



---

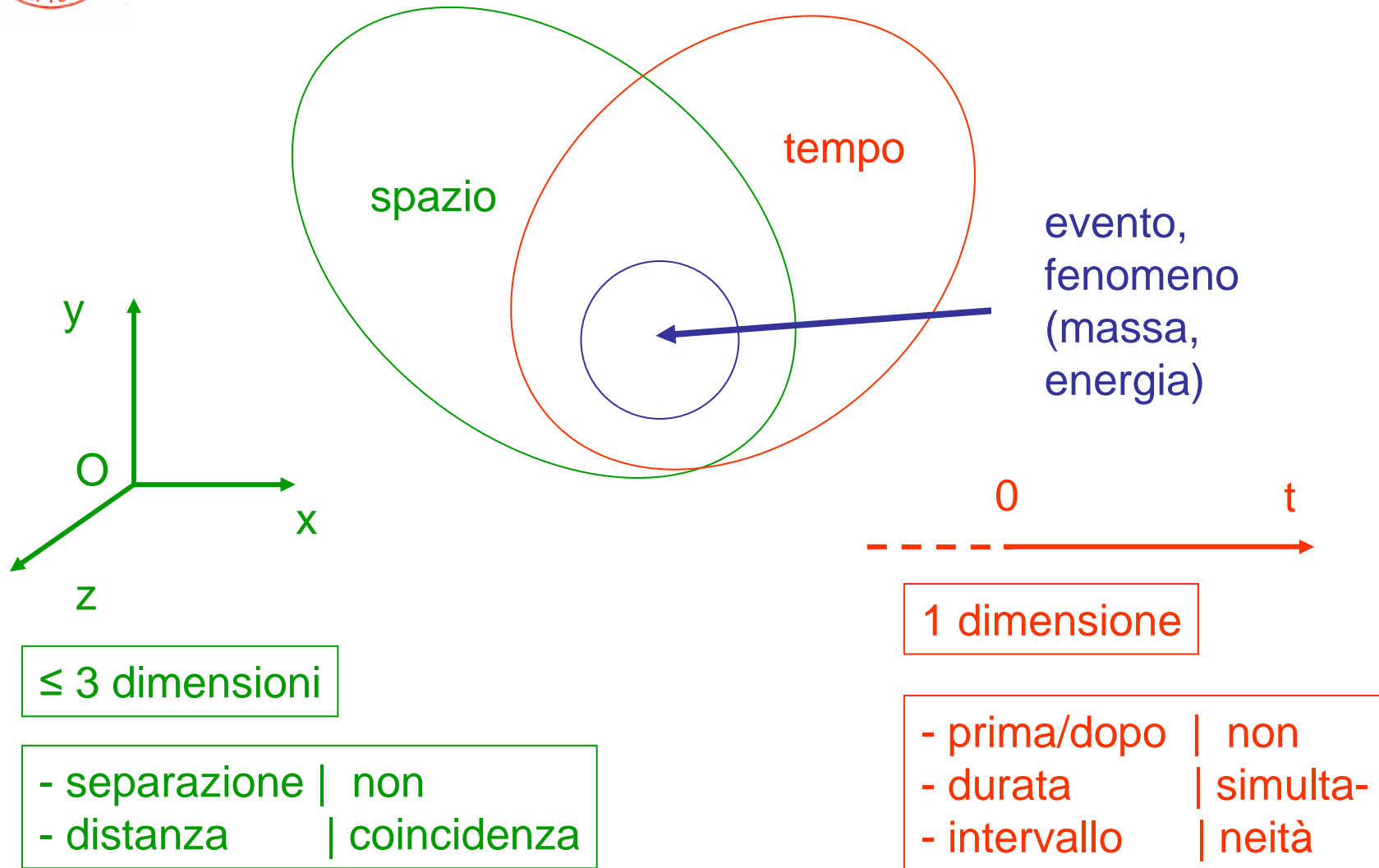
# Meccanica



Corso di Fisica per Farmacia Rimini  
AA2009/10



# Preliminari: spazio & tempo

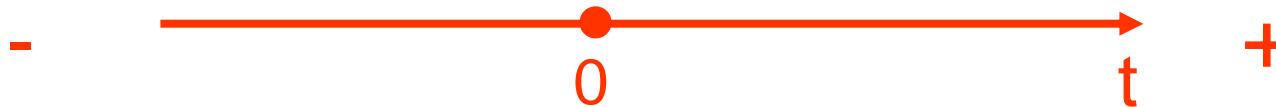




## Tempo (2)



- tempo,  $t$ , trascorso a partire da un'origine dei tempi (arbitraria, comoda), +vo o -vo, futuro o passato – noi andiamo solo verso il futuro



(non esiste il tempo assoluto, il big bang, la nascita dell'universo, ha avuto luogo  $\approx 13.7 \times 10^9$  anni fà, Edwin Hubble, 1929)

- intervallo di tempo,  $\Delta t = t_2 - t_1$ , fra due eventi, del tutto svincolato dall'origine dei tempi (matematicamente è quasi lo stesso se si pone  $t_1 = 0$  e  $t_2 = t$ )



# Punto materiale (P)

---

- estensione piccola rispetto al laboratorio
- struttura influente ai fini del movimento
- es.
  - stella, pianeti rispetto al sistema solare
  - sasso rispetto alla terra/Sala\_Manzonei/Aula\_Alberti\_7
  - molecola in un volume di gas (ad es. 1 litro)
  - etc.
- NB1 il p.m. è differente da (non è identico a) un punto geometrico
- NB2 il fatto che sia materiale (m) sarà rilevante poi nella dinamica



# Meccanica 1a parte

---

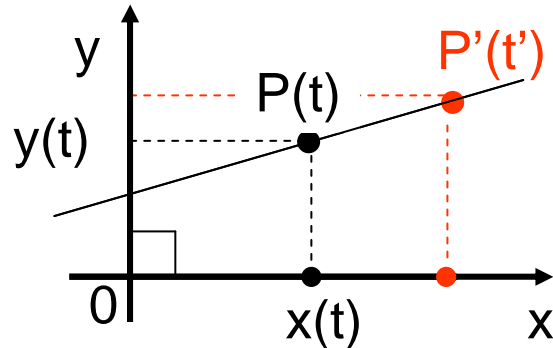


Cinematica



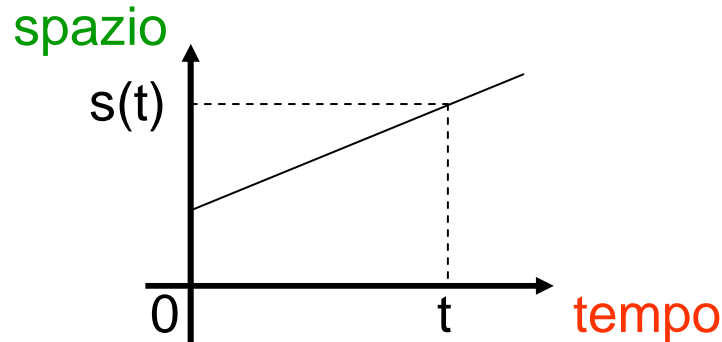
# Sistemi di riferimento, eq. oraria

- il moto è relativo => sistema di riferimento



(P occupa varie posizioni nel piano cartesiano al passare di t; 1 dimensione: x occupa varie posizioni lungo l'asse x al passare di t =>  $x = x(t)$ )

- spazio percorso nel tempo, eq. oraria

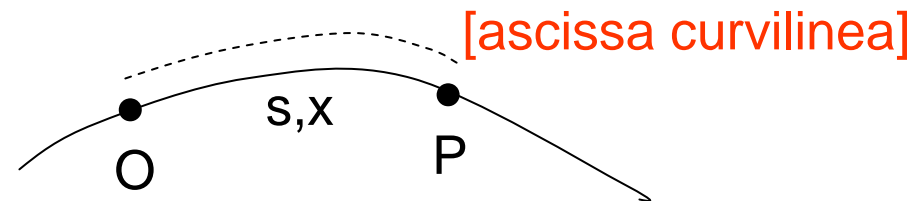
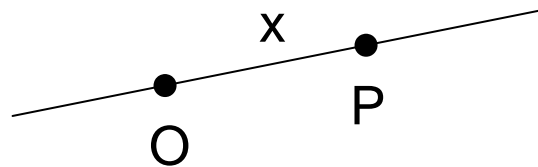


se ci interessa la distanza percorsa in un certo tempo indipendentemente dalla direzione



# Moto in 1 dimensione

- in questo caso conta solo il verso +vo o -vo dello spostamento nel tempo => possiamo usare quantità scalari (non cambia la direzione)
- due possibilità: **moto lungo una retta, x**, o **moto lungo una traiettoria (curva) fissata, s o x**



- si definisce  
velocità media =  $\frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato a percorrerlo}}$

$$\boxed{v_m = \frac{s}{t}} \quad \text{o} \quad \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{o} \quad \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



# Velocità

- la velocità istantanea è ( $\Delta t \rightarrow 0$ , uguale a  $t_2 \rightarrow t_1$ )

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{dx}{dt}$$

in generale

$$x = x(t)$$

$$v = v(t)$$

- le dimensioni di  $v$  sono

$$[v] = [s/t] = [st^{-1}] = [LT^{-1}]$$

- le unità di misura nel SI sono m/s e nel CGS cm/s – altra unità usata è km/h

6 m/s = ? cm/s; si moltiplica per  $1 = 10^2$  cm/m

$$6(\cancel{m/s}) \cdot 10^2 \cancel{\text{cm/m}} = 6 \cdot 10^2 \text{ cm/s}$$

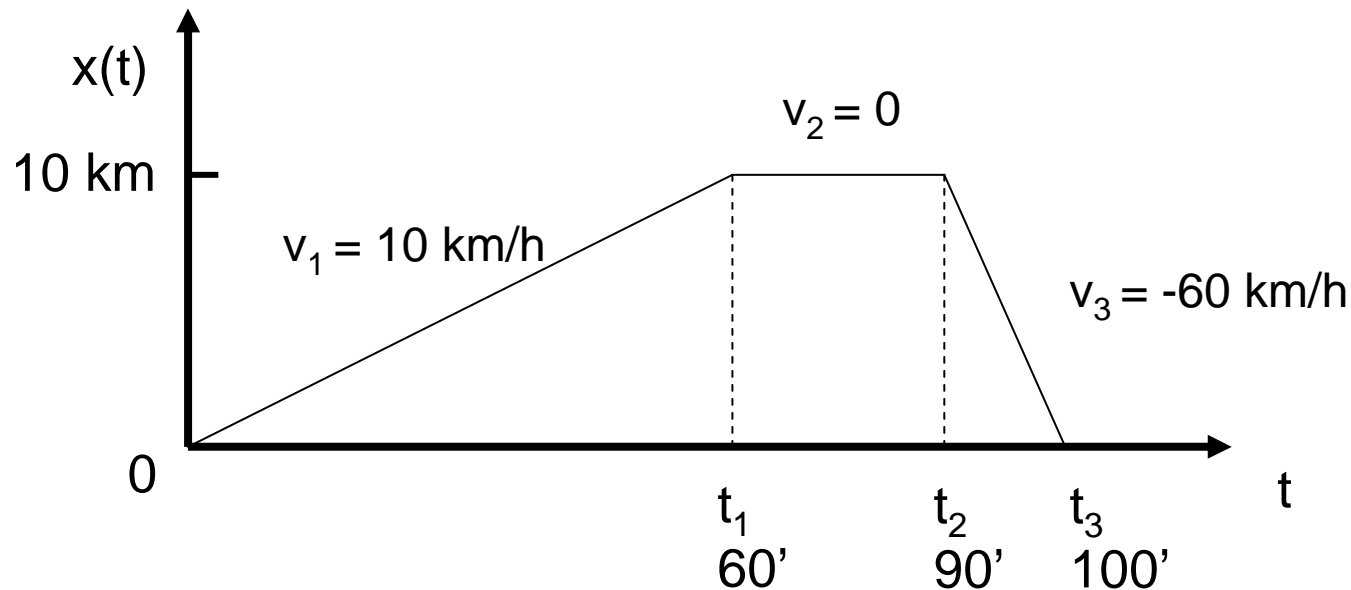
se devo convertire un'unità a numeratore la metto a denominatore nel rapporto unitario etc.; NB  $s^{-1} \rightarrow s^{-1}$





## Velocità (2)

- $2.5 \text{ m/s} = ? \text{ km/h} : 1 = 1 \text{ km}/10^3 \text{ m} \quad 1 = 3.6 \cdot 10^3 \text{ s/h}$   
 $2.5 \cancel{\text{m/s}} \cdot 3.6 \cdot 10^3 \cancel{\text{s/h}} \cdot 1/\cancel{10^3} \text{ km/m} = 2.5 \cdot 3.6 \text{ km/h} = 9.0 \text{ km/h}$
- **NB in generale: v. media  $\neq$  media delle velocità**  
( se i  $\Delta t$  sono diversi), ad es.





## Velocità (3)

- $v_m = [x(t_3) - x(0)] / (t_3 - 0) = (0 - 0) / 100' = 0$
- $\underline{v} = (\sum_{i=1,3} v_i) / 3 = (10 + 0 - 60) / 3 \text{ km/h} = -17 \text{ km/h}$
- in formule (\*)

$$v_m = (\sum_{i=1,n} \Delta x_i) / (\sum_{i=1,n} \Delta t_i) = (\sum_{i=1,n} v_i \Delta t_i) / (\sum_{i=1,n} \Delta t_i)$$

quindi solo se i  $\Delta t_i$  sono tutti  $= \Delta t$ , si ha

$$\sum_{i=1,n} \Delta t_i = \sum_{i=1,n} \Delta t = n \Delta t \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1,n} v_i \Delta t = \Delta t \cdot \sum_{i=1,n} v_i$$

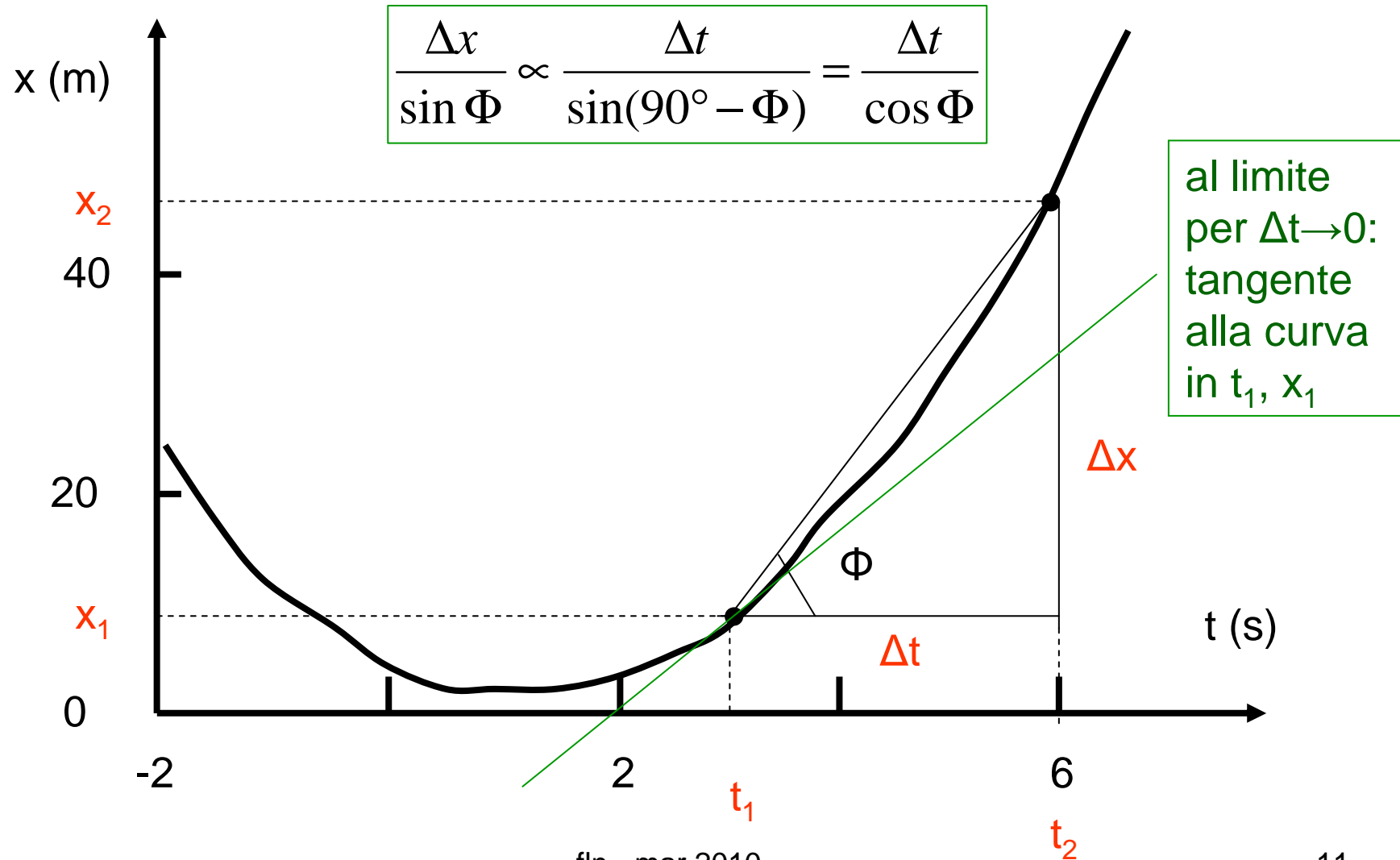
$$\Rightarrow v_m = \Delta t \cdot (\sum_{i=1,n} v_i) / (n \Delta t) = (\sum_{i=1,n} v_i) / n = \underline{v}$$

- se si conoscono  $\Delta x_i$ ,  $v_i \Rightarrow \Delta t_i = \Delta x_i / v_i$  e si ha

$$v_m = (\sum_{i=1,n} \Delta x_i) / (\sum_{i=1,n} \Delta x_i / v_i) \quad (\text{formula utile per gli esercizi})$$



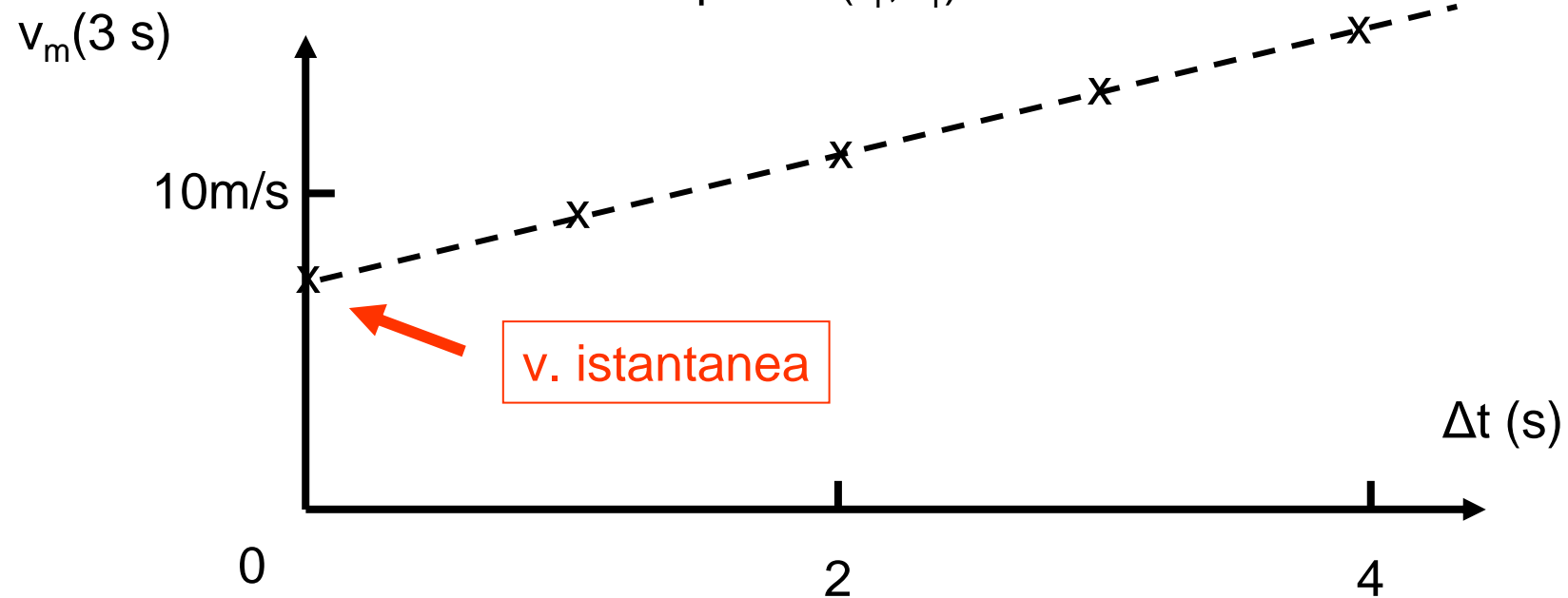
## Significato geometrico di $v_m$ e di $v$ istantanea





