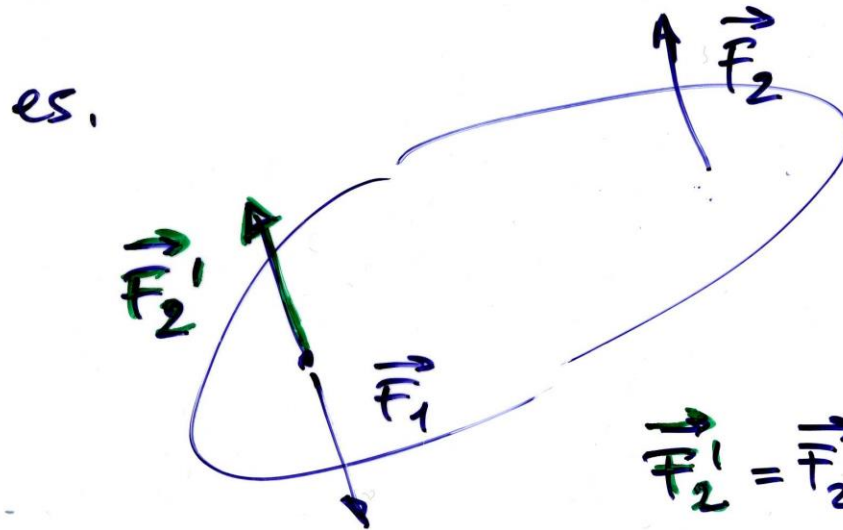
1. la risultante delle forze esterne applicate al c.r. deve essere nulla
2. il momento risultante delle forze esterne applicate al c.r. deve essere nullo

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{ris}} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \vec{M}_{\text{ris}} = \sum_i \vec{M}_i = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{forze esterne} \\ \text{"} \end{array}$$

una risultante non nulla è causa di una variazione nel moto di **traslazione**; un momento risultante non nullo causa le **rotazioni**



Condizioni di equilibrio (2), esempio



forze uguali e
contrarie, con
rette d'azione
uguali o diverse

$$\vec{F}_2' = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

caso 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2' = 0 \\ \vec{M}'_{ris} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2' = 0 \end{array} \right. \quad \text{sta fermo}$$

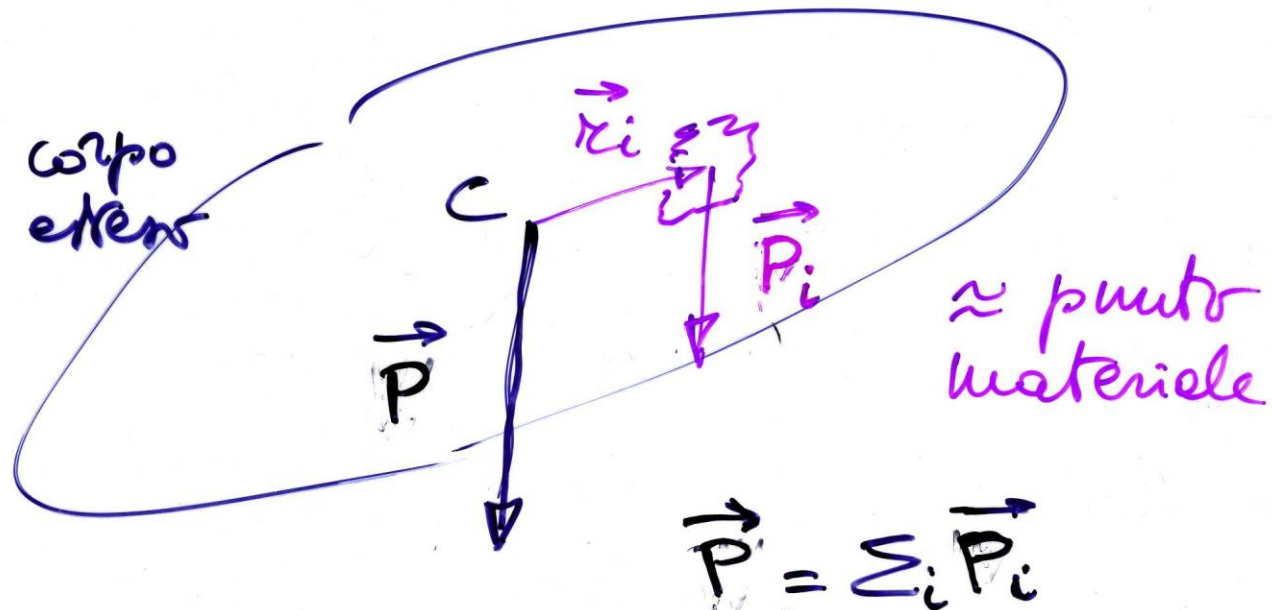
caso 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \\ \vec{M}_{ris} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \neq 0 \end{array} \right. \quad \text{ruota}$$



Centro di gravità o baricentro

in modo del tutto equivalente alla def. precedente, il baricentro è individuabile imponendo che la somma dei momenti delle forze peso (ottenuta scomponendo il c.r. in *piccole* parti) rispetto ad esso sia nulla