## Significato geometrico di $v_m$ e di $v$ istantanea (2)

- data la curva  $x = x(t)$  (lucido precedente)
  - $v_m = \Delta x / \Delta t \sim \text{tg } \Phi$  dà la direzione della corda tirata fra i punti  $(t_1, x_1)$  e  $(t_2, x_2)$
  - $v(t_1) = dx/dt|_{t_1}$  dà la direzione della tangente alla curva nel punto  $(t_1, x_1)$





## Accelerazione media e istantanea

---

- in generale  $v = v(t)$ , si definisce accelerazione media

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- e accelerazione istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

- $[a_m] = [a] = [v/t] = [st^{-1}t^{-1}] = [LT^{-2}]$
- unità SI:  $m/s^2$       CGS:  $cm/s^2 = 10^{-2} m/s^2$
- $g$  (accelerazione di gravità)  $\approx 9.81 m/s^2 = 981 cm/s^2$



# Moto uniforme e uniformemente accelerato

## Casi particolari

- moto uniforme (rettilineo o su traiettoria fissa, potrei usare anche  $x$ )

$$v_m = v_0 = \text{cost} = \Delta s / \Delta t = (s - s_0) / (t - 0) \quad \text{indipendente da } t$$

$$\Rightarrow \boxed{s = v_0 t + s_0} \quad (*) \quad s = s(t)$$

$$a = 0 \quad \text{infatti } a_m = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) = (v_0 - v_0) / (t_2 - t_1) = 0$$

- moto uniformemente accelerato

$$a_m = a_0 = \text{cost} = \Delta v / \Delta t = (v - v_0) / (t - 0) \quad \text{indipendente da } t$$

$$\Rightarrow \boxed{v = a_0 t + v_0} \quad (*) \quad v = v(t)$$

capita spesso!  
per es.  $g$

(\*) le cost.  $s_0, v_0$  dipendono dalla scelta dell'origine dei  $t$



## Moto uniformemente accelerato (2) (\*)

$$1. \quad v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad \longrightarrow \quad s_2 = s_1 + v_m(t_2 - t_1)$$
$$2. \quad a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \longrightarrow \quad v_2 = v_1 + a_0(t_2 - t_1)$$

$v$  varia linearmente  $\rightarrow$  prendo  $v_m = (v_1 + v_2)/2$  (centro dell'intervallo)

$$s_2 = s_1 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(t_2 - t_1) = s_1 + \frac{1}{2}(v_1 + v_1 + a_0(t_2 - t_1))(t_2 - t_1)$$

$$s_2 = s_1 + v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_0(t_2 - t_1)^2 \quad \text{ora pongo } t_1 = 0 \text{ e } t_2 = t$$

$$s_1 = s(0) = s_0; \quad s_2 = s(t); \quad v_1 = v(0) = v_0; \quad v_2 = v(t)$$

(NB  $t_1$  e  $t_2$  sono qualsiasi)

(\*) dimostrazione facoltativa

fln - mar 2010

15



## Moto uniformemente accelerato (3)

---

$$\longrightarrow s(t) = s_0 + v_0(t-0) + \frac{1}{2}a_0(t-0)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a(t) = a_0 \end{array} \right.$$

dove  $s_0, v_0$  sono spazio percorso e velocità a  $t = 0$

Se considero un moto rettilineo unif. acc., userò  $x$  (anche come ascissa curvilinea) e senza rifare i passaggi (!)

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a(t) = a_0 \end{array} \right.$$





## Moto uniformemente accelerato (4)

Se considero la caduta di un grave che parte da fermo **in assenza di attrito**, chiamando  $h(t)$  l'altezza rispetto al suolo, ponendo cioè  $h(0) = h_0$ , poichè  $a_0 = -g$  accelerazione di gravità in questo sistema di riferimento, ho

$$\begin{cases} h(t) = h_0 - \frac{1}{2} gt^2 \\ v(t) = -gt \\ a(t) = -g \end{cases}$$

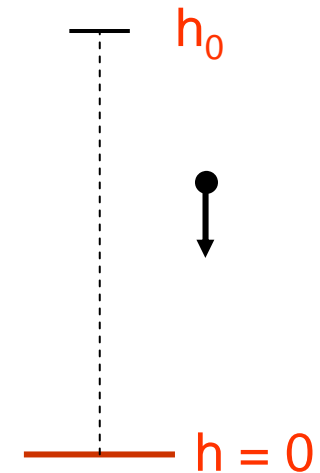
e il grave raggiunge il suolo,  $h = 0$ , dopo un tempo

$$t = \sqrt{2h_0/g} \quad (\text{da } 0 = h_0 - \frac{1}{2} gt^2)$$

$$h_0 = 56 \text{ m}, \theta = 5^\circ 30' \rightarrow t = ? \quad \Delta x \text{ alla base} = ?$$

$$t = 3.38 \text{ s} \quad \Delta x = 5.39 \text{ m}$$

fln - mar 2010





## Moti in una dimensione

---

- vario  $a = a(t)$  (il più generale)  
se  $av > 0$  accelerato ( $av < 0$  decelerato)
- uniforme  $a = 0; v = \text{cost}$
- uniformemente accel.  $a = \text{cost} = a_0; v = v(t)$

dalle 2 eq. per  $x(t)$  e  $v(t)$  si può eliminare il parametro  $t$ , per es. dalla 2<sup>a</sup>,

$$t = (v(t) - v_0) / a_0$$

e sostituendo nella 1<sup>a</sup>

$$x(t) = x_0 + v_0 \underbrace{(v(t) - v_0) / a_0}_t + \frac{1}{2} a_0 \underbrace{[(v(t) - v_0) / a_0]^2}_{t^2}$$



Una relazione importante per il moto unif. acc.


---

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \cancel{v_0/a_0} - v_0^2/a_0 + \frac{1}{2}(v^2 - \cancel{2vv_0} + v_0^2)/a_0 \\ &= x_0 - \frac{1}{2} v_0^2/a_0 + \frac{1}{2} v^2(t)/a_0 = x_0 + \frac{1}{2}(v^2(t) - v_0^2)/a_0\end{aligned}$$

che può essere riscritta

$$2a_0(x(t) - x_0) = v^2(t) - v_0^2$$

valida per **qualsiasi moto uniformemente accel.** –  
intervengono esplicitamente solo **lo spazio, la  
velocità e l'accelerazione**

  $v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2a_0(x(t) - x_0)}$  etc.



## Derivazione e integrazione

---

- se conosco  $x(t)$   $\longrightarrow$   $v(t) = dx(t)/dt$ ;  $a(t) = dv(t)/dt$
- però nei problemi di meccanica (e non solo) si conosce l'accelerazione  $a = F/m$  (vedi 2<sup>a</sup> legge della dinamica,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , più avanti)

$\longrightarrow$  bisogna seguire il cammino inverso ed integrare

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt; \quad s(t) = \int_0^t v(t)dt$$

(questa operazione è stata fatta “di nascosto” nel ricavare le formule del moto uniformemente accelerato)



## Qualche semplice regola

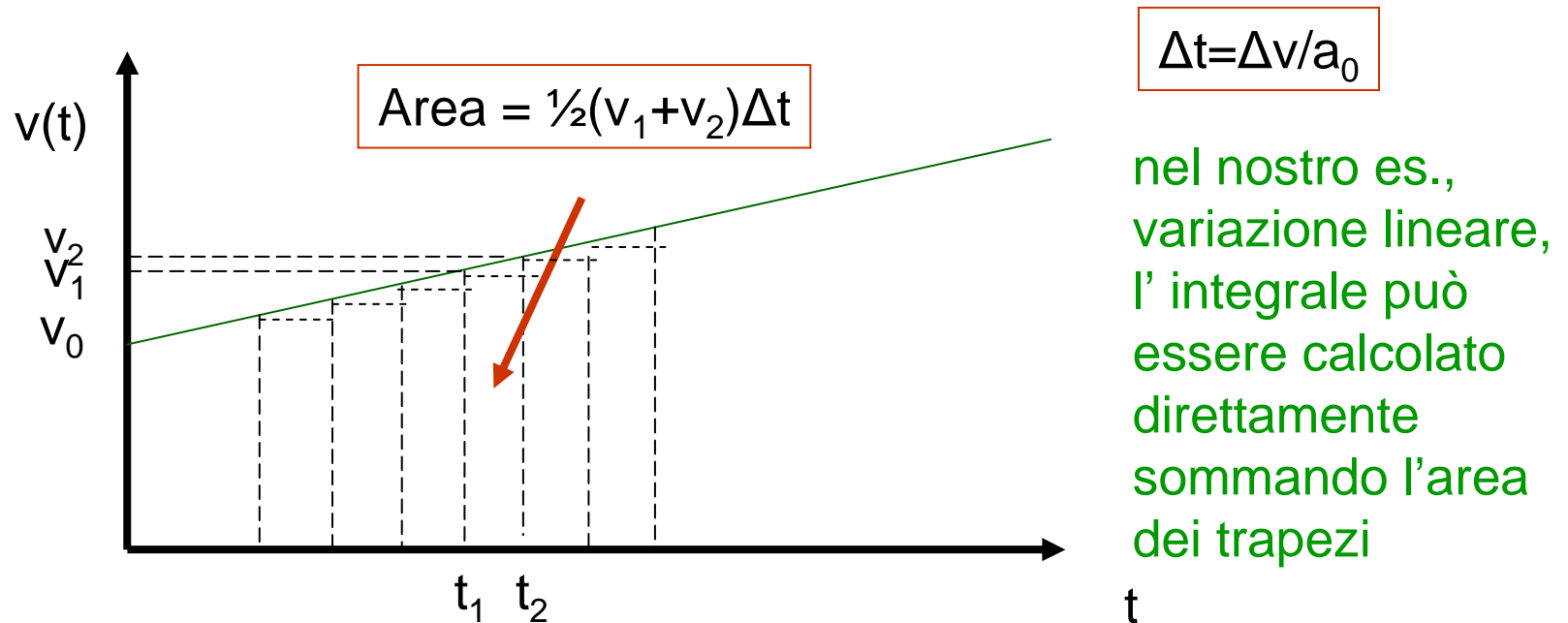
---

- la derivata di una costante è zero  $(d/dt)\text{cost} = 0$   
(ma anche  $\Delta(\text{cost}) = \text{cost} - \text{cost} = 0!$ )  
ad es.  $dv_0/dt = 0, ds_0/dt = 0$  etc.
- una costante può essere portata fuori dal segno di derivazione (e di integrazione)  
ad es.  $d/dt(\frac{1}{2}a_0t^2) = \frac{1}{2}a_0(d/dt)t^2 = a_0t$  etc.
- la derivata di  $t^1$  è  $(d/dt)t = 1t^0 = 1$   
ad es.  $d(v_0 + a_0t)/dt = 0 + a_0$  etc.
- l'integrale di una costante è una retta di pendenza costante  
ad es.  $v(t) = \int_0^t a_0 dt = a_0 \int_0^t dt = a_0[t]_0^t = a_0(t-0) = a_0t$
- l'integrale di  $t^1$  è  $t^2/2$  etc.



## L'interpretazione geometrica dell'integrazione.

- l'integrazione corrisponde al calcolo dell'area sotto la curva descritta dalla funzione – a rigore è la somma delle aree dei rettangoli  $v_1(t_1)(t_2-t_1)$  quando  $t_2 \rightarrow t_1$  o  $\Delta t \rightarrow 0$





## Sommario cinematica ad 1 dimensione

---

- $x(t) \xrightarrow{\text{derivazione}} v(t) \xrightarrow{\text{derivazione}} a(t)$  procedimento diretto
- $a(t) \xrightarrow{\text{integrazione}} v(t) \xrightarrow{\text{integrazione}} x(t)$  procedimento inverso
- NB in dinamica si parte da  $\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m$



# Moto in 2 (3) dimensioni







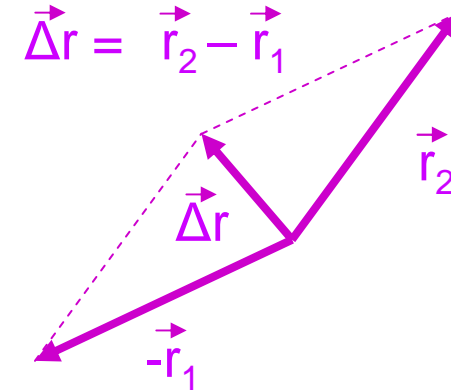
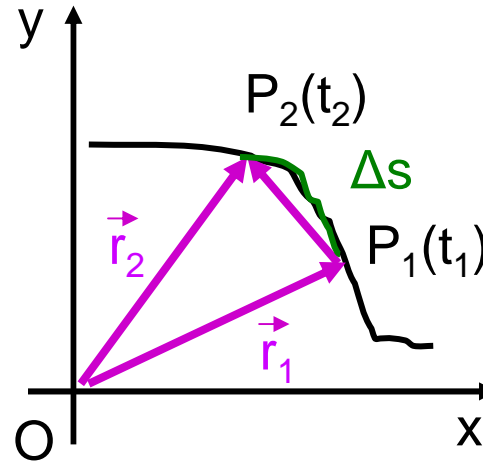
# Velocità nel piano

(spostamento)

$\vec{r}$  – raggio vettore

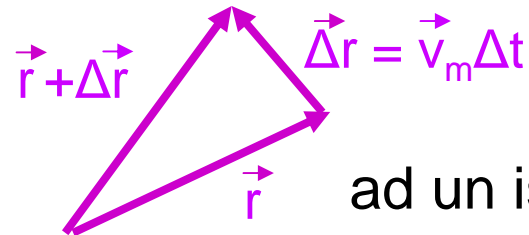
vettore velocità media:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



vettore velocità istantanea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



ad un istante generico t

il vettore velocità al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  (ossia per  $t_2 \rightarrow t_1$ ) risulta *sempre* tangente alla traiettoria (nell'es. in  $P_1$ )



## Accelerazione nel piano

---

- $\vec{a}$  nel piano è in generale sia tangenziale che centripeta ( $\vec{v}$  in generale varia sia in modulo che in direzione e verso)

- accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- accelerazione istantanea

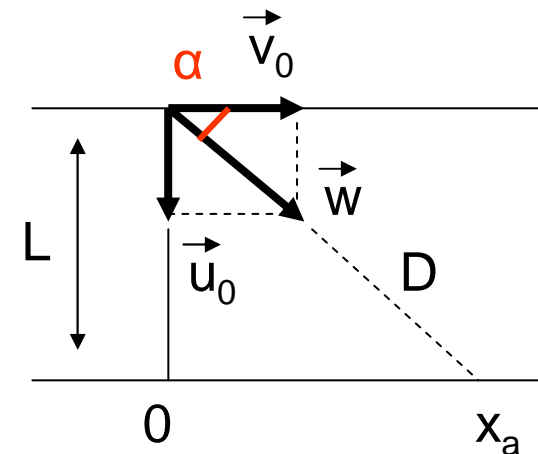
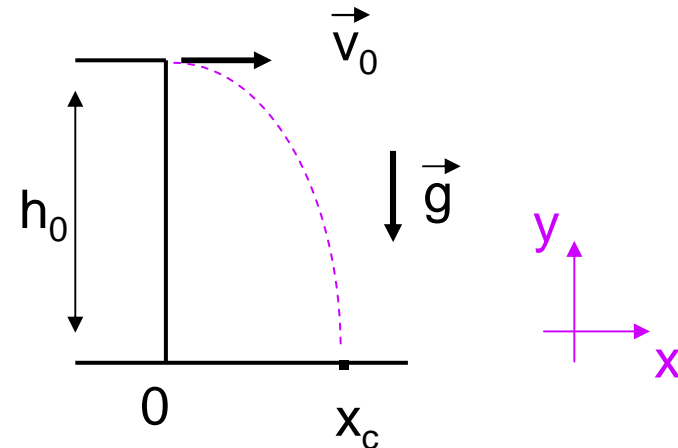
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- NB nel moto rettilineo  $\vec{v}$  varia solo in modulo e verso ( $v$ )  $\Rightarrow$   $\vec{a}$  risulta esclusivamente tangenziale ( $a$ )



# Moti piani - composizione dei movimenti

- $v_0 = 6 \text{ m/s}$ ;  $h = 20 \text{ m}$ ;  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$   
 $y_{\text{caduta}} = 0 \text{ m}$ ;  $x_{\text{caduta}} = ?$   
 $x = v_0 t$ ;  $y = h_0 - \frac{1}{2} g t^2$   
 $\rightarrow t_c = \sqrt{2h_0/g} = 2.02 \text{ s}$  (lo stesso  
che cadendo da fermo)  
 $\rightarrow x_c = v_0 \sqrt{2h_0/g} = 6 \cdot 2.02 = 12.1 \text{ m}$
- barca (nuotatore) vs corrente  
o vespa (mosca) vs abitacolo  
attraversam.:  $t_a = L/u_0 = D/w = x_a/v_0$   
(lo stesso che senza corrente ( $v_0 = 0$ ))  
 $w = \sqrt{v_0^2 + u_0^2}$  (velocità vista dalla riva  
(o ciglio della strada))  
 $x_a = v_0 t_a = v_0 L/u_0$ ;  $y_a = 0$   
 $\alpha = \text{arctg}(u_0/v_0)$

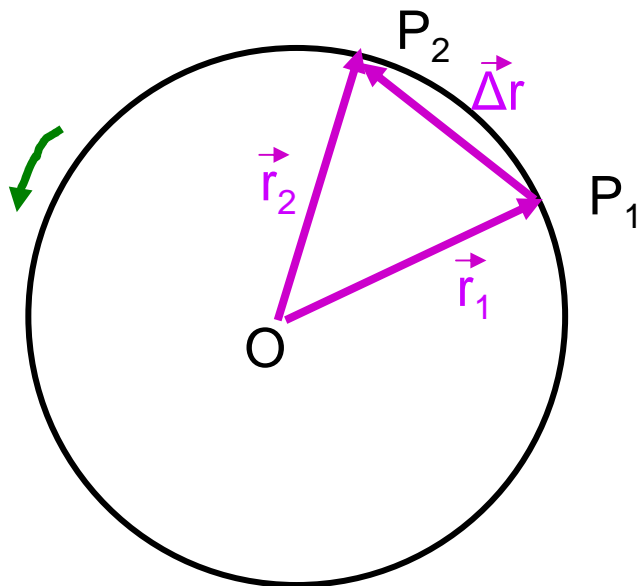




# Moto circolare uniforme

un altro es. di moto piano

- moto circolare:  $r = |r| = \text{cost}$
- uniforme/periodico: solo se  $v = |v| = \text{cost}$



Il periodo T è il tempo impiegato a fare un giro completo ( $r, v = \text{cost}$ )

$$T = 2\pi r/v = 1/\nu$$

(frequenza = periodo<sup>-1</sup>)

La velocità angolare  $\omega$  è l'angolo per unità di tempo

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu \quad ( =v/r )$$

**NB  $\omega$  si misura in rad/s**

**$\nu$  si misura in s<sup>-1</sup> o hertz (Hz)**



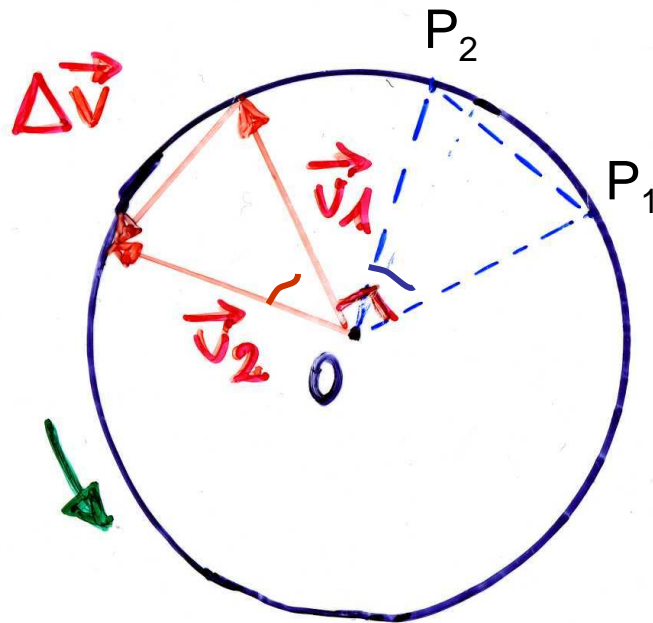
## Moto circolare uniforme (2)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\boxed{v = r\omega} = r 2\pi \nu$$

[dalla def. di T:  $v = 2\pi r/T = \underbrace{(2\pi/T)}_{\omega} r$ ]

$$\boxed{\vec{v} \perp \vec{r}}$$



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} \text{ anti } // \vec{r}}$$

( $\vec{a}$  è parallela a  $\Delta \vec{v}$ )



## Moto circolare uniforme (3)

triangoli (blu e rosso) simili (angolo fra  $OP_1$  e  $OP_2 =$   
 $=$  angolo fra  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ )

$$\longrightarrow \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

siccome  $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r$   
 $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$

(isosceli e con un angolo uguale)

$$\longrightarrow \frac{1}{r} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{v} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} ( \text{''} ) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} ( \text{''} )$$

(dividendo per  $\Delta t$ , prima di passare al limite)



# Accelerazione centripeta

passando al limite si ha il modulo di  $a$ , l'indice  $c$  implica una  $a$  centripeta

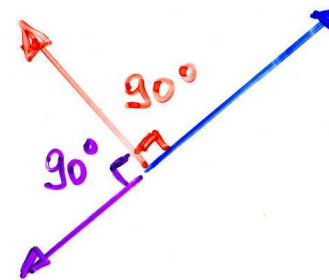
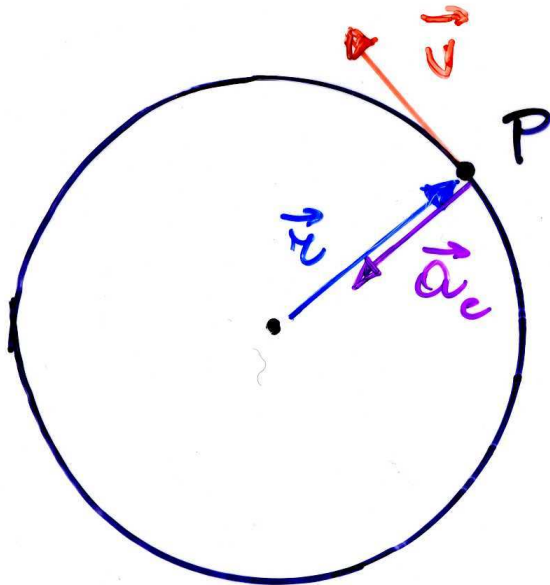
$$\frac{v}{r} = \frac{a}{v}$$



$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

$\vec{a}_c$ : direzione di  $\vec{r}$ , verso opposto

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$



$$a_c = \omega v$$

(l'acc. centripeta,  $\vec{a}_c$ , è diretta verso il centro della circonferenza; in generale, se la traiettoria non è circolare, verso il centro di curvatura della traiettoria)



## L'accelerazione nel moto circolare uniforme (\*)

---

- nel piano abbiamo 2 eq. differenziali
  - $\vec{r}(t)$  ha componenti  $x(t)$  e  $y(t)$ ;  $\vec{v}(t)$  ha componenti  $v_x(t)$  e  $v_y(t)$ ;  $\vec{a}(t)$  ha componenti  $a_x(t)$  e  $a_y(t)$

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y(t)$$

- soluzione:  $\forall$  funzione  $f(t)$  che derivata 2 volte dia  $-\omega^2 f$  [ad es.  $f(t) = x_0 \cos(\omega t)$ ,  $df/dt = -\omega x_0 \sin(\omega t)$ ,  $d^2f/dt^2 = d(df/dt)/dt = -$

(\*)  $f(t) = x_0 \cos(\omega t)$  con  $x_0 = |\vec{r}|$  etc.] – ciascuna

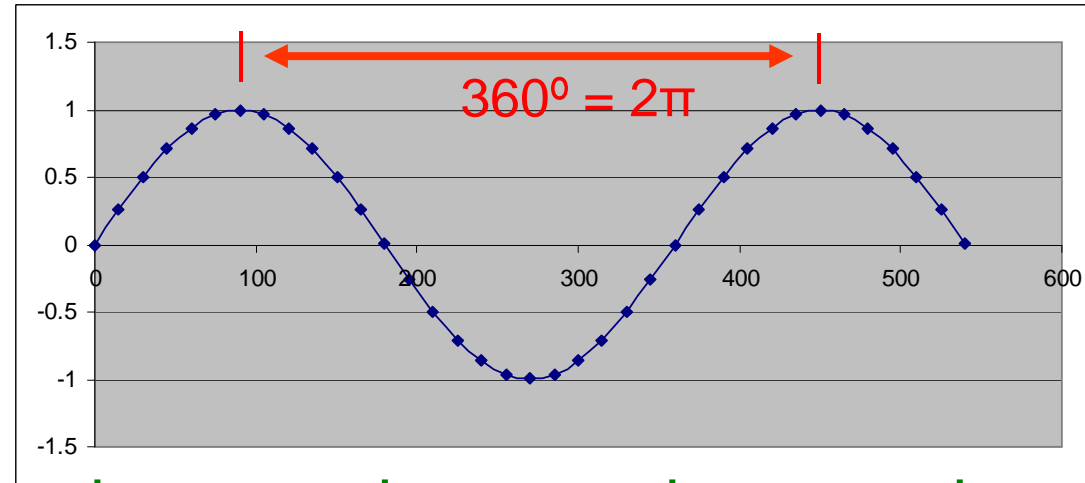




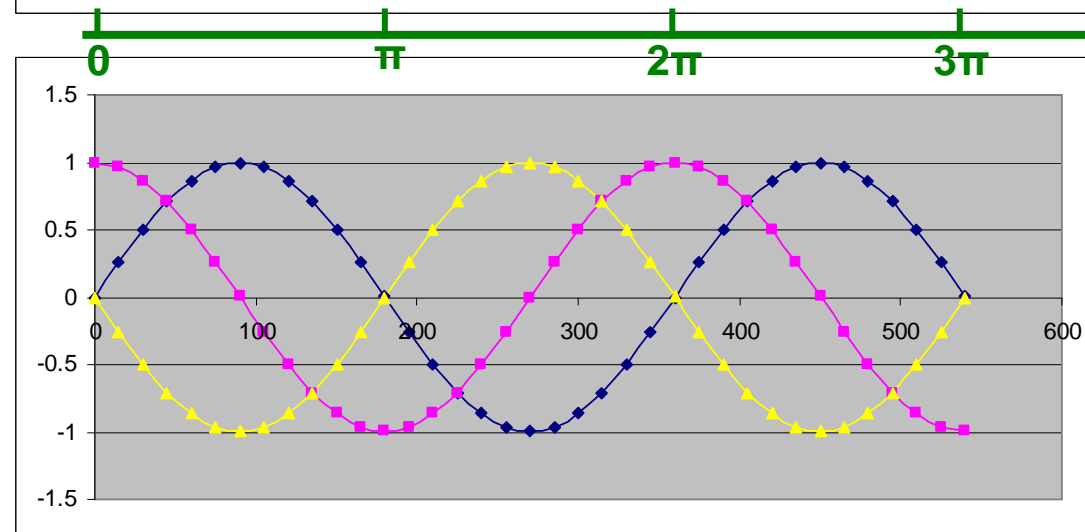
# Funzioni elementari periodiche(\*)

ad es.  
 $\sin \alpha$

periodo (distanza fra massimi o fra minimi successivi) =  $360^\circ = 2\pi$



$\alpha (^\circ)$



$\alpha$  (rad)

$\alpha (^\circ)$

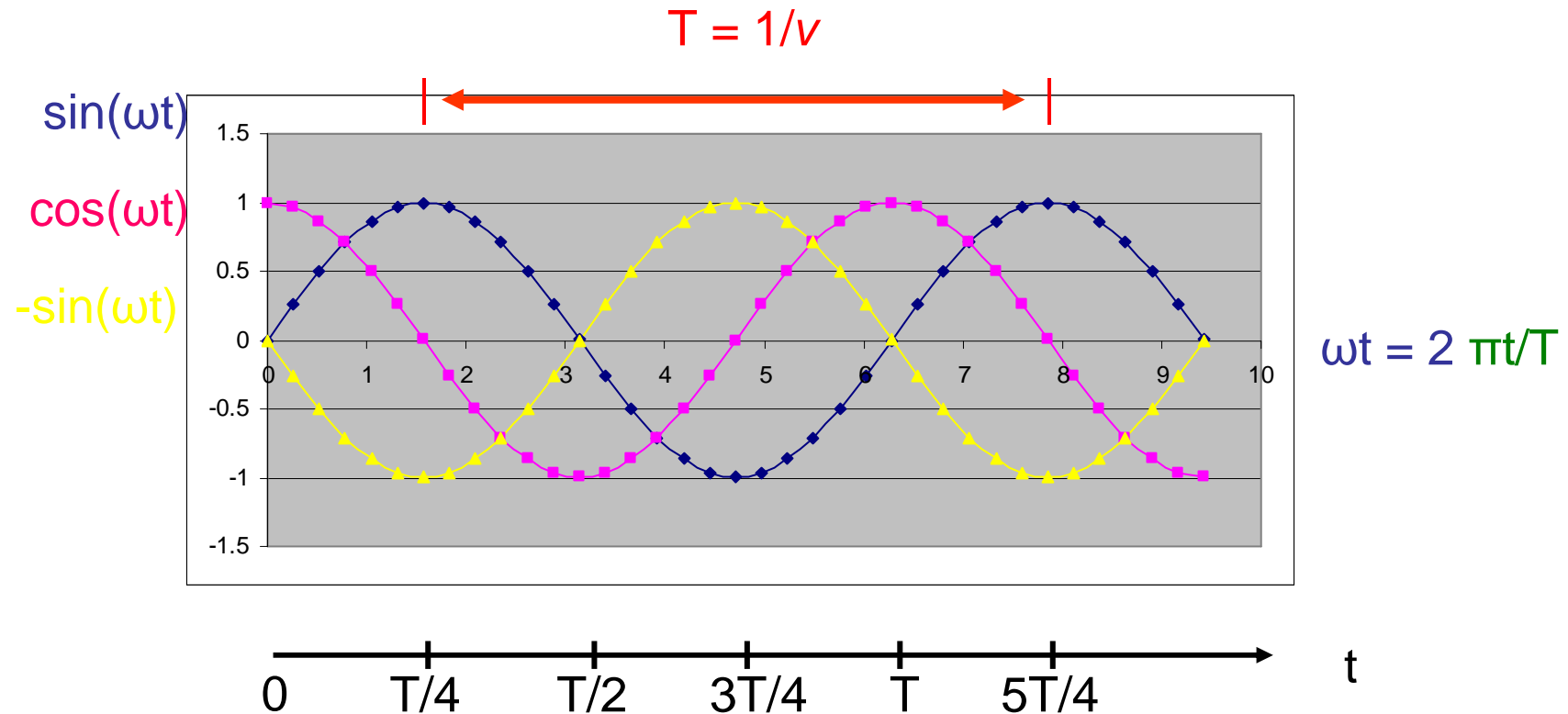
$\sin \alpha$ , la sua derivata 1<sup>a</sup>,  $\cos \alpha$ , e la derivata 2<sup>a</sup>,  $-\sin \alpha$ , hanno tutte uguale periodo

(\*) facoltativo



## Funzioni elementari periodiche (2)(\*)

$$f(t) = \sin(\omega t) = \sin(2\pi t/T); \quad df(t)/dt = \omega \cos(2\pi t/T); \quad d^2f(t)/dt^2 = -\omega^2 \sin(2\pi t/T)$$



NB  $\omega$  in rad/s,  $t$  in s,  $\omega t$  in rad

(\*) facoltativo



# Meccanica 2a parte

---

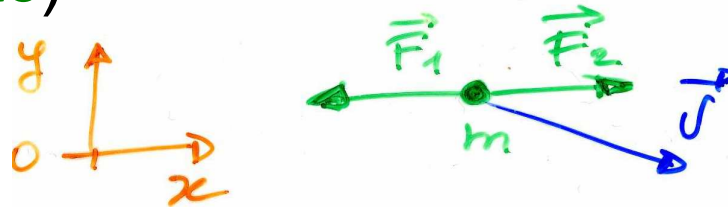


**Dinamica**

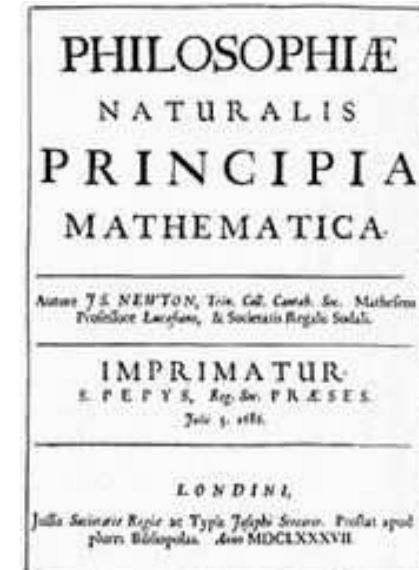
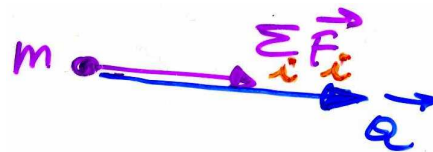


# Enunciati dei 3 principi della dinamica, p.m. (Newton)

1. Inerzia: se  $\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{q} = m\vec{v} = \text{cost.}$   
 ( $\sum_i \vec{F}_i = \text{risultante}$ )



2. Se  $\sum_i \vec{F}_i \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$  ( $\vec{F} = m\vec{a}$ )



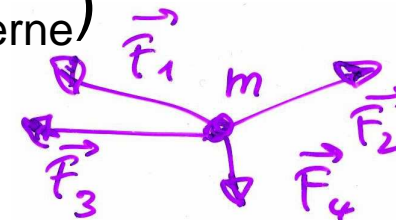
3. Simmetria delle azioni:  $\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$





## Cause del moto: le forze

- per la modifica dello stato di quiete/moto di un corpo: occorre un'interazione con altri corpi (a contatto o a distanza) - l'interazione è necessaria per variare la  $\vec{v}$  o la quantità di moto,  $\vec{q} = m\vec{v}$ , del corpo (**II principio**)
- in assenza d'interazione (forza) lo stato di quiete/moto (rettilineo uniforme) permane: principio d'inerzia (**I principio**)
- sistema inerziale (in cui vale il principio d'inerzia): per es. terna centrata sul sole, fissa rispetto alle stelle lontane – la terra è solo approx inerziale (rotazione)
- la risultante  $\Sigma_i \vec{F}_i$  determina il moto del punto materiale (per oggetti estesi saranno solo le  $\vec{F}_{\text{esterne}}$ )





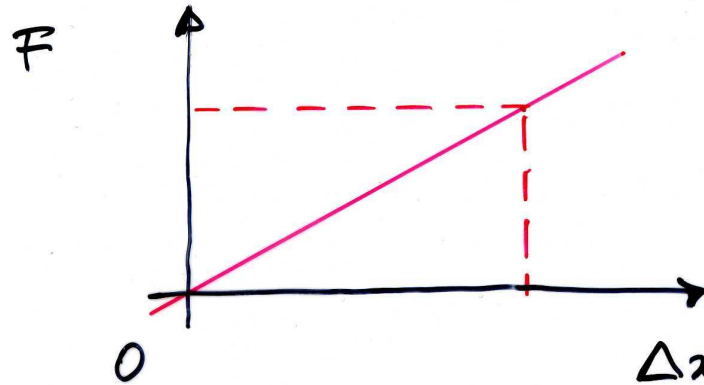
## Forze: effetto dinamico ed effetto statico

---

- occorre una definizione operativa di forza, ossia dare il metodo di misura
- **constatazione**: tutti i gravi, se sono liberi di cadere, si sentono attratti dalla terra e cadono lungo la verticale verso il basso: sentono la forza peso o di gravità (effetto dinamico)
- **altra constatazione**: se lo stesso grave è vincolato ad una molla elicoidale non cade ma la deforma, la allunga (effetto statico)
- in generale,  $\forall$  forza vincolata produce una qualche deformazione
- la molla (il dinamometro) può essere usata per misurare le forze previa calibrazione ed entro il limite di elasticità (limite dato dalla validità della legge di Hooke): una volta calibrata, la molla può essere usata per  $\forall$  tipo di forze (elett., magn., etc.)
- la direzione del vettore forza è quella dell'asse della molla ed il verso è quello in cui si produce l'allungamento



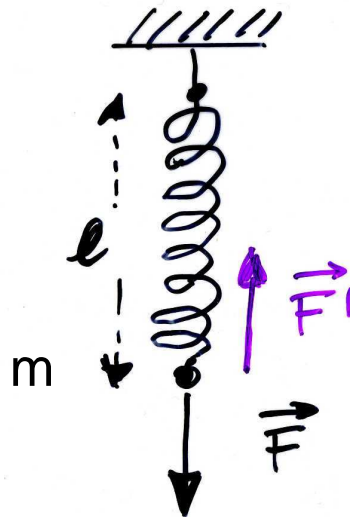
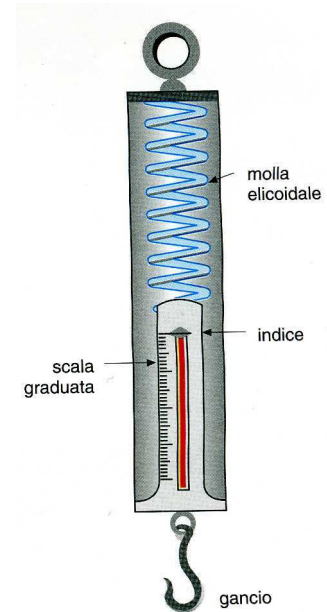
# Dinamometro (molla) e misura statica delle forze



$$F = k \Delta x$$

↑  
costante  
delle molle

$$\Delta x = l - l_0$$



Legge di Hooke:  
forza  $\propto$  allungamento

ad es. il cilindretto di Fe portato a lezione  
( $m = 44.83 \text{ g}$ ) produce una  $l = 26 \text{ cm}$  sulla  
molla ( $l_0 = 19 \text{ cm}$ ):  $\Delta x = l - l_0 = 7 \text{ cm}$

→  $k \propto m/\Delta x$

(si può vedere usando altre coppie  $m'$ ,  $\Delta x'$  ... )



# Massa e Il principio della dinamica

---

- avendo fissato una scala di forza, possiamo constatare che una forza produce un'accelerazione (effetto dinamico)
  - in via di principio, posso applicare  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 \dots$  etc. note e registrare le accelerazioni  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \dots$  etc. sul corpo o p.m.:  
i rapporti  $F_1/a_1 = F_2/a_2 = F_3/a_3 = \dots = \text{cost.} = m$   
 $\Rightarrow F/a = m$  ossia  $F = ma$   
 $\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$  (Il principio)
- con  $m$  massa (inerziale) del corpo
- $\vec{F}$  e  $\vec{a}$  sono vettori e si combinano con la regola del parallelogramma –  $m$  non dipende dall'orientazione, **scalare**, nè dal tipo di forza (gravit., elast., elett., magn. ...), **proprietà intrinseca del corpo o p.m.**





# Il principio, dimensioni e unità della forza

- dal II principio

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

scalare (inerzia)

{molla (f. elastica), peso, f. elettrica, f. magnetica}

il I principio si ottiene  
per  $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$

- dimensioni della f.:

$$[F] = [ma] = [MLT^{-2}]$$

- unità

- SI:  $1N = 1kg \cdot 1ms^{-2}$  (newton)
- CGS:  $1dyne$  (o dina)  $= 1g \cdot 1cms^{-2} =$   
 $= 10^{-3}kg \cdot 10^{-2}ms^{-2} = 10^{-5}N$
- sist. ingegneri  $1kgp = 1kg \cdot g = 1kg \cdot 9.81ms^{-2} = 9.81 N$
- $1N \approx$  forza peso esercitata da una mela (piccola,  $m \approx 100g$ )



## Forza e massa, def. dinamica (1)(\*)

alternativamente:

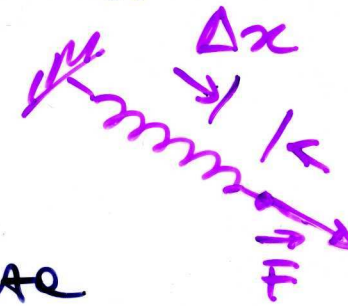
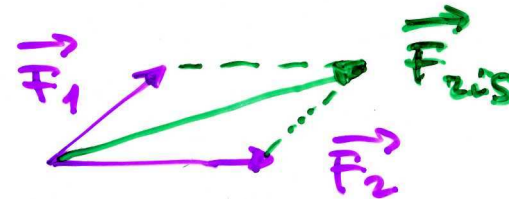
1) Fissato un corpo campione (1kg),  
definizione: una forza di  $n$  N  
produce una  $a$  (misurabile) di  $n \frac{m}{s^2}$