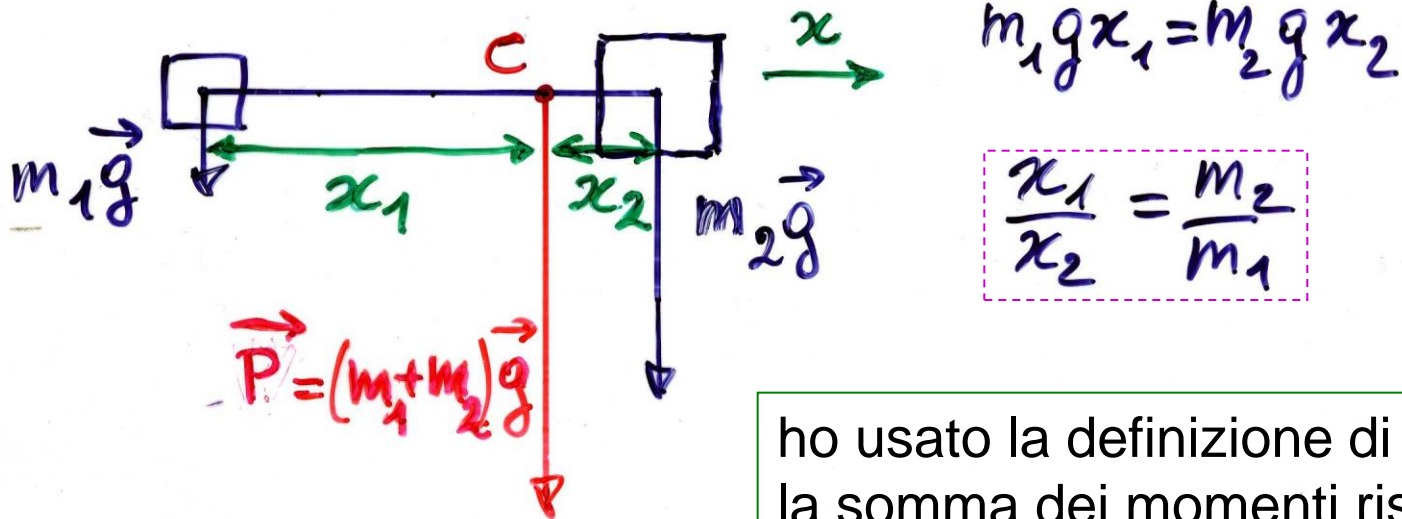
da $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i = 0 \rightarrow$ baricentro (il baricentro risulta essere il punto intorno al quale il c.r. ruota)



Es. di calcolo del baricentro

(per simmetria dei mom.)

es.1 corpo uniforme : centro geometrico
es.2 due masse

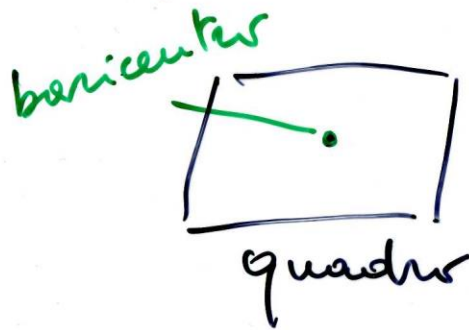


ho usato la definizione di baricentro: la somma dei momenti rispetto al baricentro C deve essere nulla:
 $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0 \implies M_1 = M_2$
(i moduli sono uguali)

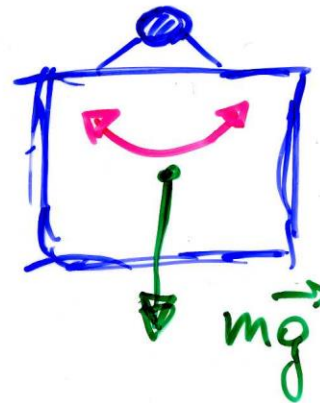
uguale al risultato
ottenuto a pag. 70
 $x_1/x_2 = F_2/F_1$
 $x_1 F_1 = x_2 F_2$



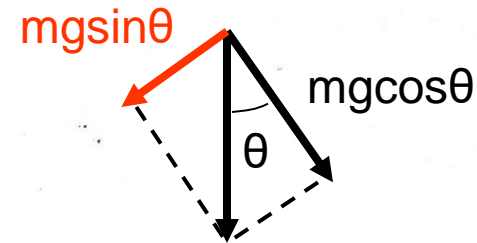
Tipi di equilibrio (asse fisso)



1)



Malile

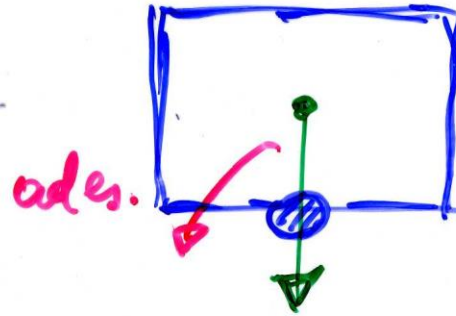


la componente $mg\cos\theta$ è annullata dalla reazione del vincolo, invece $mgsin\theta$ rappresenta una f. di richiamo verso la posizione di equilibrio (cf. pendolo)



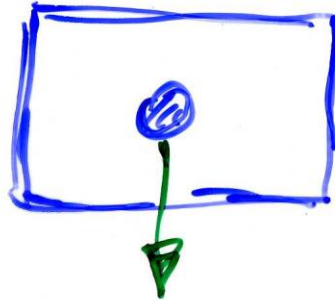
Tipi di equilibrio (2)

2)



instabile

3)



indifferente!
(da non verificare)



Pise?



perché le
piramidi
non hanno
le punte
in basso?



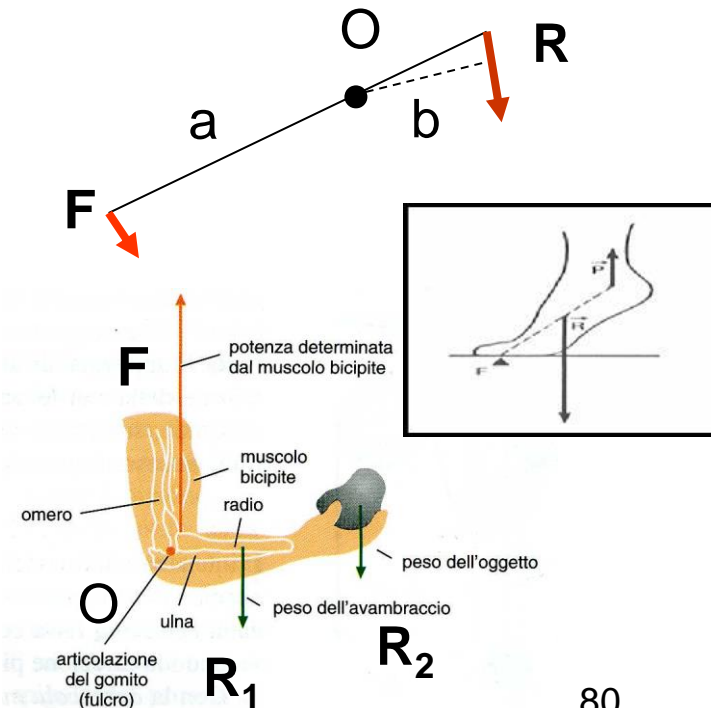
Leve (macchine semplici)

- leva: c.r. che ruota attorno ad un asse fisso (fulcro) in modo che M_F (potenza) possa bilanciare M_R (resistenza)

$$M_F + M_R = 0 \rightarrow M_F = -M_R$$

$\rightarrow Fa = Rb \rightarrow F/R = b/a$ con a,b rispettivi bracci
(vantaggiosa, se $F < R$)

- leva di 1° tipo: fulcro O fra F e R
(R e F concordi) – eg capo
- leva di 2° tipo: R fra O e F
(R e F discordi) – eg piede
- leva di 3° tipo: F fra O e R
(R e F discordi) – eg braccio



Moto in generale

- il moto di un c.r. libero in generale è scomponibile nel moto di traslazione del baricentro e nel moto di rotazione intorno al baricentro – per un c.r. con un asse fisso è possibile solo il moto di rotazione



Carolina Kostner in pura **traslazione** e in pura **rotazione** (bronzo alle Olimpiadi, Sochi, 2014) – argento ai Mondiali 2013

una giostra in pura **rotazione** attorno ad un asse fisso:
stessa ω , diversa $v = \omega r$, diversa $a_c = \omega^2 r$



Rotazioni: p.m. rispetto ad asse fisso (moto circolare generico)

- circonferenza di raggio r , fisso, costante
- quando P si muove lungo la circonferenza varia $\theta = \theta(t)$, in **rad.!** – (p.m. oppure disco, cilindro scomposti in particelle)

- $\Delta s = r\Delta\theta$

$$OP = r$$

- $v = \Delta s / \Delta t = r\Delta\theta / \Delta t = r\omega$

- $a_t = \Delta v / \Delta t = r\Delta\omega / \Delta t = r\alpha$

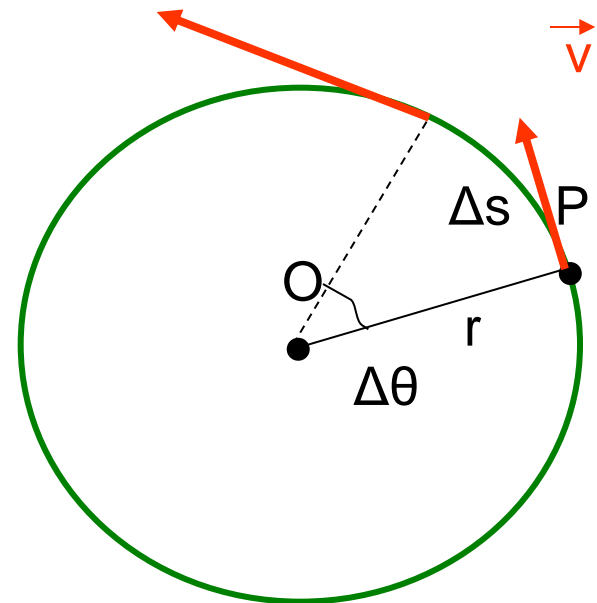
- $a_c = v^2 / r = \omega^2 r$

- se $\alpha = \text{cost}$ si può ricavare

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\text{cf. } v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0) \quad [\text{vedi p. 20,}$$

basta dividere per r^2]



(NB $\alpha = 0$ nel moto circolare uniforme)



Momento angolare e momento d'inerzia

- p.m., si definisce momento angolare (o della q.d.m.) il vett.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

$$L = mvr = (mr^2)\omega = I\omega \quad (\text{poichè } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{v} \text{ sono } \perp \text{ nelle rotazioni})$$

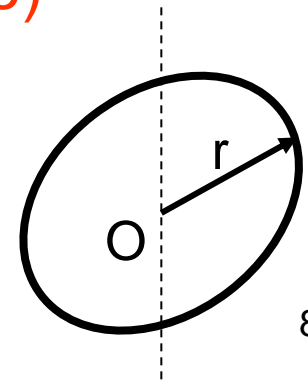
il prodotto $I = mr^2$ si chiama **momento d'inerzia** (scalare) e gioca per le rotazioni il ruolo giocato della massa per le traslazioni

- c.r. esteso scomposto in particelle m_i , r_i , v_i – stesse ω , α

$$L = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega (\sum_i m_i r_i^2) = \omega I \quad (\mathbf{r}_i \text{ e } \mathbf{v}_i \text{ perpendicolari})$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad \text{momento d'inerzia (scalare)}$$

ad es. anello di raggio r cost. $I = r^2 \int dm = mr^2$





Momento angolare e momento d'inerzia (2)

dimensioni e unità del momento angolare

- [Momento angolare] = [LQ] = [ML²T⁻¹]
- unità SI: 1 kg m² s⁻¹ = 1 J·s [joule (J) unità di energia]
- CGS: 1 g cm² s⁻¹ = 1 erg·s = [erg unità di energia]
- = 10⁻⁷ J·1s = 10⁻⁷ Js

dimensioni e unità del momento d'inerzia

- [I] = [ML²]
- unità SI: kg·m²
- CGS: 1 g·cm² =
- = 10⁻³ kg·10⁻⁴ m² = 10⁻⁷ kg m²
- (I di vari solidi si trova calcolato su numerosi libri)



Il principio per i corpi in rotazione

- p.m., si parte da $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ($F = ma = mr\alpha$) e si moltiplica vettorialmente a sx per \mathbf{r} , $(\mathbf{r} \times) \mathbf{F} = (\mathbf{r} \times) m\mathbf{a}$, si ha in modulo $M = rF = rma = mr\alpha = (mr^2)\alpha = I\alpha$ [$\mathbf{F}_c, \mathbf{a}_c \parallel -\mathbf{r}$ danno 0]
- c.r. esteso, analogamente avremo, dopo averlo scomposto in particelle,

$$M_{\text{ris}} = \sum_i M_i = (\sum_i m_i r_i^2) \alpha \quad (\text{poichè tutti gli } \mathbf{M}_i \text{ sono paralleli})$$

$$M_{\text{ris}} = I\alpha$$

$$(\text{cf. } \mathbf{F}_{\text{ris}} = m\mathbf{a})$$

- possiamo riscrivere

$$M_{\text{ris}} = I\Delta\omega/\Delta t = \Delta(I\omega)/\Delta t = \Delta L/\Delta t \quad (I \text{ è cost.!})$$

$$\text{se } M_{\text{ris}} = 0$$

$$\Delta L/\Delta t = 0, \quad L = \text{cost.}$$

si ha

(conservazione del momento angolare)



cons. momento angolare (es.)