2) Le  $F$  possono essere misurate con  
dinamometri (molle) misurando  
allungamenti/accorciamenti

$$\Delta x \propto F$$

$\Rightarrow$  taratura, campione di forza

3) Le  $\vec{F}$  sono vettori



(\*) facoltativo

fln - mar 2010

42



## Forza e massa, def. dinamica (2)(\*)

4) Le diverse  $F$  (peso, elettriche, magnetiche etc.)  
sono misurabili con dinamometri

$$\vec{P} = \vec{F}_g = m \vec{g} \quad (1 \text{ kg peso } 9.81 \text{ N})$$



5) Fissata  $F$ , applicandola a corpi di  $m$   
diverse e misurando le  $a$

$\Rightarrow$  campione di massa

$$m = m_u \frac{a_u}{a}$$

(equivalentemente la  $m$  può essere  
misurata partendo dalla conservazione della  
quantità di moto,  $m \vec{v}$ )



## q.d.m. e Il principio

- def.:  $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$  quantità di moto  
 $[\mathbf{q}] = [m\mathbf{v}] = [MLT^{-1}]$ ; unità SI: kg m s<sup>-1</sup>

$$\frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \vec{v} + m \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \text{variazione della qdm}$$

$$\text{se } m = \text{cost} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

(se  $m = \text{cost}$ ;  $\Delta m = 0$ ;  $m$  può essere portata fuori dal limite)

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t} = m\vec{a} = \vec{F}$$

- $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{q}/\Delta t$ ;  $\rightarrow \mathbf{F}\Delta t = \Delta\mathbf{q}$

Il principio, alternativamente

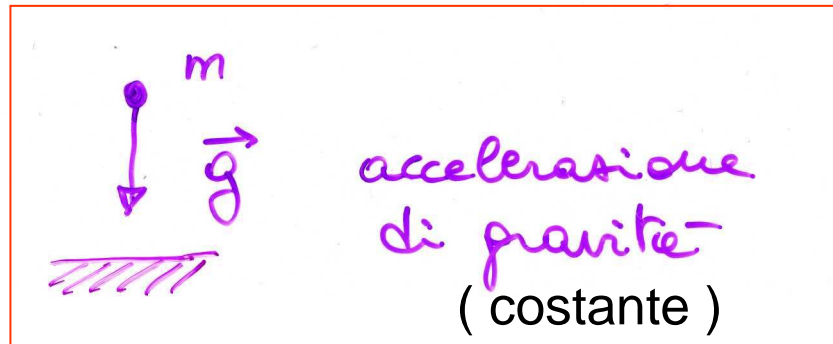
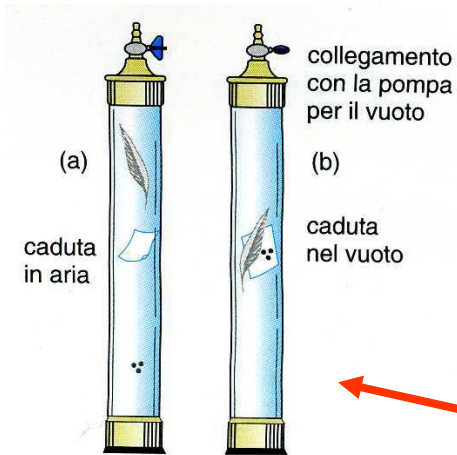
l'impulso di una forza uguaglia la variazione della qdm del corpo su cui agisce (teorema dell'impulso)



# Forza peso

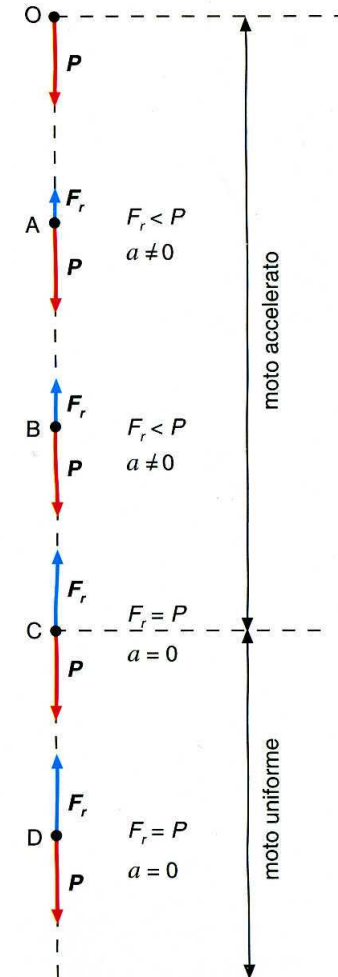
$$m \vec{g} = \vec{P} = \vec{F}_g \quad (\text{anche})$$

diretta in basso lungo la verticale



assenza di attrito (dell'aria): tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione  $g$

## attrito dell'aria



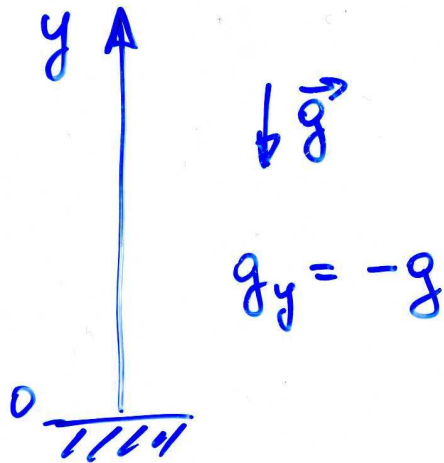


## g e scelta del sistema di riferimento (\*)

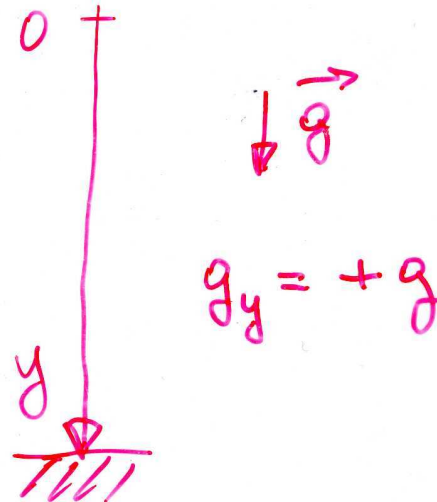
$$(9.81) \quad g = 9.80665 \text{ m/s}^2 = 980.665 \text{ cm/s}^2$$

0 m slm  
45° latitudine

se scelgo



se scelgo



$g_y$  indica la componente di  $\vec{g}$  secondo la verticale, dipende dal riferimento

se lancio un corpo verso l'alto il moto sarà ritardato, se lo lascio cadere sarà accelerato

(\*) facoltativa



# variabilità di $g$ (\*)

45° latitudine  
0 m s.l.m.

$$g = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$$

"esatte"

equatore	0m	9.780
poli	0m	9.832
45°	10km	9.776

la terra ruota intorno al proprio asse; non è esattamente sferica

negli esercizi si <sup>può</sup> prendere  $9.81 \text{ m s}^{-2}$   
 $= 981 \text{ cm s}^{-2}$

"errore"

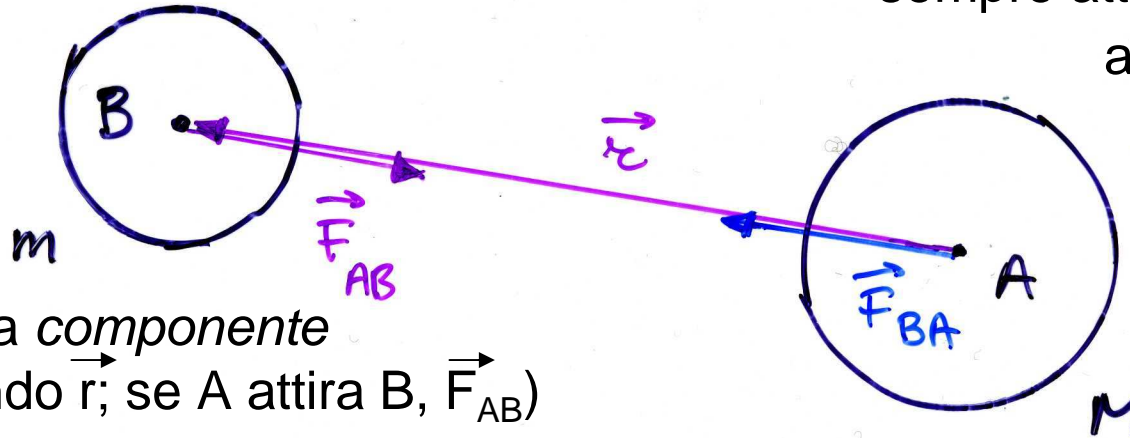
$$\Delta g = g - g' = -0.00335 \text{ m s}^{-2}$$
$$\Delta g/g = -0.335 \%$$

(\*) facoltativa



# Forza di attrazione gravitazionale (Newton)

corpi puntiformi (o sferici)



la forza gravitazionale è sempre attrattiva, cioè è antiparallela a  $\vec{r}$ ,  
 $\vec{F}_g \propto$  vettore unitario  
 $-\vec{r}/r$  diretto in verso opposto a  $\vec{r}$

( $F_g$  indica la componente di  $\vec{F}_g$  secondo  $\vec{r}$ ; se A attira B,  $\vec{F}_{AB}$ )

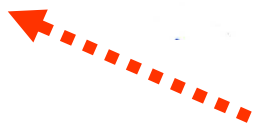
$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (*)$$

## LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$$G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$[G] = [MLT^{-2} M^{-2} L^2] = [M^{-1} L^3 T^{-2}]$$



esperienza di Cavendish

$$(*) \quad (1/r^2) \cdot \vec{r}/r = \vec{r}/r^3 !$$



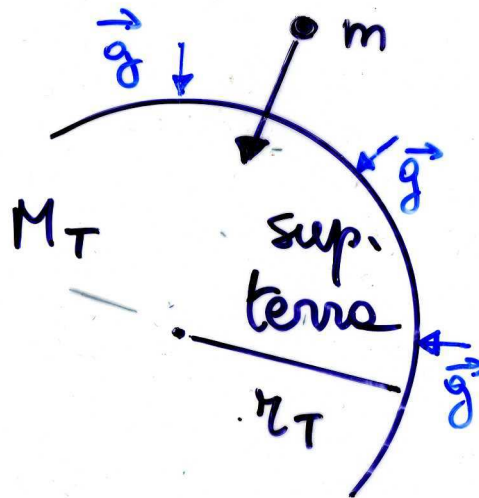


## Forza di attrazione gravitazionale (2) e peso

NB:  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

(III principio)

cos'è g?



$$\vec{F}_g = \left( G \frac{M_T}{r_T^2} \right) m = g m = P$$

esperienza in lab.  
(Cavendish)(\*)

$$M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ Kg}$$

si ricava

$$r_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

si misura, astron.

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

si misura, caduta

$\Rightarrow$   $M_T = g r_T^2 / G$

(\*) con m, M, r e F,  
tutte misurate  $\rightarrow G$



## Gravitazione universale: applicazioni

---

- Un satellite TV deve essere fisso rispetto alla parabola a terra. Che **altezza (h)** deve avere?
- $T = 1 \text{ giorno} = 86400 \text{ s}$  (orbita geostazionaria)  
 $\omega = 2\pi/T = 7,272 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$   
 $a_c = \omega^2 r$  ma è anche  $GM_T m/r^2 = ma_c$   
 $\Rightarrow GM_T = \omega^2 r^3$  (3<sup>a</sup> legge di Keplero)  
 $r = \sqrt[3]{GM_T/\omega^2} = 4.223 \cdot 10^7 \text{ m}$   
 $h = r - r_T = 35.9 \cdot 10^6 \text{ m}$  all'equatore, che corrisponde alla cintura di Clarke (quello che ha avuto l'idea)
- $T_{\text{Luna}} = ?$  sapendo che  $R = 3.8 \cdot 10^8 \text{ m}$  (distanza TL)  
 $a_c \text{ della luna} = g(r_T/R)^2 = 2.756 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$   
ma è anche  $a_c = (2\pi/T)^2 R$   
 $\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{R/a_c} = 27.0 \text{ giorni}$



# Leggi di Keplero

es. sistema S/Pianeti:

1. orbite dei P ellittiche, con S in un fuoco
2. il raggio vettore  $r_{SP}$  spazza Aree uguali in t uguali
3.  $GM_S = \omega^2 r^3 \propto r^3 / T^2$   
 $\rightarrow M_S = \omega^2 r^3 / G$   
 $\sim 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   
( $r = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ,  $T = 1 \text{ a}$ )





# Peso ed equazione di moto

vicino alla  
superficie  
della terra  
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

eq. di moto

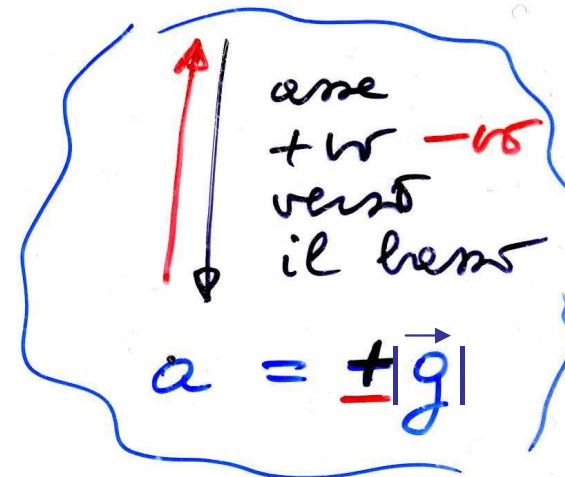
$$m \vec{a} = \vec{F}$$

ad es. sotto l'azione  
della forza peso

$$m \vec{a} = m \vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\vec{F}}{m} \\ (\vec{r}_0, \vec{v}_0 \text{ iniz.}) \end{aligned} \right\}$$



componente di  $\vec{a}$  secondo  
la verticale



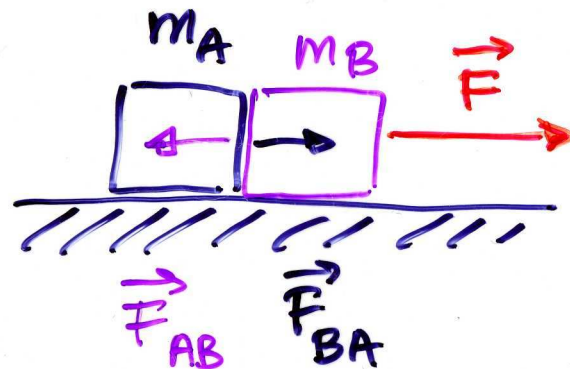
## III principio e forze di contatto (\*)

dati i corpi A e B che interagiscono,  
per il III principio si ha  $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$

III principio

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

- ad es. forze di contatto  
(oggetti esteri)



$$m = m_A + m_B$$



(\*) facoltativo

fln - mar 2010

53



## III principio e forze di contatto (2) (\*)

applichiamo separatamente il II principio ad A, B e A+B per trovare la forza di contatto  $\vec{F}_{AB}$  ( $\vec{F}_{BA}$ )

$$A+B : m \vec{a} = \vec{F}$$

$$A : m_A \vec{a} = \vec{F}_{BA}$$

$$B : m_B \vec{a} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}$$

$$\sum (m_A + m_B) \vec{a} = \vec{F}$$

*componente x*

$$m a = F$$

$$m_A a = F_{BA}$$

$$m_B a = F - F_{AB}$$

$$(m_A + m_B) a = F$$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F} + \vec{F} \frac{m_B}{m_A + m_B} = -\vec{F} \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

NB  $F_{AB}$  cresce con  $F$ : un vincolo ideale è quindi in grado di sostenere una  $F \forall$ , non così un vincolo 'reale' (carico di rottura, vedi più avanti, elasticità)



## III principio e forze di contatto (3)

dati i corpi A e B che interagiscono, per il III principio si ha

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

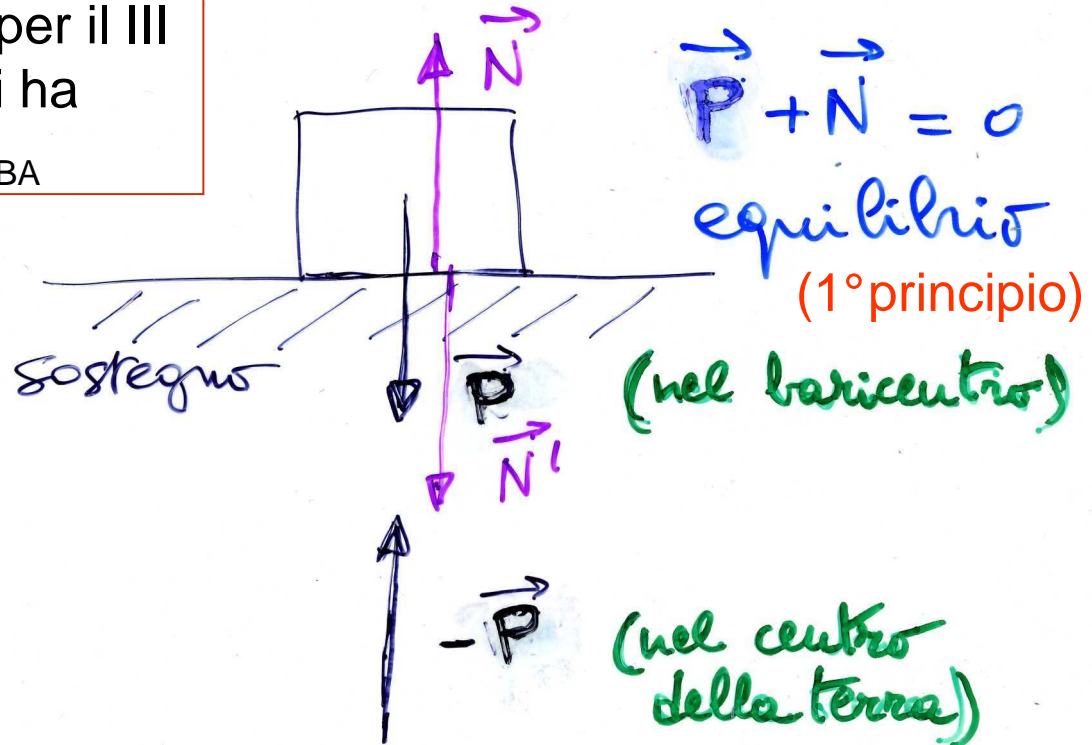
le coppie di forze del III principio sono applicate a corpi diversi

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

$$\mathbf{N} + \mathbf{N}' = 0$$

la spinta  $\mathbf{N}'$  sul sostegno è dovuta a  $\mathbf{P}$  e lo uguaglia  
 $\Rightarrow \mathbf{P} + \mathbf{N} = 0$

un vincolo ideale può equilibrare  
 $\forall \mathbf{P}$ , un vincolo reale no



(forza cui è sottoposta la terra!)

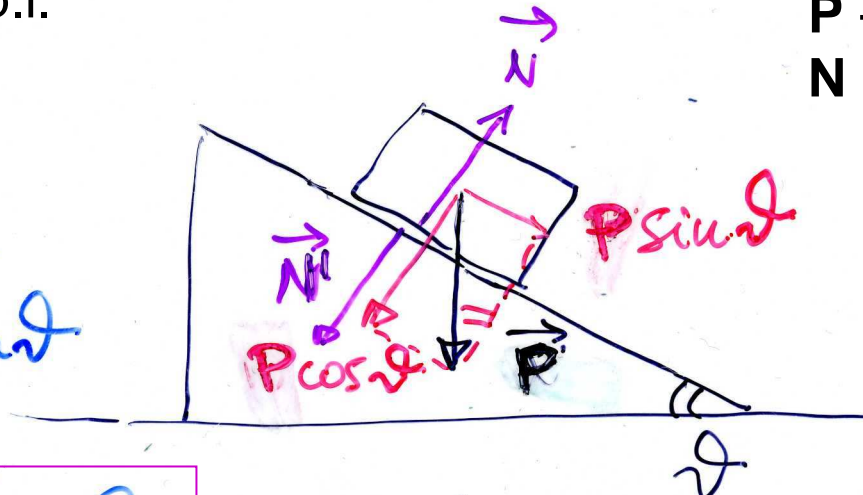


## III principio e forze di contatto (4)

piano inclinato: scompongo  $P$   
// ( $P \sin \theta$ ) e  $\perp$  ( $P \cos \theta$ ) al p.i.