- pattinatrice su ghiaccio durante una piroetta: se chiude le braccia, $I [= \sum mr^2]$ diminuisce e ω aumenta e viceversa (L è costante, $M_{\text{peso}} = 0$ rispetto all'asse di rotazione)

$$L = I_0 \omega_0 = I \omega \quad \rightarrow \quad \omega = (I_0/I) \omega_0$$

- collasso stellare(*) – stella con $m = 2M_S$, $r_1 = R_S = 7 \cdot 10^5$ km, $T_{\text{rot}} = 10$ g che collassa gravitazionalmente ad una stella di neutroni molto densa, stessa massa, $r_2 = 10$ km; quale sarà la nuova velocità angolare?

si può calcolare

Assumiamo sfere uniformi: $I_i = 2/5 mr_i^2$ - il sistema è isolato, niente F_{est} : $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

$$\omega_2 = \omega_1 (I_1/I_2) = \omega_1 (\cancel{2/5} m r_1^2) / (\cancel{2/5} m r_2^2) = \omega_1 (r_1^2/r_2^2) = 4 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

OK? $v_{\text{perif}} = 4 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \cdot 10^4 \text{ m} = 4 \cdot 10^8 \text{ m/s} !!$ ci vorrebbe un calcolo relativistico

(*) facoltativo



Lavoro di una forza

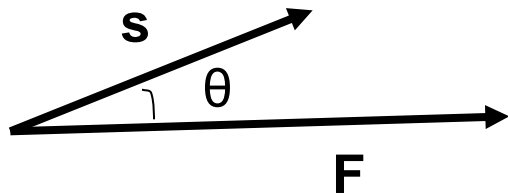
1. forza cost. \mathbf{F} applicata ad un p.m., spostamento finito rettilineo \mathbf{s} del p.m.

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos\theta$$

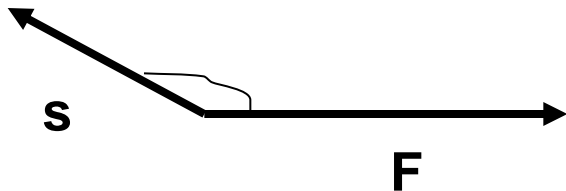
$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{F})$$

prodotto
scalare

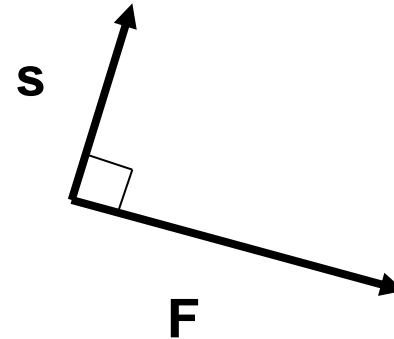
spostamento del punto di applicazione di \mathbf{F} parallelo ad \mathbf{F} :
 $\mathcal{L} = 0$ se $F = 0$, $s = 0$, $\theta = 90^\circ, 270^\circ$



$$\mathcal{L} > 0$$



$$\mathcal{L} < 0$$



$$\mathcal{L} = 0$$



Lavoro (2)

- dimensioni del lavoro (stesse del momento di F)

$$[\mathcal{L}] = [Fs] = [MLT^{-2} L] = [ML^2T^{-2}]$$

unità SI: $1N \cdot 1m = 1 \text{ joule} = 1 J = 1/9.81 \text{ kg}_p m$ “

CGS: $1cm \cdot 1dina = 1 \text{ erg}$ “

$$1 \text{ erg} = 10^{-2} m \cdot 10^{-5} N = 10^{-7} J$$

(J e erg sono usate solo per lavoro, energia e calore)

- Potenza: rapidità con cui è eseguito un lavoro

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} / \Delta t \quad (\text{a } v \text{ cost. } \mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} / \Delta t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta)$$

$$[\mathcal{P}] = [ML^2T^{-3}]$$

unità SI: $1 J/s = 1 \text{ watt} = 1 W$; CGS: 1 erg/s

altra unità, cavallo vapore: $1 CV = 735 W = 0.735 kW$

es. metabolismo basale: $2000 \text{ kcal/giorno} = 2 \cdot 10^6 \text{ cal/g} (*4.186 \text{ J/cal}) = 8.372 \cdot 10^6 \text{ J/g} (*1/86400 \text{ g/s}) \sim 100 W$



Lavoro di una forza variabile

2. forza variabile (modulo, direz., (verso)), traiettoria curva; dividiamo la traiettoria in tratti $\Delta \mathbf{s}$ con \mathbf{F} cost. nel tratto (\rightarrow definiz. precedente)

$$\Delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = F \Delta s \cos \theta$$

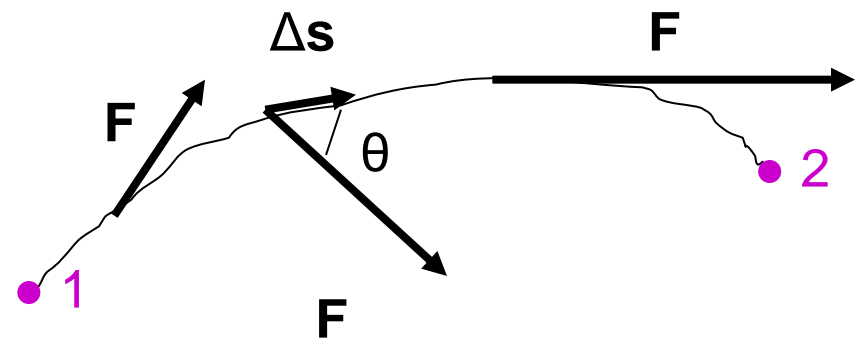
per ottenere il lavoro totale:

$$\mathcal{L} = \sum \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = \sum F \Delta s \cos \theta$$

in effetti a rigore:

$$\mathcal{L} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum F \Delta s \cos \theta = \int_1^2 F \cos \theta ds$$

(somma su ∞ tratti di lunghezza infinitesima ds)





Lavoro di F_{ris} e energia cinetica

- p.m. di massa m soggetto a $F_{\text{ris}} = F$ cost, $a = F/m \Rightarrow$ moto unif. accel; prendiamo $\Delta t \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1$ nella direzione. del moto; si ha

$$a(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad [\text{vedi p. 20}]$$

$$\mathcal{L} = F(x_2 - x_1) = ma(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

si definisce energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

(*sempre* ≥ 0 , poichè $m \geq 0$ e $v^2 \geq 0$)

il lavoro di F_{ris} uguaglia ΔK del p.m.