III principio:  
 $P + (-P) = 0$   
 $N + N' = 0$

$$P \cos \theta = N$$
$$\cancel{ma} = P \sin \theta$$
$$= \cancel{mg} \sin \theta$$



eq. di moto  
in assenza  $\Rightarrow$   
di attrito

$$a = g \sin \theta$$

la componente  $P \cos \theta$   
è equilibrata dalla  
reazione vincolare  $N$   
(non c'è moto  $\perp$  al p.i.)

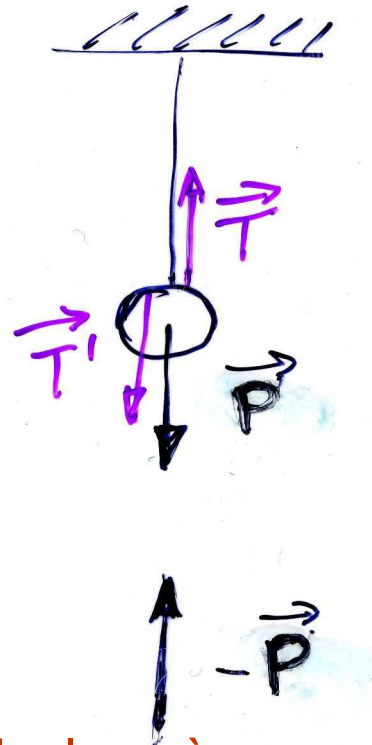
in assenza di attrito *non*  
vi può essere equilibrio:  
la componente  $P \sin \theta$   
non è equilibrata





## III principio e forze di contatto (5)

III principio:  
 $\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$   
 $\mathbf{T} + \mathbf{T}' = 0$



un filo (funne) ideale può sostenere  $\forall \mathbf{P}$ , un filo (funne) reale sosterrà un carico max, oltre quello si spezza

fune, filo (NB di massa trascurabile)

$\mathbf{T}'$  tensione della fune, del filo  
( $\mathbf{T}$  agisce sulla sfera di massa  $m$ )

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{T}} = 0$$

equilibrio (1° principio)

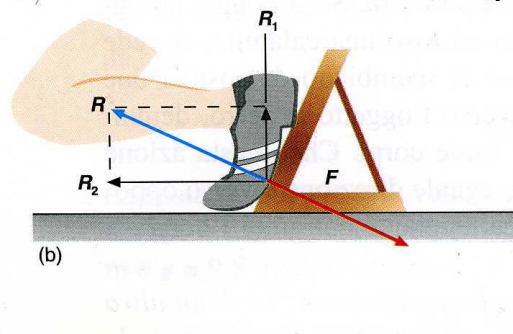
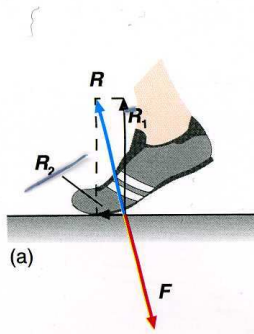
(forza cui è sottoposta la terra!)



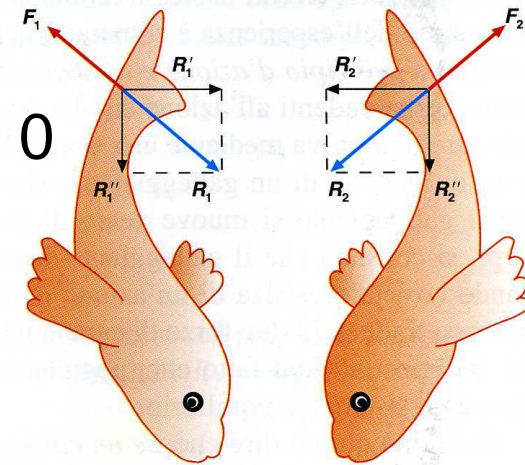
## III principio e sistemi propulsori

- dati due corpi A e B che interagiscono: azione e reazione uguale e contraria  $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$
- ad es. blocchi di partenza: aumentano la spinta nella direzione del moto
- altro es. locomozione di animali: spinta sul mezzo circostante (suolo, acqua, aria)

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0$$



$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0$$





## III principio e moti curvilinei

- consideriamo un moto curvilineo (variazione di  $\mathbf{v}$  in direzione e verso) **assumendo trascurabile l'attrito**
- la forza centripeta deve(\*)

essere **quindi** fornita dalla reazione della curva

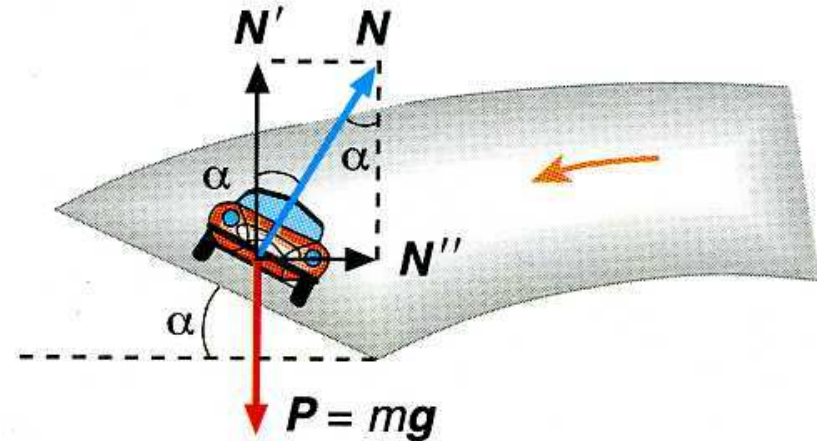
sopraelevata di raggio  $R$

$$F_c = mv^2/R = N'' = N \sin \alpha = \\ = N' \operatorname{tg} \alpha = P \operatorname{tg} \alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = v^2 / (Rg)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ad es. } v = 50 \text{ m/s} \\ R = 250 \text{ m} \end{array} \right\}$$

(\*) si impone che il vettore  $\mathbf{F}_c = \mathbf{N} + \mathbf{P}$  sia orizzontale



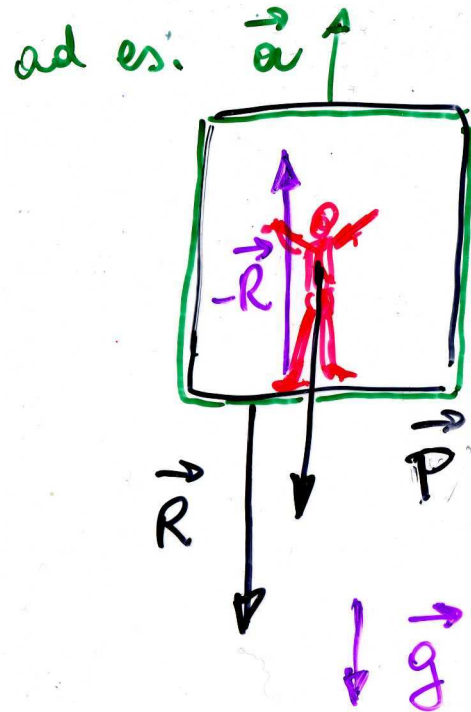
$$\operatorname{tg} \alpha \sim 2500 / (250 \cdot 10) \sim 1; \alpha \sim 45^\circ$$

ossia deve essere  $F_c \cos \alpha = P \sin \alpha$



# Peso e peso apparente

il peso di una persona può essere definito come la forza esercitata sul pavimento



Ascensore accelerato

( $\vec{a}$ ) tipico sistema *non* inerziale se  $a \neq 0$

$\vec{R}$  - sul pavimento  
 $-\vec{R}$  - sulle persone

$$m\vec{a} = \vec{P} - \vec{R} \quad \text{eq. di moto}$$



## Peso e peso apparente (2)

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{P} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

$$\text{se } \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{c} \text{ o } \vec{a} \quad \vec{R} = \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\text{« } \vec{a} \text{ verso l'alto} \quad R = m(g + a) > P$$

$$\text{« } \text{« verso il basso} \quad R = m(g - a) < P$$

- quindi il peso apparente sarà inferiore (superiore) a quello reale se l'ascensore accelera verso il basso (alto)
- NB si noti che mentre  $m$  è costante,  $P$  può variare, per es. andando in montagna, in orbita o all'equatore si diminuisce di peso! (al polo si aumenta)



## Sistemi isolati e conservazione q.d.m.

- isolati: sistemi di 2 o più corpi che si scambiano forze, interne, che a 2 a 2 si elidono (risultante nulla)
- es. corpi 1 e 2 su piano orizzontale **senza attrito**, al contatto:

su 1 agisce  $\mathbf{F}_2$  (dovuta a 2)

su 2 agisce  $\mathbf{F}_1$  (dovuta a 1)

$$\mathbf{F}_1 = \Delta \mathbf{q}_2 / \Delta t; \quad \mathbf{F}_2 = \Delta \mathbf{q}_1 / \Delta t$$

$$\text{ma } \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

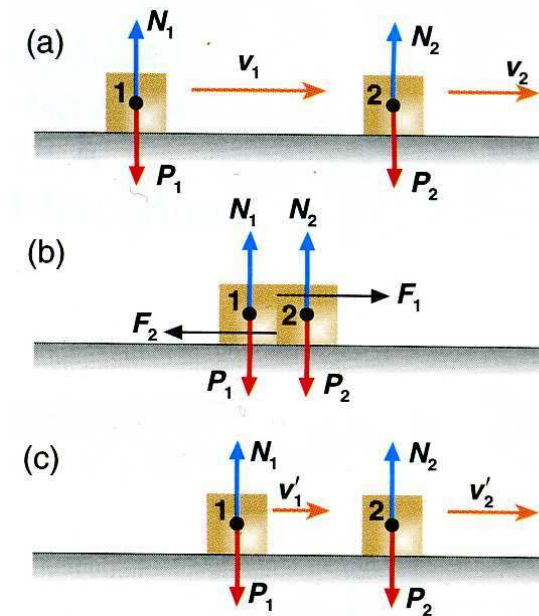
$$\Rightarrow \Delta \mathbf{q}_1 / \Delta t + \Delta \mathbf{q}_2 / \Delta t = 0$$

$$\text{ossia } \Delta \mathbf{q}_1 + \Delta \mathbf{q}_2 = \Delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = 0$$

la variazione della q.d.m. totale è

nulla, da cui ricavo

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \text{cost}$$



urto fra due corpi



## Conservazione q.d.m. (2)

- se  $\mathbf{q}_i$  e  $\mathbf{q}_i'$  indicano le q.d.m. prima e dopo l'urto, avrò

$$\mathbf{q}_1' + \mathbf{q}_2' = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$$

$$m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2' = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

**conservazione della q.d.m.:** l'interazione fra due corpi non modifica la q.d.m - oppure – per un sistema isolato (soggetto a risultante nulla) la q.d.m. si conserva

- es. locomozione di celenterati, motori termici a getto, la q.d.m. iniziale è uguale zero

$$\Rightarrow m_a \mathbf{v}_a + m_c \mathbf{v}_c = 0$$

da cui

$$\mathbf{v}_c = - (m_a/m_c) \mathbf{v}_a$$

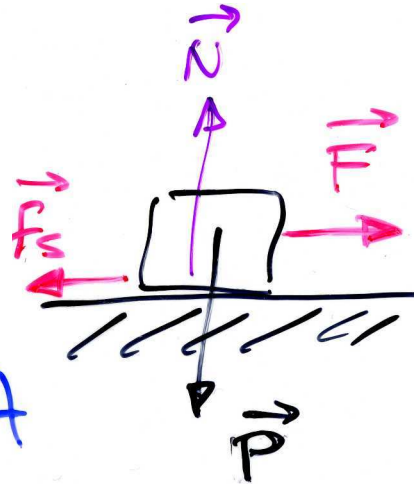




# Forza d'attrito, leggi dell'attrito statico

- consideriamo un corpo appoggiato su una superficie reale, se applicassi una forza in assenza di attrito il corpo dovrebbe comunque accelerare, invece non si muove finchè  $F \leq \mu_s N$

attrito statico  
(impedisce  
l'inizio del moto)



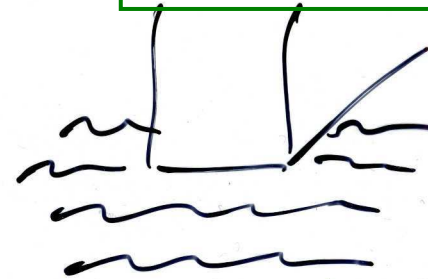
1) l'a.s. non dipende  
dall'area A di contatto

2) l'a.s. cresce fino  
ad un valore max

$\forall A$

$$f_{s, \max} = \mu_s N$$

$$(f_s \leq \mu_s N)$$



superfici  
ruvide

a microscopice  
 $\ll A_{\text{contatto}}$





## Attrito (2)

- una volta superata la  $f_{s,max}$  il corpo è accelerato da una forza

$$F' = F - f_c \quad (\text{dove } f_c \text{ è un po' inferiore a } f_{s,max})$$

**attrito cinetico** o dinamico  
(agisce durante il moto)

$$f_c = \mu_c N$$

in prima approssimazione  
(per es. negli esercizi) si  
può non distinguere fra  $f_c$   
e  $f_{s,max}$ , quindi  $\mu_c = \mu_s = \mu$

$$\mu_c < \mu_s$$

$$\text{legno-legno} \sim 0.5$$

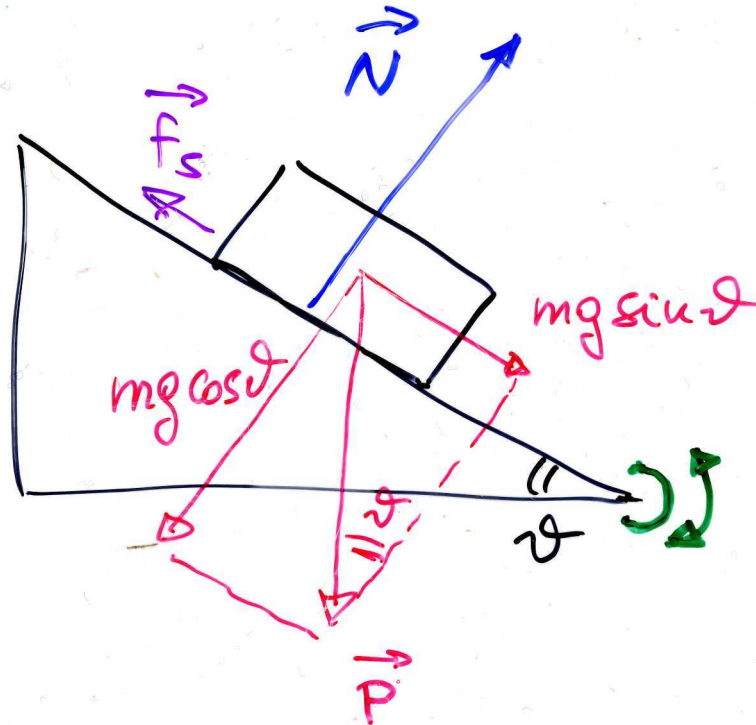
$$\text{metallo-metallo} \sim 0.1$$

superfici levigate  $\mu_c \approx 0.001$



## Misura del coefficiente d'attrito

- si può usare un piano inclinato, ad inclinazione variabile: la forza peso è scomponibile parallelamente ( $P\sin\theta$ ) ad ortogonalmente al piano ( $P\cos\theta$ ); solo la componente normale è equilibrata dalla reazione vincolare; basta quindi far crescere l'angolo  $\theta$  per aumentare la forza motrice e, per un certo angolo critico,  $\theta_c$ , il blocco comincerà a muoversi, quando  $mg\sin\theta$  supera la forza di attrito  $f_{s,max}$





## Misura del coefficiente d'attrito (2)

se  $\vartheta \nearrow$ ,  $mg \sin \vartheta \nearrow$  (1° quadrante!)  
( $= f_s$ )

$$\cancel{mg} \sin \vartheta_c = f_{s, \max} = \mu_s \cancel{mg} \cos \vartheta_c$$

inizia a scivolare

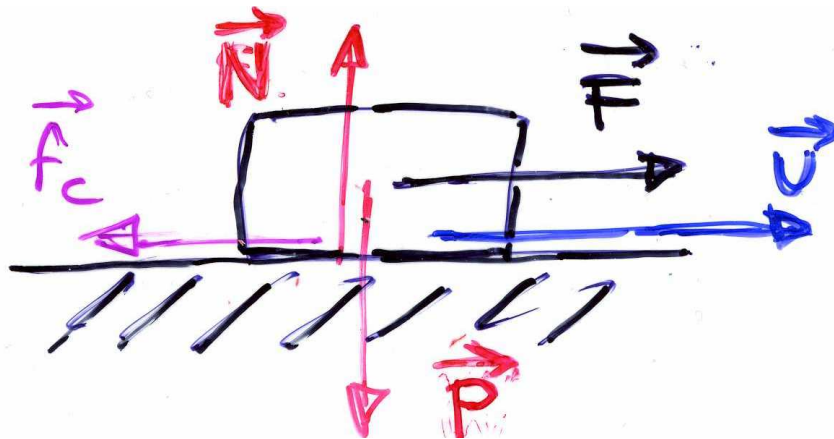
$$\mu_s = \frac{\sin \vartheta_c}{\cos \vartheta_c} = \operatorname{tg} \vartheta_c$$

$\theta_c$  indica l'angolo critico, angolo per cui il corpo comincia a scivolare



## Eq. di moto in presenza di attrito

- (senza attrito:  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ )
- con attrito:  $\mathbf{a} = 0$  per  $|\mathbf{F}| < f_{s,\max} = \mu_s N$   
 $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{f}_c$  per  $|\mathbf{F}| > f_{s,\max}$ ;  $f_c = \mu_c N$   
 $\mathbf{f}_c = -\mu_c N \mathbf{v}/v$  si oppone al moto



$$\Rightarrow ma = F - \mu_c N$$

$$a = (F - \mu_c N)/m < F/m$$

$$a = F/m - \mu_c g$$

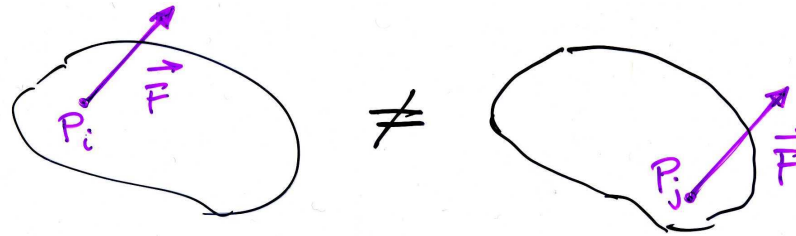
(l'ultima vale su un piano orizzontale,

$$\mathbf{N} = -\mathbf{P}, N = mg)$$

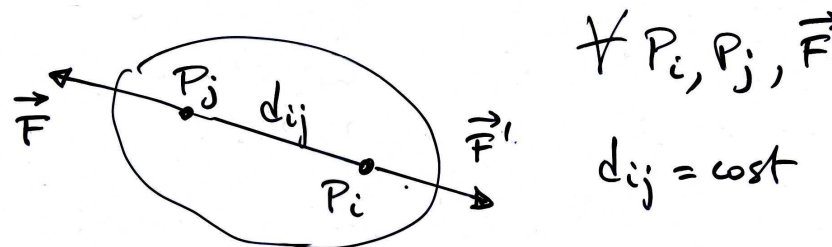


# Corpo rigido

– per i corpi estesi, il punto di applicazione delle forze diventa importante



– def. di corpo rigido



– sperimentalmente: 1) due  $\vec{F}$  uguali e contrarie lungo la stessa retta di applicazione in punti diversi non alterano lo stato di moto del c.r.;  
2) una  $\vec{F}$  applicata ad un punto può essere spostata lungo la sua retta di applicazione senza alterarne gli effetti