- corpo di massa m , moto traslatorio (stessa v per tutti i punti):
 $K = \frac{1}{2}mv^2$; sistema di forze agenti sul corpo che trasla
(traiettoria retta o curva)

$$\mathcal{L}_{\text{ris}} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \Delta K$$

(teorema dell'energia cinetica)

lavoro totale delle f. agenti = variazione energia cinetica



Energia

- **energia** = capacità di compiere lavoro (dimensioni, unità: le stesse del lavoro)
- es.1 **energia cinetica**: corpo in moto (\mathbf{v} , K) comprime una molla, \mathcal{L} contro la f. elastica (variabile, $k(x-x_0)$)
- es.2 sasso lanciato verso l'alto (\mathbf{v}_0 , K), \mathcal{L} contro la f. di gravità (costante, mg)



- es.3 si lascia cadere un corpo da fermo ($K = 0$): l'energia cinetica raggiunta quando il c. tocca il suolo dipende dalla quota iniziale (**energia potenziale**) – moto unif. acc. $v_0^2 = 2gh$



Forze conservative

- se il lavoro \mathcal{L} delle f. dipende **esclusivamente** dalla posizione 1 (iniziale) e 2 (finale) e **non** dalla scelta del percorso 12, (quindi anche, per uno spostamento che riporta al punto di partenza, ciclo chiuso, $\underline{\mathcal{L}}_{11} = \mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{21} \underline{=} 0$, ossia $\sum_i \Delta \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{F}_i = 0$): \rightarrow **forze conservative**
- le f. che dipendono solo dalla posizione sono conservative (in particolare le f. costanti sono conservative!)
- esempi di f. conservative: f. peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, f. elastica $\mathbf{F} = k(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$, f. elettrostatica $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, vedi più avanti, etc.
- se le f. dipendono da t esplicitamente *oppure* anche solo implicitamente [ad es. attraverso la velocità, f. di attrito (resistenza) dell'aria $\mathbf{F}_a = -cAv^2(\mathbf{v}/v)$, f. di attrito radente $\mathbf{f} = -\mu N(\mathbf{v}/v)$, f. magnetica $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, vedi più avanti, etc.] **non** sono forze conservative



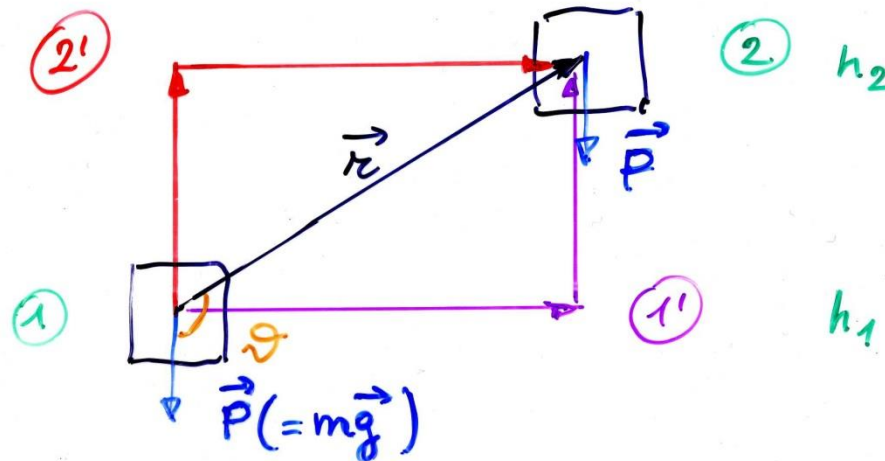
Forze conservative (2)

- es. f. peso (costante), supponiamo di spostare una massa m da una quota h_1 ad una h_2 , posso scegliere diversi percorsi: 12 (diretto), 11'2, 12'2 etc.

$$\mathcal{L}_{12} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = Pr \cos\theta = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\mathcal{L}_{11'2} = \mathcal{L}_{11'} + \mathcal{L}_{1'2} = 0 + [-mg(h_2 - h_1)] = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\mathcal{L}_{12'2} = \mathcal{L}_{12'} + \mathcal{L}_{2'2} = -mg(h_2 - h_1) + 0 = -mg(h_2 - h_1)$$





Forze conservative (3)

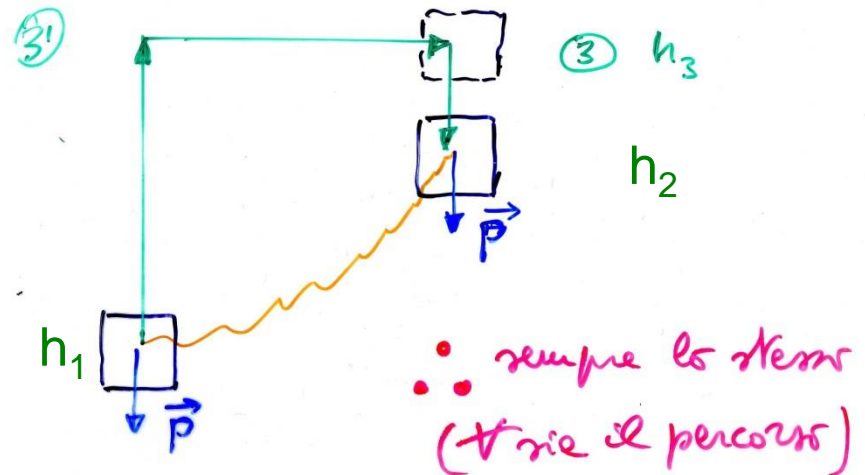
- il lavoro è sempre lo stesso, proviamo 13'32, 12 secondo una spezzata (a scalini), 12 secondo una curva continua ...

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{13'32} &= \mathcal{L}_{13'} + \mathcal{L}_{3'3} + \mathcal{L}_{32} = -mg(h_3 - h_1) + 0 + mg(h_3 - h_2) \\ &= -mg(h_2 - h_1) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{12\text{spezzata}} = \Sigma(0 + [-mg\Delta h])$$

...