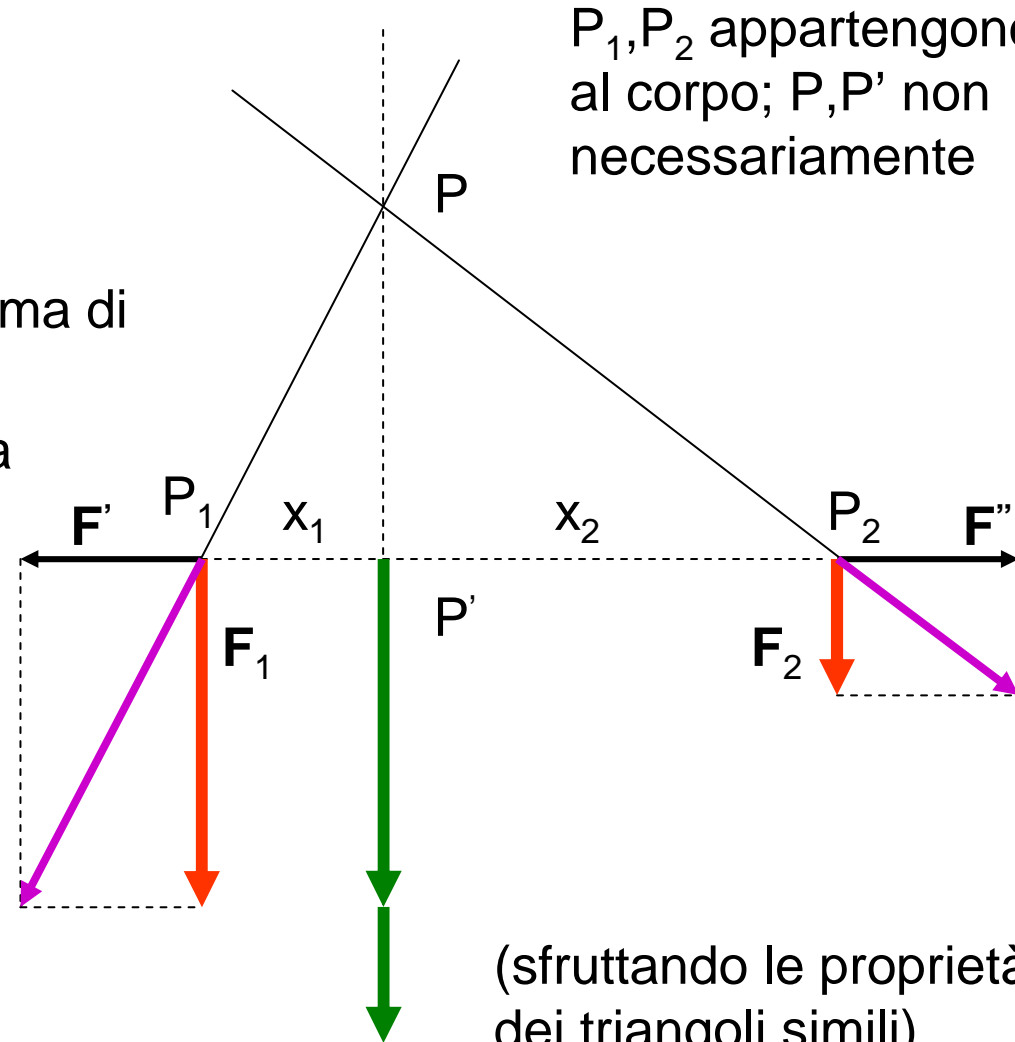


# Corpo rigido: risultante di forze parallele

- aggiungo  $\mathbf{F}'$  e  $\mathbf{F}'' = -\mathbf{F}'$   
( $\mathbf{F}'$  a piacere, arbitraria)
- traslo le risultanti in  $P$ : le componenti orizzontali si annullano, rimane la somma di  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$
- posso ritraslare la somma in  $P'$
- la risultante è la somma di  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  lungo  $P'P$  con

$$\frac{P_1P'}{P_2P'} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\left( \frac{P_1P'}{PP'} = \frac{F'}{F_1}; \quad \frac{P_2P'}{PP'} = \frac{F''}{F_2} \right)$$



$P_1, P_2$  appartengono al corpo;  $P, P'$  non necessariamente

(sfruttando le proprietà dei triangoli simili)



## Risultante di forze parallele (2), baricentro

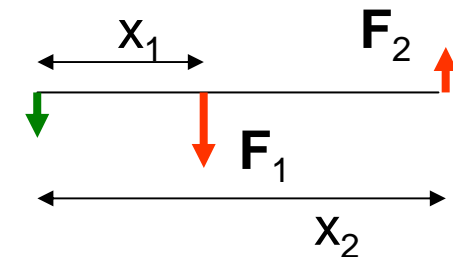
- posso riscrivere la rel. precedente come

$$F_1 x_1 = F_2 x_2$$

- se  $F_1$  e  $F_2$  sono antiparallele, la risultante ha per modulo la differenza dei moduli, verso quello della  $F$  più grande, retta di applicazione all'esterno dalla parte della  $F$  più grande, con

$$F_1 x_1 = -F_2 x_2$$

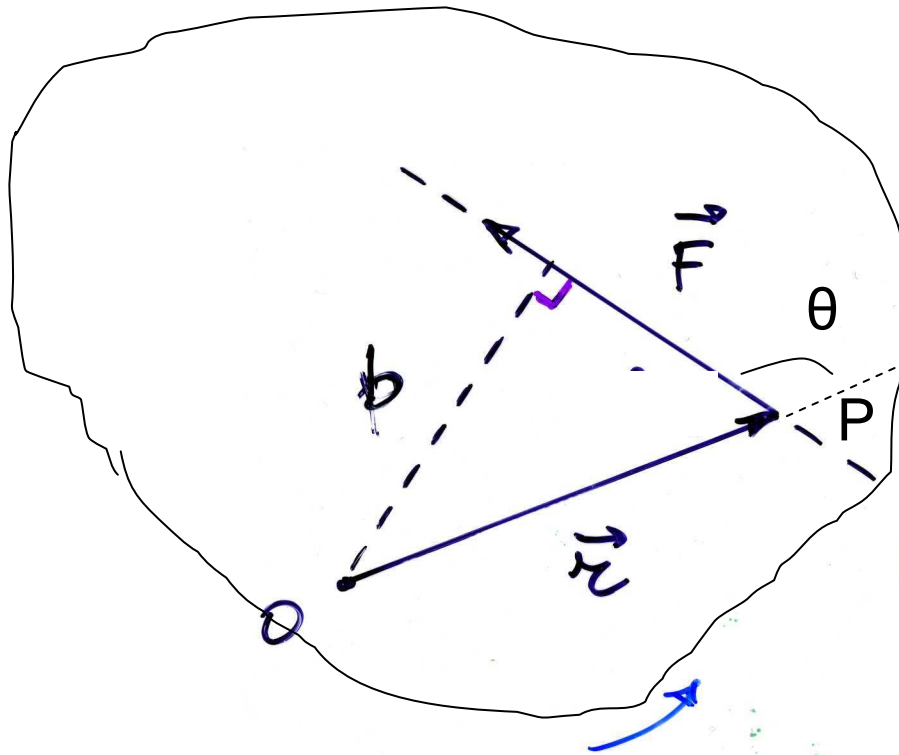
$$|F_1 x_1| = |F_2 x_2|$$



- se si considera un **corpo rigido esteso diviso in volumetti di massa  $m_i$  e di peso  $m_i g$** , nel limite in cui  $g$  è costante, la risultante di tutte le forze peso è il peso del corpo  $P = \sum_i m_i g = g \sum_i m_i = mg$  che sarà applicato nel **centro di gravità o baricentro** (per un corpo omogeneo è il centro geometrico – in generale il b. può anche trovarsi fuori dal corpo)



# Momento di una forza rispetto a un punto



il momento è perpendicolare  
al piano individuato da  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{F}$   
NB  $\mathbf{M} = 0$  se  $\mathbf{r}$  parall.  $\mathbf{F}$

momento di  $\mathbf{F}$  rispetto ad O (in  
evidenza): il prodotto vettoriale

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{F}$$

ossia

$$\mathbf{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$b$ , minima distanza fra O e la retta  
di applicazione di  $\mathbf{F}$ . è il braccio

modulo del vettore  $\mathbf{M} = \text{braccio} \cdot \mathbf{F}$ :

$$M = rF \sin \theta = Fb$$

siccome  $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

$$[\text{Momento}] = [LF] = [ML^2T^{-2}]$$

unità SI:  $N \cdot m$

CGS:  $1 \text{ dyne} \cdot \text{cm} =$

$$= 10^{-5} \text{ N} \cdot 10^{-2} \text{ m} = 10^{-7} \text{ Nm}$$

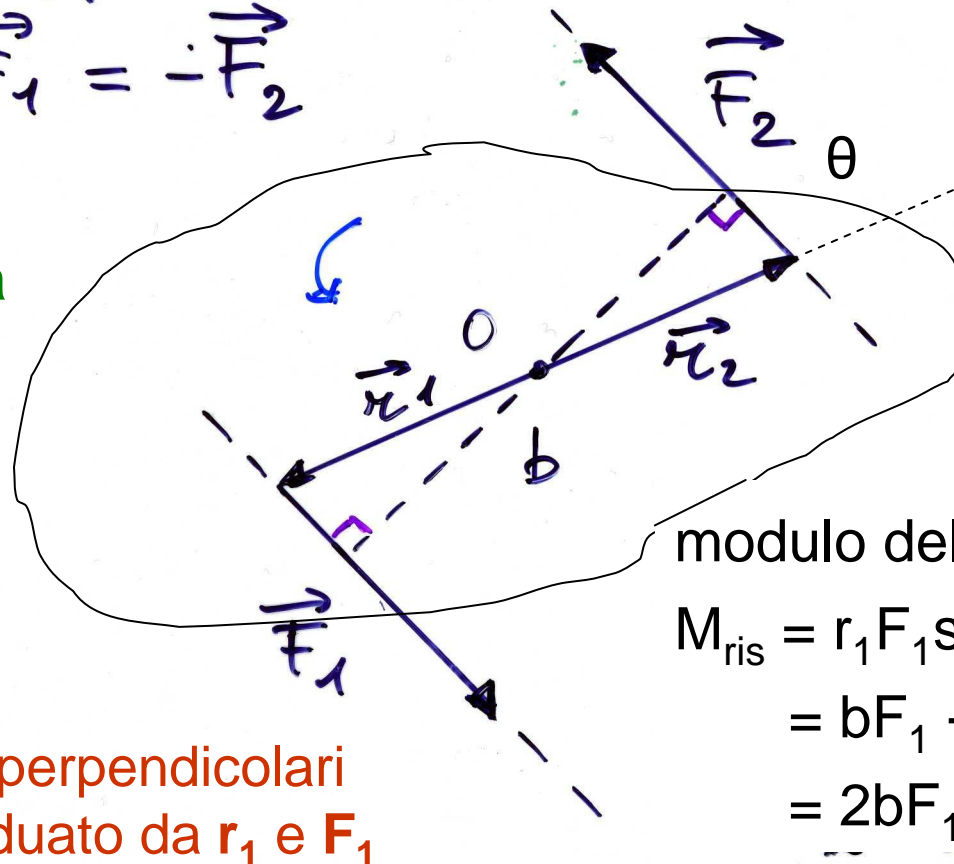




# Coppia di forze

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

spostando  $O$  lungo la linea tratteggiata si ottiene sempre lo stesso  $M_{\text{ris}}$  etc.



NB nel caso della coppia di forze, il momento della coppia non dipende dalla scelta di  $O$

modulo del momento risultante:

$$\begin{aligned} M_{\text{ris}} &= r_1 F_1 \sin\theta + r_2 F_2 \sin\theta = \\ &= bF_1 + bF_2 = \\ &= 2bF_1 \end{aligned}$$

$\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{M}_2$  sono perpendicolari al piano individuato da  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{F}_1$  e sono paralleli (producono una rotazione nello stesso verso)



# Condizioni generali di equilibrio di un corpo rigido

---

perchè il c.r. sia in equilibrio (permanga nel suo stato di moto uniforme precedente):

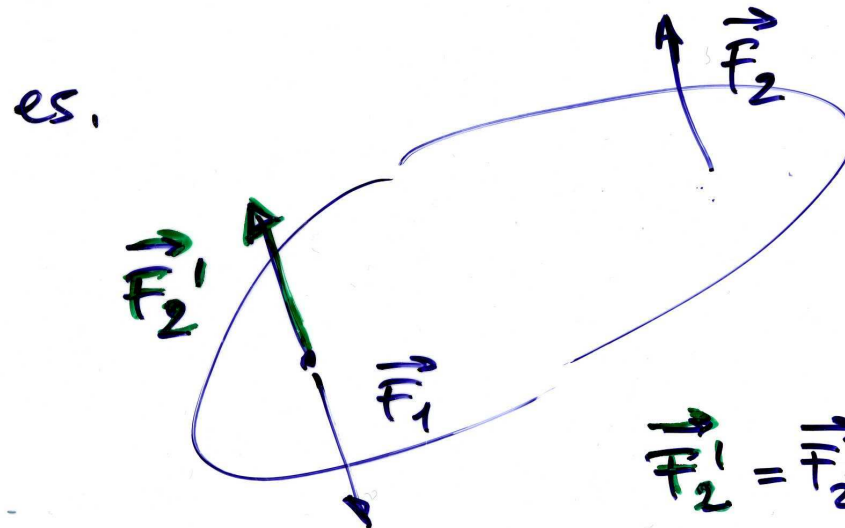
1. la risultante delle forze esterne applicate al c.r. deve essere nulla
2. il momento risultante delle forze esterne applicate al c.r. deve essere nullo

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{ris}} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \vec{M}_{\text{ris}} = \sum_i \vec{M}_i = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{forze esterne} \\ \text{"} \end{array}$$

una risultante non nulla è causa di una variazione nel moto di **traslazione**; un momento risultante non nullo causa le **rotazioni**



## Condizioni di equilibrio (2), esempio



forze uguali e  
contrarie, con  
rette d'azione  
uguali o diverse

$$\vec{F}_2' = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

rette d'azione  
uguali

caso 1

$$\begin{cases} \vec{F}'_{\text{ris}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2' = 0 \\ \vec{M}'_{\text{ris}} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2' = 0 \end{cases} \quad \text{sta fermo}$$

rette d'azione  
diverse (coppia)

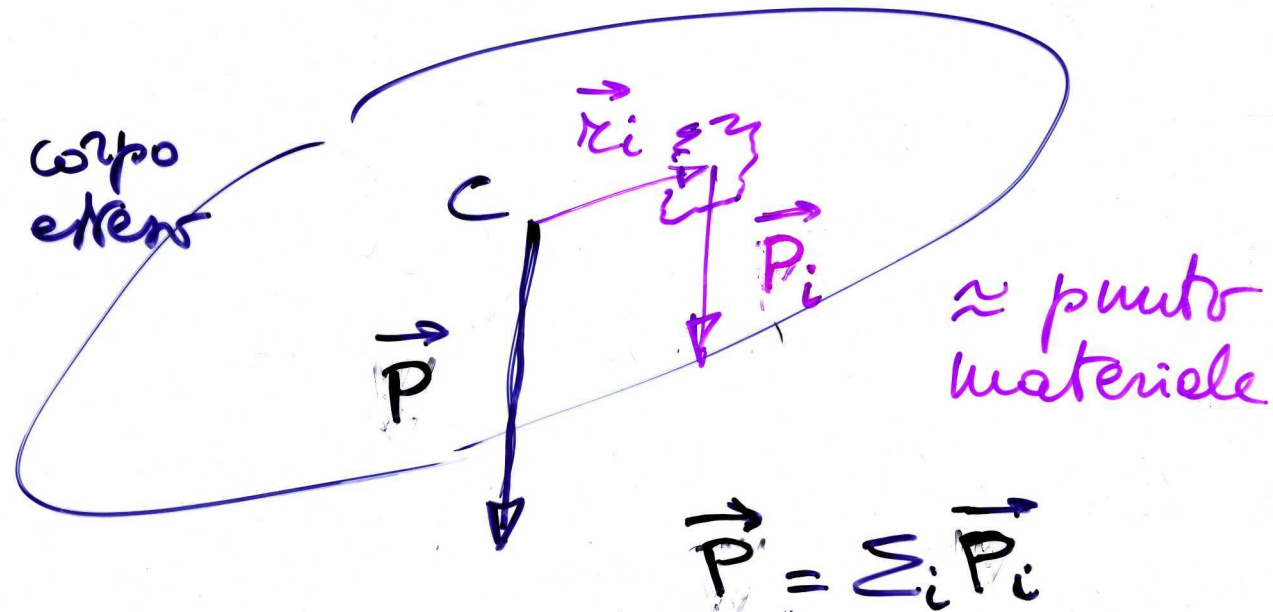
caso 2

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{ris}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \\ \vec{M}_{\text{ris}} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{ruota}$$



# Centro di gravità o baricentro

in modo del tutto equivalente alla def. precedente, il baricentro è individuabile imponendo che la somma dei momenti delle forze peso (ottenuta scomponendo il c.r. in *piccole* parti) rispetto ad esso sia nulla



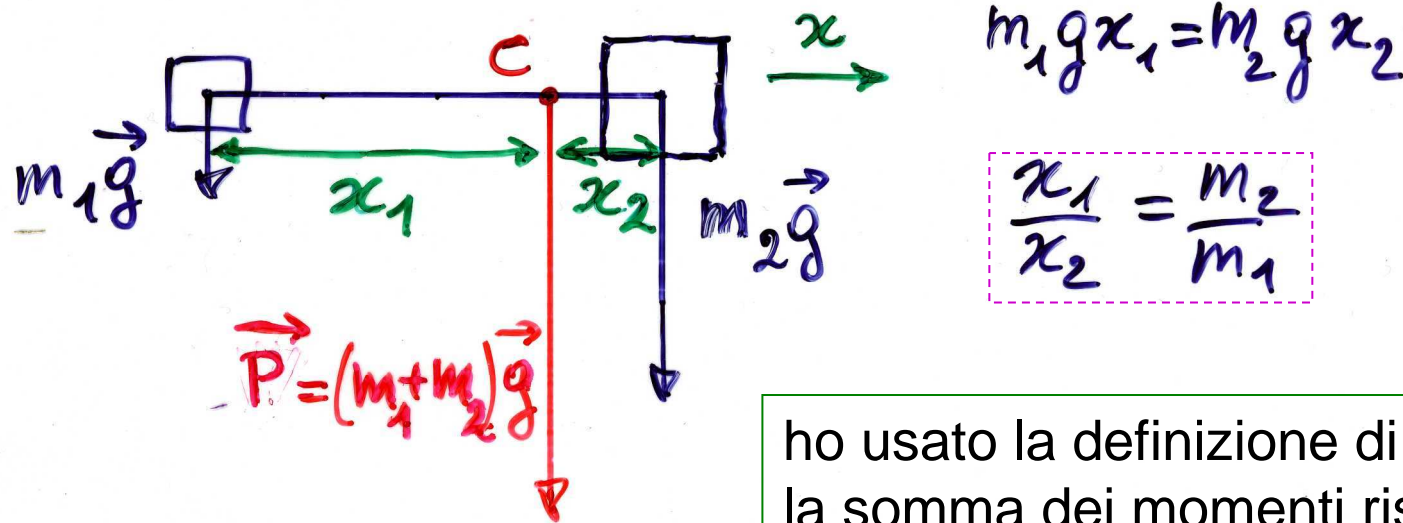
$$\text{da } \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{baricentro}$$



## Es. di calcolo del baricentro

es.1 corpo uniforme : centro geometrico  
es.2 due masse

(per  
simmetria  
dei mom.)



uguale al risultato  
ottenuto a pag. 70

$$x_1/x_2 = F_2/F_1$$

$$x_1 F_1 = x_2 F_2$$

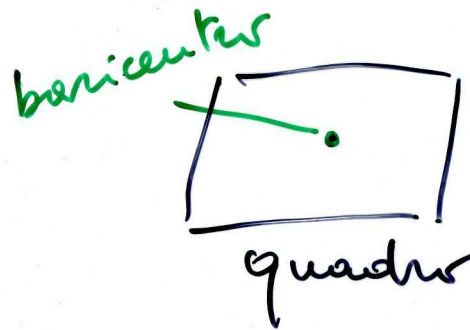
ho usato la definizione di baricentro:  
la somma dei momenti rispetto al  
baricentro C deve essere nulla:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0 \Rightarrow M_1 = M_2$$

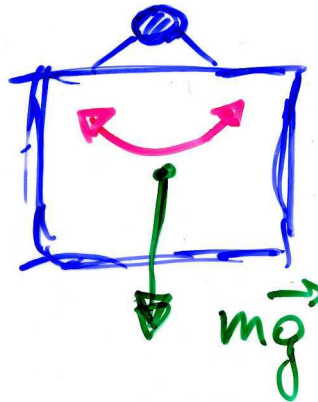
(i moduli sono uguali)



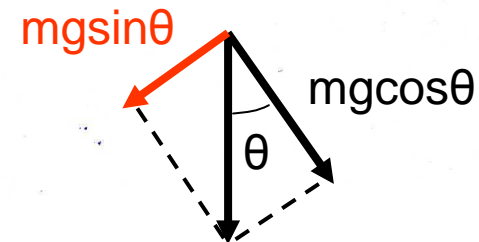
# Tipi di equilibrio (asse fisso)



1)



*Stabile*

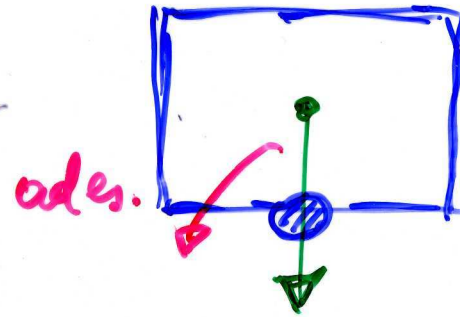


la componente  $mg\cos\theta$  è annullata dalla reazione del vincolo, invece  $mgsin\theta$  rappresenta una f. di richiamo verso la posizione di equilibrio (cf. pendolo)



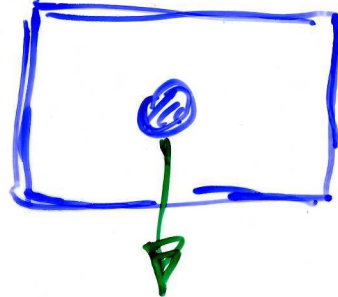
## Tipi di equilibrio (2)

2)



instabile

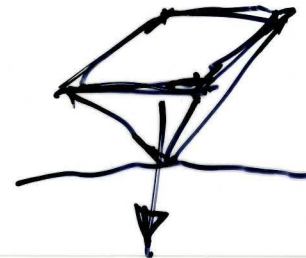
3)



indifferente!  
(da non verificare)



Pise?



perché le  
piramidi  
non hanno  
la punta  
in basso?