- il lavoro dipende solo dalla quota iniziale e finale, non dal modo in cui si passa da 1 a 2





Energia potenziale

- se \mathbf{F} è conservativa (dipende solo dalla posizione) ho che \mathcal{L}_{12} è **indipendente dal percorso e dipende solo dagli estremi** (di conseguenza sarà anche $\mathcal{L}_{11} = 0$ sempre)

- posso porre

$$\mathcal{L}_{12} = W_1 - W_2 = -\Delta W$$

se una forza fa lavoro +vo (-vo)
c'è perdita (acquisto) di e.p.

dove W è l'energia potenziale: il lavoro da 1 a 2 è = - (la variazione dell'energia potenziale)

NB si definisce solo la variazione dell'e.p., **non** il suo valore in assoluto

ad es. f. peso

$$W(h) - W(0) = -\mathcal{L}_{0h} = \mathcal{L}_{h0} = mgh$$

se, arbitrariamente, scelgo $W(0) = 0$, ho $W(h) = mgh$

[ma qualsiasi cost. in +(-) andrebbe bene lo stesso: $\Delta W = W_2 - W_1 = W_2' - W_1' = (W_2 + c) - (W_1 + c) = W_2 + c - W_1 - c$ con c cost.]



Conservazione dell'energia meccanica

- p.m. o corpo soggetti a f., posso definire in genere

$$E = K + W$$

energia totale meccanica, somma di e. cinetica ed e. potenziale (con $\mathcal{L}_{12} = K_2 - K_1$, lavoro **della f. risultante**, vedi p. 92), **scalare**

- **se** le f. sono conservative avrò

$$\mathcal{L}_{12} = K_2 - K_1 = W_1 - W_2$$

da cui

$$K_2 + W_2 = K_1 + W_1 = \text{cost.} \quad (= E_0)$$

oppure

$$\Delta E = 0$$

legge di conservazione dell'energia totale meccanica



Conservazione dell'energia meccanica (2)

- ad es.1: f. peso / caduta libera, si parte con $v = 0$ dalla quota h

$$E(h) = K(h) + W(h) = 0 + mgh = mgh \quad (= E_0)$$

$$E(0) = K(0) + W(0) = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}m \cdot 2gh = mgh$$

genericamente, $0 \leq y \leq h$

$$E(y) = \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy = mgh \quad (= E_0)$$

- ad es.2: moto di un p.m. di massa m attaccato ad una molla di costante elastica k , x allungamento della molla

$$E(x) = K(x) + W(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2(*) \quad (= E_0)$$

$$E(0) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad (\text{posizione di equilibrio, } x = 0)$$

$$E(A) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (\text{massima elongazione, } v = 0)$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

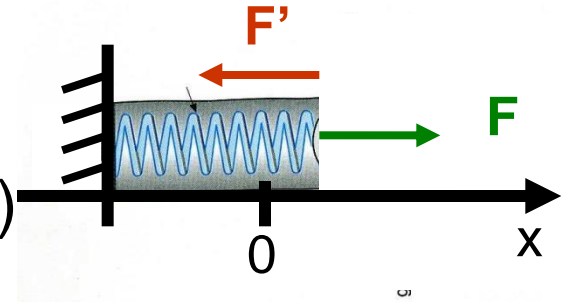


Lavoro della forza elastica

- molla orizzontale, $x = 0$ a riposo, data una f. deformante

$$x = F/k \quad (F = kx, \text{ legge di Hooke})$$

f. elastica della molla F'



⇒ in una nuova posizione di equilibrio

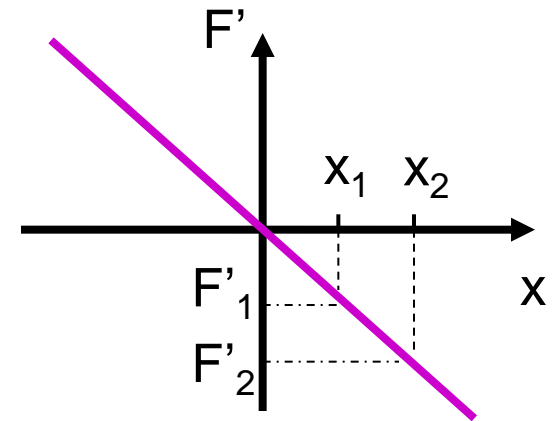
$$\mathbf{F} + \mathbf{F}' = 0; \quad \mathbf{F}' = -\mathbf{F}; \quad F' = -F = -kx$$

allunghiamo la molla da x_1 a x_2 ,

F' passa da $F_1' = -kx_1$ a $F_2' = -kx_2$

F' è variabile ⇒ uso $\underline{F}' = (F_1' + F_2')/2$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \underline{F}' \Delta x = (-kx_1 - kx_2)/2 \cdot (x_2 - x_1) \\ &= -\left(\frac{1}{2}k x_2^2 - \frac{1}{2}k x_1^2\right) = -\Delta W \end{aligned}$$





En. potenziale elastica ed en. totale

- en. potenziale della molla, allungamento x

$$W = \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{NB ponendo arbitr. } W(0) = 0)$$

- [a stretto rigore si sarebbe dovuto fare (il risultato è uguale)]

$$\mathcal{L} = \int_{x_1}^{x_2} x^2 F' dx = - \int_{x_1}^{x_2} x^2 k dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = -k/2 (x_2^2 - x_1^2)$$

- lancio un blocco di massa m contro la molla con velocità v_0 secondo x : comprimerà la molla fino a fermarsi – ponendo $x_1 = 0$, $x_2 = A$ ($v_1 = v_0 = v_{\max}$, $v_2 = 0$); trascuriamo gli attriti, **P** ed **N** non fanno lavoro

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}kA^2 \quad \text{lavoro della f. elastica (molla)}$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad \text{variazione en. cinetica (blocco)}$$

$$\mathcal{L} = \Delta K \quad (\text{teor. dell'en. cinet.}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

si ha un trasferimento di energia dal blocco alla molla



En. totale sistema massa più molla

- per due allungamenti generici x_1 e x_2 avrò

$$\Delta K = - \Delta W$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = - (\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2)$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

o anche

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = \text{cost} \quad (= E_0)$$

che è l'energia totale di un moto armonico nel tempo di periodo $T = 2\pi/\omega$ dove $\omega^2 = k/m$

(se il blocco resta agganciato alla molla, si muoverà di moto armonico semplice in assenza di attriti, v. dopo)



Lavoro delle forze non conservative

- es. considero un blocco, $m = 2.04 \text{ kg}$, che si muove senza attrito su un piano sotto l'azione di $F = 15 \text{ N}$ cost. per un tratto $d = 2 \text{ m}$ (lavoro $Fd = 30 \text{ J}$)

$$\mathcal{L} = -\Delta W = K_2 - K_1$$

$$W(x) = -Fx + \text{cost} = F(d - x) \quad (\text{pongo, arbitr., } W(d) = 0)$$

$E_0 = 30 \text{ J}$; K cresce da 0 a 30 J; W diminuisce di conseguenza

$$E(x) = K(x) + W(x) = E_0 = \text{cost} (= 30 \text{ J})$$

- se c'è attrito, ad es. $\mu_c = 0.5$, dovrò includere il lavoro della f. d'attrito non conservativa, $f = \mu N = \mu mg = 10 \text{ N}$, che si oppone al moto: $\mathcal{L}_{nc} = -fd = -20 \text{ J}$

$$\mathcal{L} = -\Delta W + \mathcal{L}_{nc} = K_2 - K_1$$

$$E(x) = K(x) + W(x) < E_0 \quad E(0) = 30 \text{ J}; E(d) = 30 - 20 = 10 \text{ J}$$



L'energia cinetica dei corpi in rotazione

- per un p.m. vincolato su una traiettoria circolare di raggio r che si muove con velocità v si ha
$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mr^2\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad [v=\omega r, \text{ vedi p. 82-85}]$$
- che è l'energia cinetica di rotazione, la stessa formula vale per un corpo di momento d'inerzia I con il baricentro a distanza r dall'asse di rotazione
- per un moto uniforme ($|\mathbf{v}| = \text{cost.}$), l'en. cinetica di rotazione si conserva, $\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega_0^2$, ossia le forze sono \perp alla traiettoria [forza centripeta, per es. forza magnetica, vedi più avanti]



Meccanica 3a parte



Elasticità



Trazione e compressione

- i corpi reali non sono rigidi ma più o meno deformabili, il tipo di deformazione dipende da come si applicano le f.
- si definisce **sforzo** la f. applicata su una superficie A divisa la superficie stessa

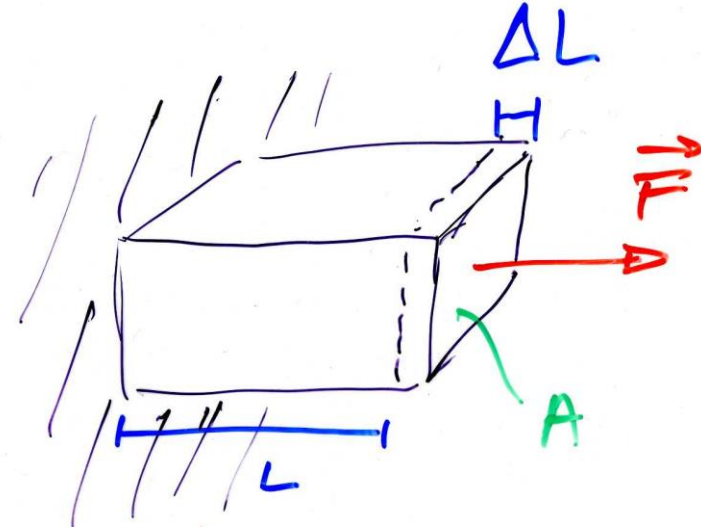
$$\text{sforzo} = F/A$$

$$[F/A] = [MLT^{-2}L^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}]$$

unità SI: N/m² o pascal (Pa)

CGS: 1 dyne/cm² = 10⁻¹ N/m²

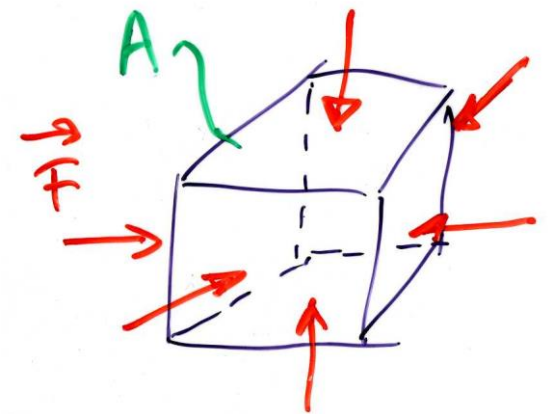
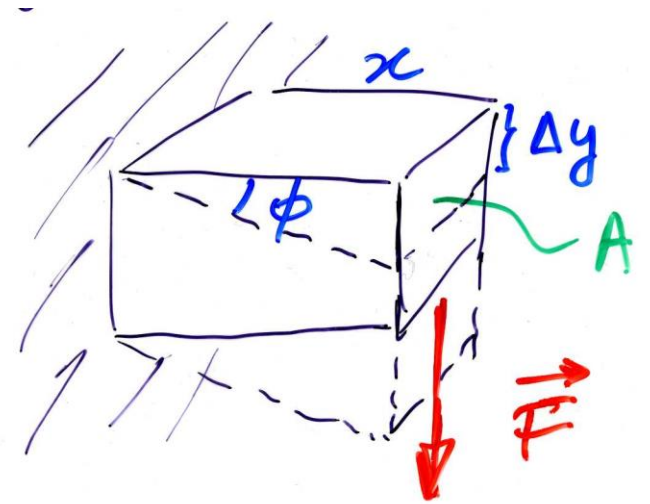
- **deformazione** = $\Delta L/L$ (numero puro)
adimensionale - la definizione di deformazione fa riferimento al tipo di sforzo: trazione (compressione) implica sforzo ortogonale alla superficie





Sforzo di taglio e di volume

- taglio: forza parallela alla sup. A
- sforzo = F/A
- deformazione = Φ (adimensionale)
con $\text{tg}\Phi = \Delta y/x$
- sforzo di volume (presente anche per liquidi e gas, senza forma propria)
- sforzo = $F/A = \Delta p$ (pressione, scalare(*))
- deformazione = $-\Delta V/V$
(l'aumento di p diminuisce V)