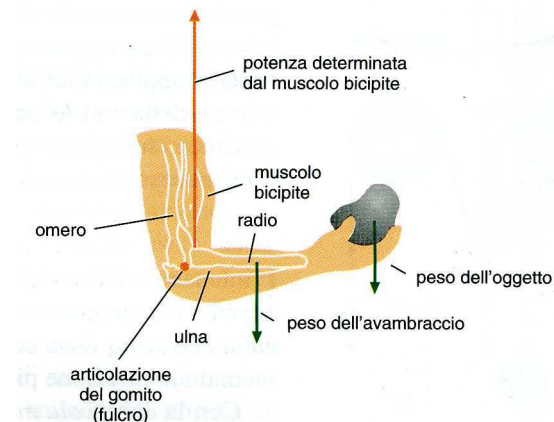
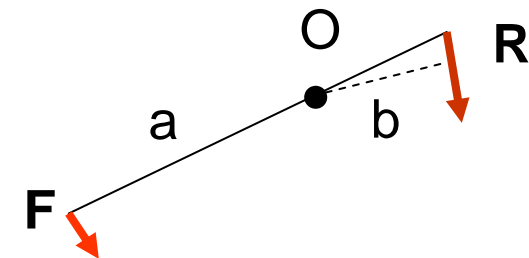
# Leve

- leva: c.r. che ruota attorno ad un asse fisso (fulcro) in modo che  $M_F$  (potenza) possa bilanciare  $M_R$  (resistenza)

$$M_F + M_R = 0 \rightarrow M_F = -M_R$$

$\rightarrow Fa = Rb \rightarrow F/R = b/a$  con a,b rispettivi bracci  
(vantaggiosa, se  $F < R$ )

- leva di 1° tipo: fulcro O fra F e R  
(R e F concordi)
- leva di 2° tipo: R fra O e F  
(R e F discordi)
- leva di 3° tipo: F fra O e R  
(R e F discordi)







# Moto in generale

- il moto di un c.r. libero in generale è scomponibile nel moto di traslazione del baricentro e nel moto di rotazione intorno al baricentro – per un c.r. con un asse fisso è possibile solo il moto di rotazione



Caroline Kostner in pura **traslazione** e in **rototraslazione** (Campionati Europei, 2007)

una giostra in pura **rotazione** attorno ad un asse fisso: stessa  $\omega$ , diversa  $v = \omega r$ , diversa  $a_c = \omega^2 r$



# Momento angolare e momento d'inerzia

- p.m., si definisce momento angolare (o della q.d.m.) il vett.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$$

$$L = mvr = (mr^2)\omega = I\omega \quad (\text{poichè } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{v} \text{ sono } \perp \text{ nelle rotazioni})$$

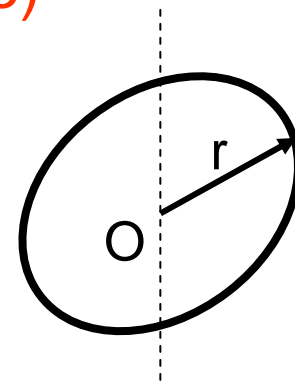
il prodotto  $I = mr^2$  si chiama **momento d'inerzia** (scalare) e gioca per le rotazioni il ruolo giocato della massa per le traslazioni

- c.r. esteso scomposto in particelle  $m_i, r_i, v_i$  – stesse  $\omega, \alpha$

$$L = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega (\sum_i m_i r_i^2) = \omega I \quad (\mathbf{r}_i \text{ e } \mathbf{v}_i \text{ perpendicolari})$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad \text{momento d'inerzia (scalare)}$$

ad es. anello di raggio  $r$  cost.  $I = r^2 \int dm = mr^2$





## Momento angolare e momento d'inerzia (2)

---

### dimensioni e unità del momento angolare

- [Momento angolare] = [LQ] = [ML<sup>2</sup>T<sup>-1</sup>]
- unità SI: 1 kg m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup> = 1 J·s [joule (J) unità di energia]
- CGS: 1 g cm<sup>2</sup> s<sup>-1</sup> = 1 erg·s = [erg unità di energia]
- = 10<sup>-7</sup> J·1s = 10<sup>-7</sup> Js

### dimensioni e unità del momento d'inerzia

- [I] = [ML<sup>2</sup>]
- unità SI: kg·m<sup>2</sup>
- CGS: 1 g·cm<sup>2</sup> =
- = 10<sup>-3</sup> kg·10<sup>-4</sup> m<sup>2</sup> = 10<sup>-7</sup> kg m<sup>2</sup>



## Rotazioni: p.m. rispetto ad asse fisso (moto circolare generico)

- circonferenza di raggio  $r$ , fisso, costante ( $\vec{r}$  varia)
- quando  $P$  si muove lungo la circonferenza varia  $\theta = \theta(t)$   
**rad.!** – (p.m. oppure disco, cilindro scomposti in particelle)

- $\Delta s = r\Delta\theta$

$$OP = r$$

- $v = \Delta s/\Delta t = r\Delta\theta/\Delta t = r\omega$

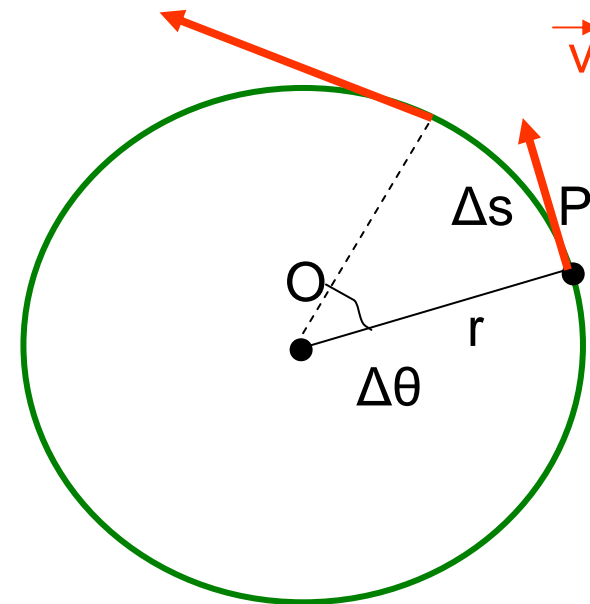
- $a_t = \Delta v/\Delta t = r\Delta\omega/\Delta t = r\alpha$

- $a_c = v^2/r = \omega^2 r$

- se  $\alpha = \text{cost}$  si può ricavare

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\text{cf. } v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad [\text{vedi p. 19}]$$



( $\alpha = 0$  nel moto  
circolare uniforme)



## Il principio per i corpi in rotazione

---

- p.m., si parte da  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  ( $F = ma = mr\alpha$ ) e si moltiplica vettorialmente a dx per  $\mathbf{r}$ , si ha in modulo  
 $M = rF = rma = mr\alpha = (mr^2)\alpha = I\alpha$
- c.r. esteso, analogamente avremo, dopo averlo scomposto in particelle,

$$M_{\text{ris}} = \sum_i M_i = (\sum_i m_i r_i^2)\alpha$$

(poichè tutti gli  $\mathbf{M}_i$  sono paralleli)

$$M_{\text{ris}} = I\alpha$$

(cf.  $\mathbf{F}_{\text{ris}} = m\mathbf{a}$ )

- possiamo riscrivere

$$M_{\text{ris}} = I\Delta\omega/\Delta t = \Delta(I\omega)/\Delta t = \Delta L/\Delta t$$

( $I$  è cost.!)

$$\text{se } M_{\text{ris}} = 0$$

$$\Delta L/\Delta t = 0, \quad L = \text{cost.}$$

si ha

(conservazione del momento angolare)



## cons. momento angolare (es.)

---

- pattinatrice su ghiaccio durante una piroetta: se chiude le braccia,  $I [= \sum mr^2]$  diminuisce e  $\omega$  aumenta e viceversa ( $L$  è costante,  $M_{\text{peso}} = 0$  rispetto all'asse di rotazione)

$$L = I_0 \omega_0 = I \omega \quad \rightarrow \quad \omega = (I_0/I) \omega_0$$

- collasso stellare – stella con  $m = 2M_S$ ,  $r_1 = R_S = 7 \cdot 10^5$  km,  $T_{\text{rot}} = 10$  g che collassa gravitazionalmente ad una stella di neutroni molto densa, stessa massa,  $r_2 = 10$  km; quale sarà la nuova velocità angolare?

si può calcolare

Assumiamo sfere uniformi:  $I_i = \frac{2}{5} m r_i^2$  - il sistema è isolato, niente  $F_{\text{est}}$ :  $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

$$\omega_2 = \omega_1 (I_1/I_2) = \omega_1 (\cancel{2/5} m r_1^2) / (\cancel{2/5} m r_2^2) = \omega_1 (r_1^2/r_2^2) = 4 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

OK?  $v_{\text{perif}} = 4 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \cdot 10^4 \text{ m} = 4 \cdot 10^8 \text{ m/s} !!$  ci vorrebbe un calcolo relativistico



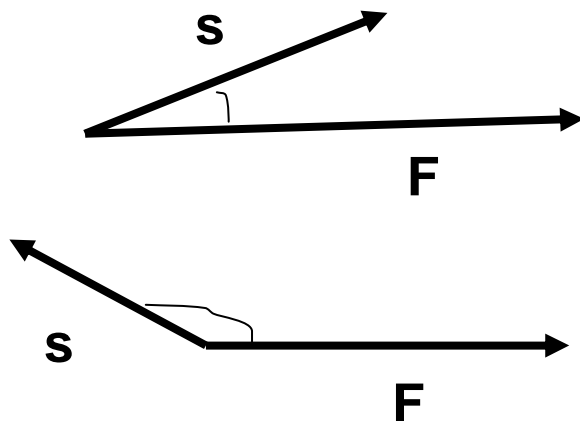
# Lavoro di una forza

1. forza cost.  $\mathbf{F}$  applicata ad un p.m., spostamento finito rettilineo  $\mathbf{s}$  del p.m.

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos\theta \quad (= \mathbf{s} \cdot \mathbf{F})$$

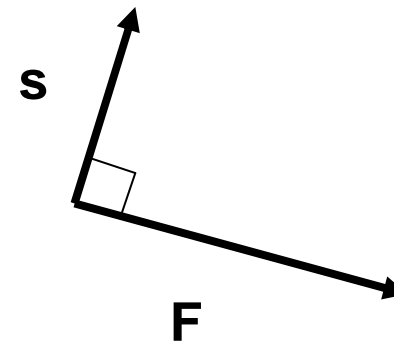
prodotto  
scalare

spostamento del punto di applicazione di  $\mathbf{F}$  parallelo ad  $\mathbf{F}$ :  
 $\mathcal{L} = 0$  se  $F = 0$ ,  $s = 0$ ,  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$



$$\mathcal{L} > 0$$

$$\mathcal{L} < 0$$



$$\mathcal{L} = 0$$



## Lavoro (2)

---

- dimensioni del lavoro (stesse del momento di F)

$$[\mathcal{L}] = [Fs] = [MLT^{-2} L] = [ML^2T^{-2}]$$

$$\text{unità SI: } 1N \cdot 1m = 1 \text{ joule} = 1 \text{ J} \quad \text{“}$$

$$\text{CGS: } 1cm \cdot 1dina = 1 \text{ erg} \quad \text{“}$$

$$1 \text{ erg} = 10^{-2} m \cdot 10^{-5} N = 10^{-7} J$$

(J e erg sono usate solo per lavoro, energia e calore)

- Potenza: rapidità con cui è eseguito un lavoro

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} / \Delta t$$

$$[\mathcal{P}] = [ML^2T^{-3}]$$

$$\text{unità SI: } 1 \text{ J/s} = 1 \text{ watt} = 1 \text{ W}; \quad \text{CGS: } 1 \text{ erg/s}$$

$$\text{altra unità, cavallo vapore: } 1 \text{ CV} = 735 \text{ W} = 0.735 \text{ kW}$$





## Lavoro di una forza variabile

2. forza variabile (mod.,direz.,verso), traiettoria curva;  
dividiamo la traiettoria  
in tratti  $\Delta \mathbf{s}$  con  $\mathbf{F}$  cost.  
nel tratto ( $\rightarrow$  definiz.  
precedente)

$$\Delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = F \Delta s \cos \theta$$

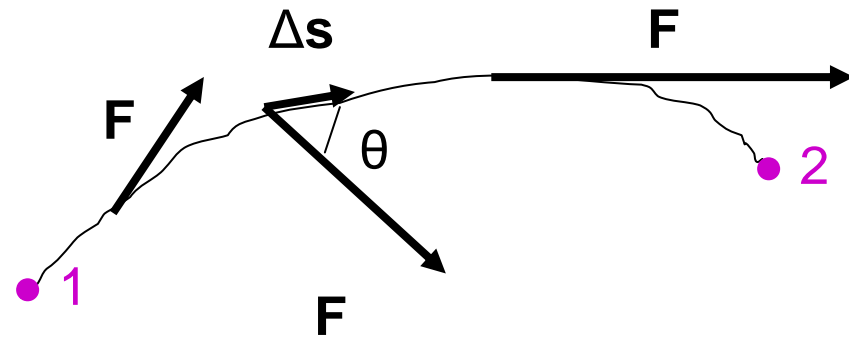
per ottenere il lavoro totale:

$$\mathcal{L} = \sum \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = \sum F \Delta s \cos \theta$$

in effetti a rigore:

$$\mathcal{L} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum F \Delta s \cos \theta = \int_1^2 F \cos \theta ds$$

(somma su  $\infty$  tratti di lunghezza infinitesima  $ds$ )





## Lavoro di $F_{\text{ris}}$ e energia cinetica

- p.m. di massa  $m$  soggetto a  $F_{\text{ris}} = F$  cost,  $a = F/m \Rightarrow$  moto unif. accel; prendiamo  $\Delta t \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1$  nella direzione del moto; si ha

$$a(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad [\text{vedi p. 19}]$$

$$\mathcal{L} = F(x_2 - x_1) = ma(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

si definisce energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

(sempre  $\geq 0$ , poichè  $m \geq 0$  e  $v^2 \geq 0$ )

il lavoro di  $F_{\text{ris}}$  uguaglia  $\Delta K$  del p.m.

- corpo di massa  $m$ , moto traslatorio (stessa  $v$  per tutti i punti):  
 $K = \frac{1}{2}mv^2$ ; sistema di forze agenti sul corpo che trasla  
(traiettoria retta o curva)

$$\mathcal{L}_{\text{ris}} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \Delta K$$

(teorema dell'energia cinetica)

lavoro totale delle f. agenti = variazione energia cinetica



# Energia

- **energia** = capacità di compiere lavoro (dimensioni, unità: le stesse del lavoro)
- es.1 **energia cinetica**: corpo in moto ( $\mathbf{v}$ ,  $K$ ) comprime una molla,  $\mathcal{L}$  contro la f. elastica
- es.2 sasso lanciato verso l'alto ( $\mathbf{v}_0$ ,  $K$ ),  $\mathcal{L}$  contro la f. di gravità



- es.3 si lascia cadere un corpo da fermo ( $K = 0$ ): l'energia cinetica raggiunta quando il c. tocca il suolo dipende dalla quota iniziale (**energia potenziale**) – moto unif. acc.  $v_0^2 = 2gh$



# Forze conservative

---

- se il lavoro  $\mathcal{L}$  delle f. dipende **solo** dalla posizione 1 (iniziale) e 2 (finale) e **non** dalla scelta del percorso 12:  
⇒ **forze conservative**
- le f. che dipendono solo dalla posizione sono conservative (in particolare le f. costanti sono conservative!)
- esempi di f. conservative: f. peso  $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ , f. elastica  $\mathbf{F} = k(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ , f. elettrostatica  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ , vedi più avanti, etc.
- se le f. dipendono da t esplicitamente oppure anche implicitamente (ad es. attraverso  $\mathbf{v}$ , f. di attrito (resistenza) dell'aria  $\mathbf{F}_a = -cAv^2(\mathbf{v}/v)$ , f. di attrito radente  $\mathbf{f} = -\mu N(\mathbf{v}/v)$ , f. magnetica  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ , vedi più avanti, etc. ) **non** sono forze conservative



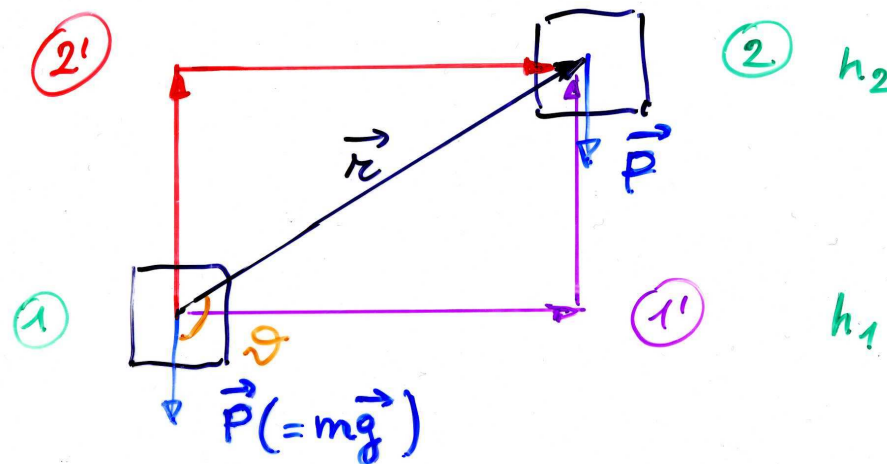
## Forze conservative (2)

- es. f. peso (costante), supponiamo di spostare una massa  $m$  da una quota  $h_1$  ad una  $h_2$ , posso scegliere diversi percorsi: 12 (diretto), 11'2, 12'2 etc.

$$\mathcal{L}_{12} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = Pr \cos\theta = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\mathcal{L}_{11'2} = \mathcal{L}_{11'} + \mathcal{L}_{1'2} = 0 + [-mg(h_2 - h_1)] = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\mathcal{L}_{12'2} = \mathcal{L}_{12'} + \mathcal{L}_{2'2} = -mg(h_2 - h_1) + 0 = -mg(h_2 - h_1)$$





## Forze conservative (3)

- il lavoro è sempre lo stesso, proviamo 13'32, 12 secondo una spezzata (a scalini), 12 secondo una curva continua

...

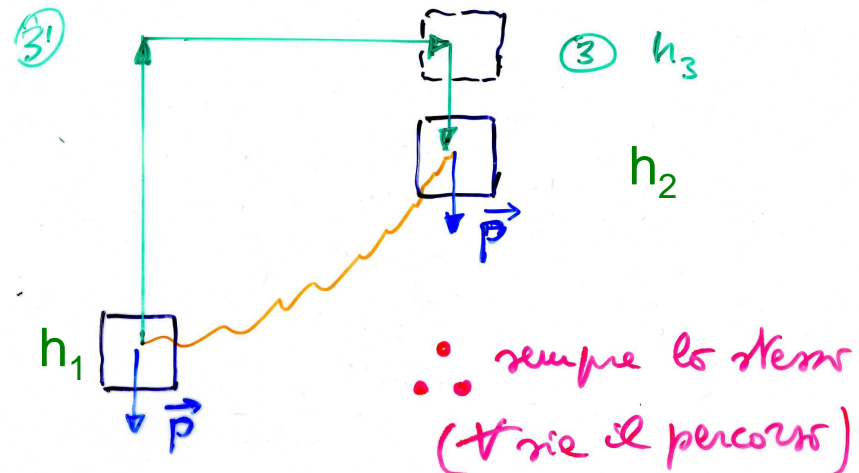
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{13'32} &= \mathcal{L}_{13'} + \mathcal{L}_{3'3} + \mathcal{L}_{32} = -mg(h_3 - h_1) + 0 + mg(h_3 - h_2) \\ &= -mg(h_2 - h_1) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{12\text{spezzata}} = \Sigma(0 + [-mg\Delta h])$$

$$= -mg(h_2 - h_1)$$

...