(*) in tutte le direz. → la direz. non conta (vedi più avanti)

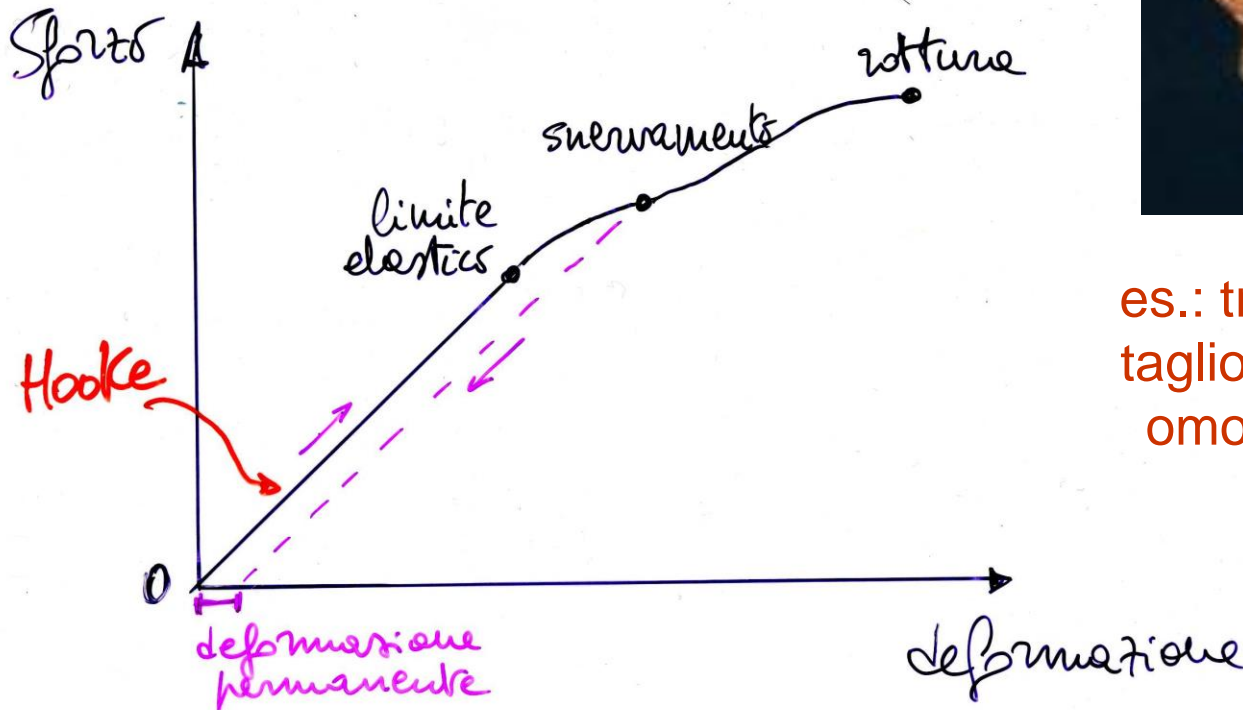


Legge di Hooke

- per piccole deformazioni, entro il limite elastico => vale la legge di Hooke

sforzio \propto deformazione

(cf. con $F = kx$, forza elastica)



es.: trazione,
taglio, sforzo
omogeneo



Legge di Hooke (2)



1. trazione/compress.

$$F/A = Y \Delta L/L$$

(Y – modulo di Young)

2. taglio

$$F/A = n \Delta \Phi$$

(n – modulo di rigidità)

3. elasticità di vol.

$$\Delta p = - B \cdot \Delta V/V$$

(B – modulo omogeneo)

	Y ($10^9 \frac{N}{m^2}$)	n ($10^9 \frac{N}{m^2}$)	B ($10^9 \frac{N}{m^2}$)
Elastomeri Solidi	Acciaio	210	83
	Pb	18	8
	Ossso	~ 10	—
	Muscolo	~ 0.005	—
	Gomma	~ 0.001	—
	Liquidi	H ₂ O	}
Hg		}	26
Gas	gas perfetto (1 atm)	}	~ 0.0001



Applicazione della legge di Hooke

- $\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y} \frac{F}{A} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = F \cdot \frac{L}{YA} = F/k \quad \text{con } k = YA/L$

- quanto si deforma l'osso di una gamba?

- $Y_{\text{osso}} \sim 10^{10} \text{ N/m}^2$

- 40 kg (su una gamba) $\Rightarrow F \sim 400 \text{ N}$

- $L \sim 0.9 \text{ m}$ (1/2 altezza)

- $A \sim 10 \text{ cm}^2 \sim 10^{-3} \text{ m}^2$

$\Rightarrow k = YA/L \sim 1.1 \cdot 10^7 \text{ N/m}$

$\Delta L = F/k \sim 3.6 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 36 \mu\text{m}$

(verifica a posteriori: $\Delta L/L \sim 4 \cdot 10^{-5}$ piccolo, si può quindi ammettere che valga la legge di Hooke)



Applicazione delle leggi dell'elasticità

- confronto formica-elefante sotto l'azione del proprio peso
- assumiamo che siano fatti con lo **stesso materiale**, **stessa resistenza al carico**, **stessa densità**

$$\rho = M/V = M/L^3$$


- schematicamente prendiamo dei cubi, **formica**, area di base $A = L^2$, $M = \rho V = \rho L^3$
- $F/A = Mg/L^2 = \rho L^3 g/L^2 = \rho L g$
- **elefante**, $L' = nL$, $A' = n^2 L^2$, $P = n^3 Mg$ $n \sim 1000-3000$
- $F'/A' = n^3 Mg/n^2 L^2 = n \rho L g$

se lo sforzo di rottura è lo stesso \Rightarrow zampe (ossa) dell'e. devono essere molto più tozze di quelle della f.

(l'osservazione che più l'animale è grosso, più le ossa devono essere spesse, è stata fatta da Galilei nel 1638)



Il carico di rottura (e sua utilità)



Pourquoi maltraitons-nous nos articles ?

Chez [redacted], nous soumettons toujours nos meubles à des tests rigoureux pour nous assurer qu'ils peuvent résister à presque tout.

Voilà pourquoi.

Publicità basata sulla fisica di una nota ditta di mobili



Fine della meccanica



INERTIA

Your truck has brakes...the massive hunk of stone doesn't.