- il lavoro dipende solo dalla quota iniziale e finale, non dal modo in cui si passa da 1 a 2





# Energia potenziale

- se  $\mathbf{F}$  è conservativa (dipende solo dalla posizione) ho che  $\mathcal{L}_{12}$  è **indipendente dal percorso e dipende solo dagli estremi** (di conseguenza sarà anche  $\mathcal{L}_{11} = 0$  sempre)

- posso porre

$$\mathcal{L}_{12} = W_1 - W_2 = -\Delta W$$

dove  $W$  è l'energia potenziale: il lavoro da 1 a 2 è = - (la variazione dell'energia potenziale)

**NB** si definisce **solo** la variazione dell'e.p., **non** il suo valore in assoluto

ad es. f. peso

$$W(h) - W(0) = -\mathcal{L}_{0h} = mgh$$

se, *arbitrariamente*, scelgo  $W(0) = 0$ , ho  $W(h) = mgh$

[ma qualsiasi altra scelta andrebbe bene lo stesso:  $\Delta W = W_2 - W_1 = W_2' - W_1' = (W_2 + c) - (W_1 + c) = W_2 + c - W_1 - c$  con  $c$  cost.]



# Conservazione dell'energia meccanica

---

- p.m. o corpo soggetti a f., posso definire in genere

$$E = K + W$$

**energia totale meccanica**, somma di e. cinetica ed e. potenziale (con  $\mathcal{L}_{12} = K_2 - K_1$ , lavoro **della f. risultante**, vedi p. 91), **scalare**

- **se** le f. sono conservative avrò

$$\mathcal{L}_{12} = K_2 - K_1 = W_1 - W_2$$

da cui

$$K_2 + W_2 = K_1 + W_1 = \text{cost.} \quad (= E_0)$$

oppure

$$\Delta E = 0$$

**legge di conservazione dell'energia totale meccanica**





## Conservazione dell'energia meccanica (2)

- ad es.1 f. peso / caduta libera, si parte con  $v = 0$  dalla quota  $h$

$$E(h) = K(h) + W(h) = 0 + mgh = mgh \quad (= E_0)$$

$$E(0) = K(0) + W(0) = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}m \cdot 2gh = mgh$$

genericamente,  $0 \leq y \leq h$

$$E(y) = \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy = mgh \quad (= E_0)$$

- ad es.2 moto di un p.m. di massa  $m$  attaccato ad una molla di costante elastica  $k$ ,  $x$  allungamento della molla

$$E(x) = K(x) + W(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2(*) \quad (= E_0)$$

$$E(0) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad (\text{posizione di equilibrio, } x = 0)$$

$$E(A) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (\text{massima elongazione, } v = 0)$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$



## Lavoro della forza elastica

- molla orizzontale,  $x = 0$  a riposo, data una f. deformante

$$x = F/k \quad (F = kx, \text{ legge di Hooke})$$

f. elastica della molla  $F'$

⇒ in una nuova posizione di equilibrio

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}' = 0; \quad \mathbf{F}' = -\mathbf{F}; \quad F' = -F = -kx$$

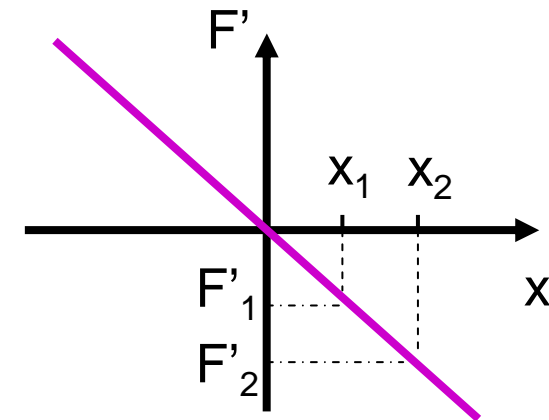
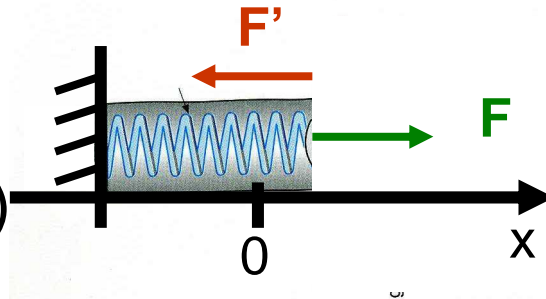
allunghiamo la molla da  $x_1$  a  $x_2$ ,

$F'$  passa da  $F_1' = -kx_1$  a  $F_2' = -kx_2$

$F'$  è variabile ⇒ uso  $\underline{F}' = (F_1' + F_2')/2$

$$\mathcal{L} = \underline{F}' \Delta x = (-kx_1 - kx_2)/2 \cdot (x_2 - x_1)$$

$$= -(\frac{1}{2}k x_2^2 - \frac{1}{2}k x_1^2) = -\Delta W$$





## En. potenziale elastica ed en. totale

---

- en. potenziale della molla, allungamento  $x$

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$

- a stretto rigore si sarebbe dovuto fare (il risultato è uguale)

$$\mathcal{L} = \int_{x_1}^{x_2} F' dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -k/2 (x_2^2 - x_1^2)$$

- lancio un blocco di massa  $m$  contro la molla con velocità  $v_0$  secondo  $x$  su un piano orizz.: comprimerà la molla fino a fermarsi – ponendo  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = A$  ( $v_1 = v_0 = v_{\max}$ ,  $v_2 = 0$ ); trascuriamo gli attriti, **P** ed **N** non fanno lavoro

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}kA^2 \quad \text{lavoro della f. elastica (molla)}$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad \text{variazione en. cinetica (blocco)}$$

$$\mathcal{L} = \Delta K \quad (\text{teor. dell'en. cinet.}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

si ha un trasferimento di energia dal blocco alla molla



## En. totale sistema massa più molla

---

- per due allungamenti generici  $x_1$  e  $x_2$  avrò

$$\Delta K = - \Delta W$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = - (\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2)$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

o anche

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = \text{cost} \quad (= E_0)$$

che è l'energia totale di un moto armonico nel tempo di periodo  $T = 2\pi/\omega$  dove  $\omega^2 = k/m$

(se il blocco resta agganciato alla molla, si muoverà di moto armonico semplice in assenza di attriti)



## Lavoro delle forze non conservative

---

- es. considero un blocco,  $m = 2.04 \text{ kg}$ , che si muove senza attrito su un piano sotto l'azione di  $F = 15 \text{ N}$  cost. per un tratto  $d = 2 \text{ m}$  (lavoro  $Fd = 30 \text{ J}$ )

$$\mathcal{L} = -\Delta W = K_2 - K_1$$

$$W(x) = -Fx + \text{cost} = F(d - x)$$

$E_0 = 30 \text{ J}$ ;  $K$  cresce;  $W$  diminuisce di conseguenza

$$E(x) = K(x) + W(x) = E_0 = \text{cost}$$

- se c'è attrito, ad es.  $\mu = 0.5$ , dovrò includere il lavoro della f. d'attrito non conservativa,  $f = \mu N = \mu mg = 10 \text{ N}$ , che si oppone al moto:  $\mathcal{L}_{nc} = -fd = -20 \text{ J}$

$$\mathcal{L} = -\Delta W + \mathcal{L}_{nc} = K_2 - K_1$$

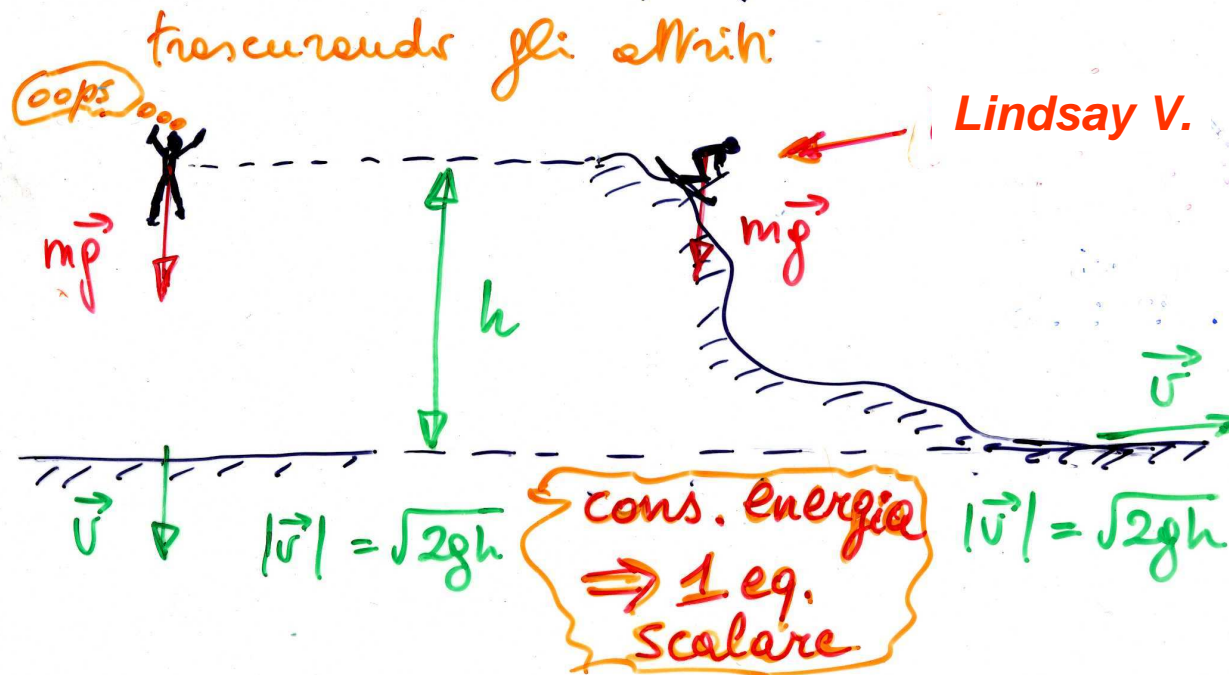
$$E(x) = K(x) + W(x) < E_0$$



# Caveat

- l'energia è uno **scalare** → direzioni ignote, ad es.

Paracadute (manca) & sciebre



- gli attriti con il mezzo circostante riducono l'en. totale meccanica che si trasforma in altra energia



# Meccanica 3a parte

---



**Elasticità**



# Trazione e compressione

- i corpi reali non sono rigidi ma più o meno deformabili, il tipo di deformazione dipende da come si applicano le f.
- si definisce **sforzo** la f. applicata su una superficie A divisa la superficie stessa

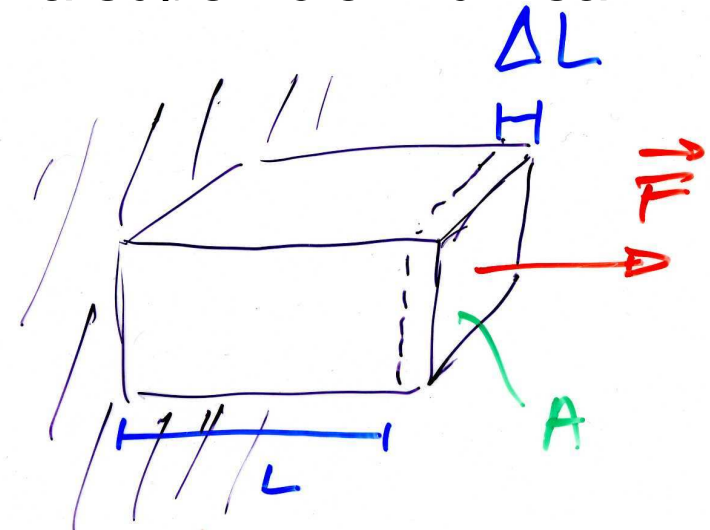
$$\text{sforzo} = F/A$$

$$[F/A] = [MLT^{-2}L^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}]$$

unità SI: N/m<sup>2</sup> o pascal (Pa)

CGS: 1 dyne/cm<sup>2</sup> = 10<sup>-1</sup> N/m<sup>2</sup>

- **deformazione** =  $\Delta L/L$  (numero puro)  
adimensionale - la definizione di deformazione fa riferimento al tipo di sforzo: trazione (compressione) implica sforzo ortogonale alla superficie

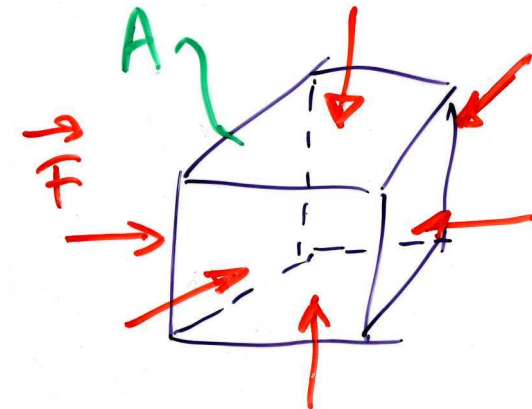
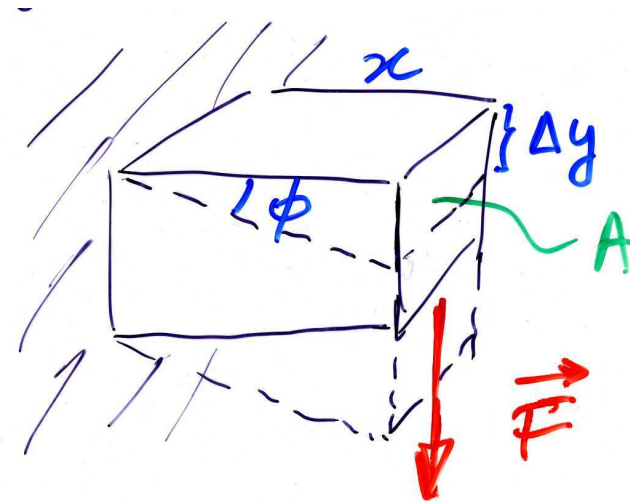






# Sforzo di taglio e di volume

- taglio: forza parallela alla sup. A
- sforzo =  $F/A$
- deformazione =  $\Phi$  (adimensionale)  
con  $\text{tg}\Phi = \Delta y/x$
  
- sforzo di volume (presente anche per liquidi e gas, senza forma propria)
- sforzo =  $F/A = \Delta p$  (pressione)
- deformazione =  $-\Delta V/V$



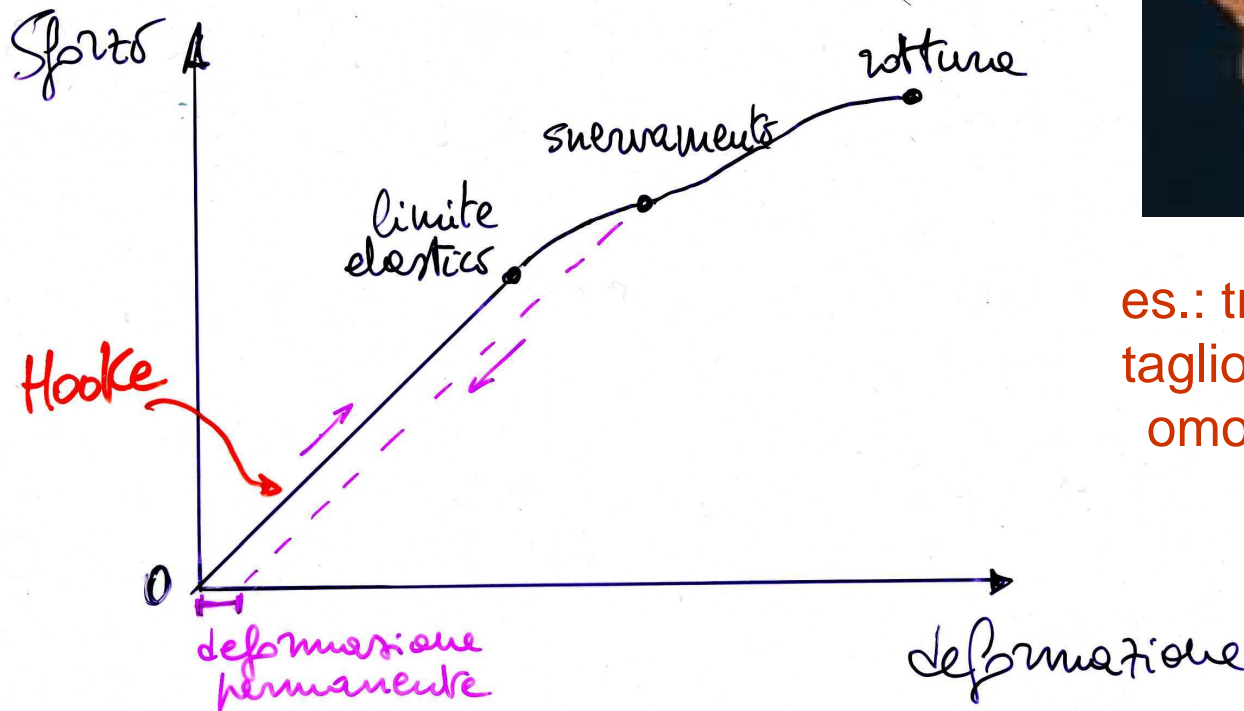


# Legge di Hooke

- per piccole deformazioni, entro il limite elastico => vale la legge di Hooke

sforzo  $\propto$  deformazione

(cf. con  $F = kx$ , forza elastica)



es.: trazione, taglio, sforzo omogeneo



# Legge di Hooke (2)



1. trazione/compress.

$$F/A = Y \Delta L/L$$

(Y – modulo di Young)

2. taglio

$$F/A = n \Delta \Phi$$

(n – modulo di rigidità)

3. elasticità di vol.

$$\Delta p = - B \cdot \Delta V/V$$

(B – modulo omogeneo)

	$Y$ ( $10^9 \frac{N}{m^2}$ )	$n$ ( $10^9 \frac{N}{m^2}$ )	$B$ ( $10^9 \frac{N}{m^2}$ )
Acciaio	210	83	170-180
Pb	18	8	43
Ossa	$\sim 10$	—	—
Muscoli	$\sim 0.005$	—	—
Gomme	$\sim 0.001$	—	—
<hr style="border-top: 1px dashed orange;"/>			
H <sub>2</sub> O	}	}	2.2
Hg	}	}	26
gas perfetti (1 atm)	}	}	$\sim 0.0001$



## Applicazione della legge di Hooke

---

- $\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y} \frac{F}{A} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = F \cdot \frac{L}{YA} = F/k \quad \text{con } k=YA/L$

- quanto si deforma l'osso di una gamba?

- $Y_{\text{osso}} \sim 10^{10} \text{ N/m}^2$

- 40 kg (su una gamba)  $\Rightarrow F \sim 400 \text{ N}$

- $L \sim 0.9 \text{ m}$  (1/2 altezza)

- $A \sim 10 \text{ cm}^2 \sim 10^{-3} \text{ m}^2$

$\Rightarrow k = YA/L \sim 1.1 \cdot 10^7 \text{ N/m}$

$\Delta L = F/k \sim 3.6 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 36 \mu\text{m}$

(verifica a posteriori:  $\Delta L/L \sim 4 \cdot 10^{-5}$  piccolo, si può quindi ammettere che valga la legge di Hooke)



## Applicazione delle leggi dell'elasticità

---

- confronto formica-elefante sotto l'azione del proprio peso
- assumiamo che siano fatti con lo **stesso materiale**, **stessa resistenza al carico**, **stessa densità**

$$\rho = M/V = M/L^3$$

- schematicamente prendiamo dei cubi, **formica**, area di base  $A = L^2$ ,  $M = \rho V = \rho L^3$
- $F/A = Mg/L^2 = \rho L^3 g/L^2 = \rho L g$
- **elefante**,  $L' = nL$ ,  $A' = n^2 L^2$ ,  $P = n^3 Mg$        $n \sim 3000$
- $F'/A' = n^3 Mg/n^2 L^2 = n \rho L g$

se lo sforzo di rottura è lo stesso  $\Rightarrow$  zampe (ossa) dell'e. devono essere molto più tozze di quelle della f.



---

# Fine della meccanica