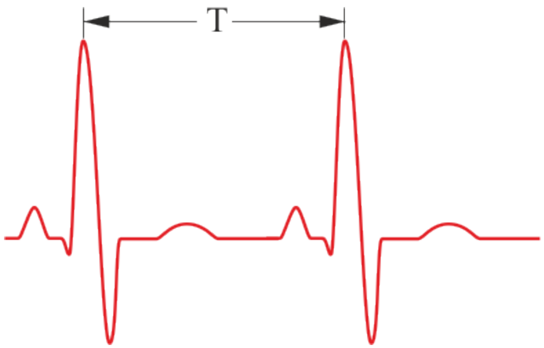
Analogy is one of the most powerful tools a physicist has to arrive at an understanding of the mysteries of nature.

Oscillazioni

Corso di Fisica per CTF

AA 2015/16

- Oscillazioni
  - sistema massa-molla, pendolo semplice
  - oscillazioni smorzate; oscillazioni forzate, risonanza
- In generale ∀ movimento di un sistema che si riproduce esattamente uguale dopo un tempo T (periodo)
- Sia x una grandezza fisica caratteristica del sistema che ne descrive lo stato (pressione di un gas, deformazione di un corpo, corrente elettrica etc.) [x = 0 corrisponde ad una situazione equilibrio], allora



$$x(t) = x(t + nT) \qquad n - \text{intero}$$

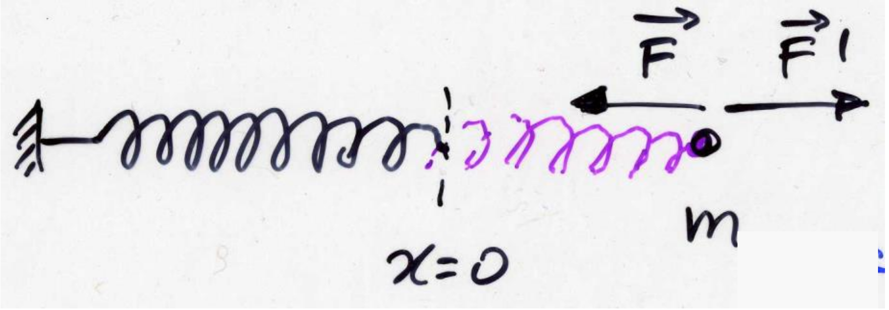
e anche

$$v(t) = v(t + nT)$$

$$a(t) = a(t + nT)$$

Sistema massa-molla

- una massa oscilla attaccata ad una molla (ad es. sopra un piano senza attriti)



- per spostare la massa (molla) di dx dalla posizione (allungamento) x, lavoro *sulla* molla:

$d\mathcal{L} = Fdx = -kxdx$

$\mathcal{L} = \int_0^x -kxdx = -k\int_0^x xdx = -\frac{1}{2}kx^2$ (dalla posiz. di equilibrio a x)

$\Delta W = -\mathcal{L} = \frac{1}{2}kx^2 = W(x) - W(0)$

$W(x) = \frac{1}{2}kx^2$ se pongo $W(0) = 0$

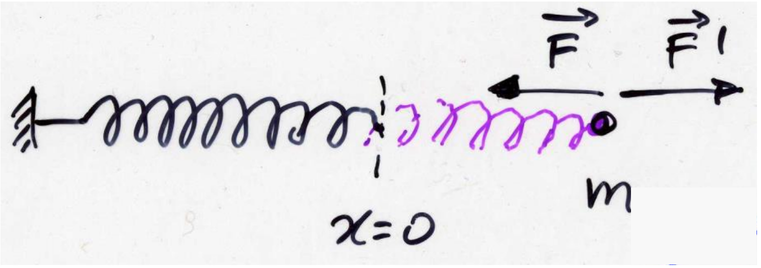
A, spostamento massimo: $W(A) = \frac{1}{2}kA^2$

en. cinetica della massa: $K = \frac{1}{2}mv^2$

$W(x) + K(x) = E_0$ conserv. en. totale meccanica

[$W(t) + K(t) = E_0$ siccome $x = x(t)$, $v = v(t)$!]

Energia nel sistemi meccanici



en. della molla (potenziale) en. della massa (cinetica)

$W = ½kx^2$ $K = ½mv^2$

ampiezza del moto A vel. massima v_{max}

en. totale: $E_0 = W(x) + K(x) = ½kx^2 + ½mv^2 = ½kA^2 = ½mv_{max}^2$

pongo $\omega^2 = k/m = (v_{max}/A)^2$

eq. di moto $a = –(k/m)x = –\omega^2 x$ (II princ.: $ma = F = -kx$)

soluzione con x=+A per t=0, matematicamente:

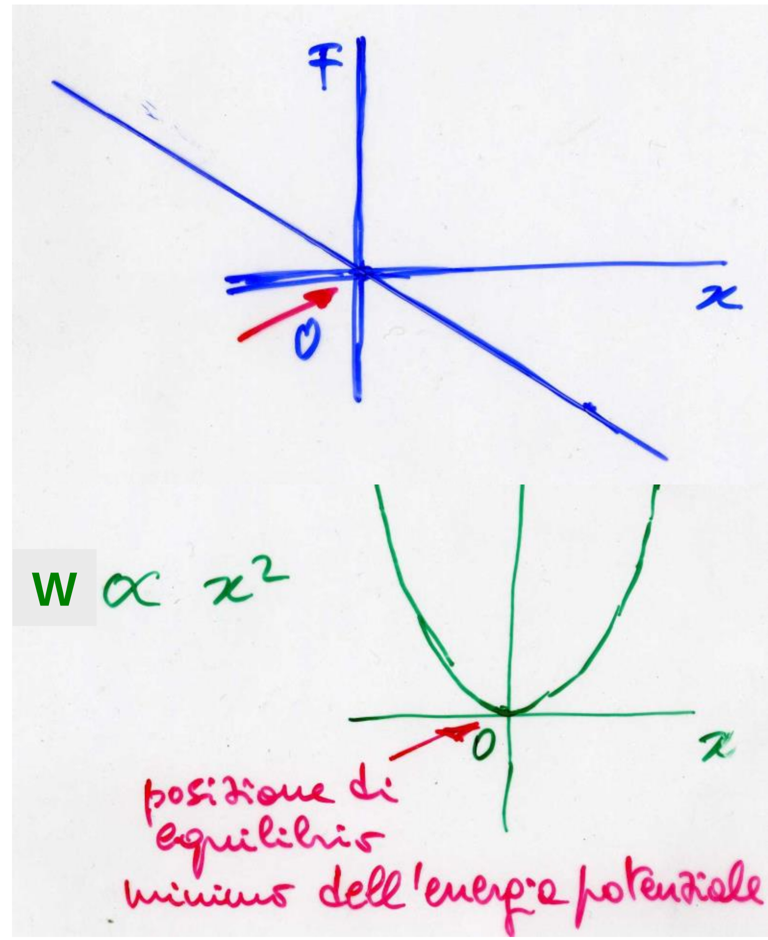
$x(t) = A\cos\omega t$ moto armonico semplice

$v(t) = –\omega A\sin\omega t$ (=dx/dt)

$a(t) = –\omega^2 A\cos\omega t$ (=dv/dt) [per una dimostrazione vedi oltre]

Oscillazioni armoniche

- in generale: un sistema oscilla intorno ad una posizione di equilibrio stabile – con moto armonico semplice se la F di richiamo verso la posizione di eq. stabile è $\propto$ –spostamento e c'è un'inerzia che fa superare la posiz. di equil. continuando il moto (piccole oscillazioni del pendolo, massa-molla, circuito LC, molecola H_2)



$\boxed{k}$

- $F(x) \propto -x$ $\qquad$ $(a \propto -x)$

$\boxed{m}$

- $W(x) = -\mathscr{L}(x) \propto x^2/2$

Oscillazione (passo passo)

- trasferimento: en. cinetica ⟺ en. potenziale

t	x	v	a	en.	E_0
0	+A	0	$-\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$
t_1	0	$-\omega A$	0	cin.	$\frac{1}{2}mv_{max}^2$
t_2	$-A$	0	$+\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$
t_3	0	$+\omega A$	0	cin.	$\frac{1}{2}mv_{max}^2$
t_4	+A	0	$-\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$

sposto il sistema dall'equilibrio e lo lascio andare

il moto si ripete uguale

- $t_4 = T$; $t_2 = t_4/2 = T/2$ per simmetria

  $t_1 = t_2/2 = T/4$; $t_3 = t_2+(t_4-t_2)/2 = 3T/4$ per simmetria
- $\omega = \sqrt{k/m} = v_{max}/A \quad \rightarrow \quad v_{max} = \omega A$

Soluzione (senza derivate)

- uso la cons. dell'en. meccanica (e $m=k/\omega^2$)

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \cancel{\frac{1}{2}kA^2}(x/A)^2 + \cancel{\frac{1}{2}kA^2}(v/(\omega A))^2 = \cancel{\frac{1}{2}kA^2}$

$\rightarrow \ (x(t)/A)^2 + (v(t)/(\omega A))^2 = 1$ cfr $\cos^2\Phi+\sin^2\Phi=1 \ \forall\Phi$

- se voglio x e v periodiche con periodo T prendo

$x(t)/A = \cos(2\pi t/T)$ $v(t)/(\omega A) = -\sin(2\pi t/T)$

che soddisfano $x=A$ per $t=0$ e $v(T/4)= -v_{max}= -\omega A$

- T è un tempo caratteristico del sistema

$T = 1/\nu = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$

l'unico dimensionalmente possibile

$[\omega^{-1}] = [(m/k)^{0.5}] = [(M/(MT^{-2}))^{0.5}] = [T]$

Oscillazioni (cont.)

- tutte le oscillazioni si comporteranno allo stesso modo, cambia solo ω (T) a seconda del sistema e cambia lo spostamento dalla posiz. di equilibrio (distanza, angolo, carica)
- massa-molla $\omega = \sqrt{k/m}$ $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

  pendolo semplice $\omega = \sqrt{g/L}$ $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

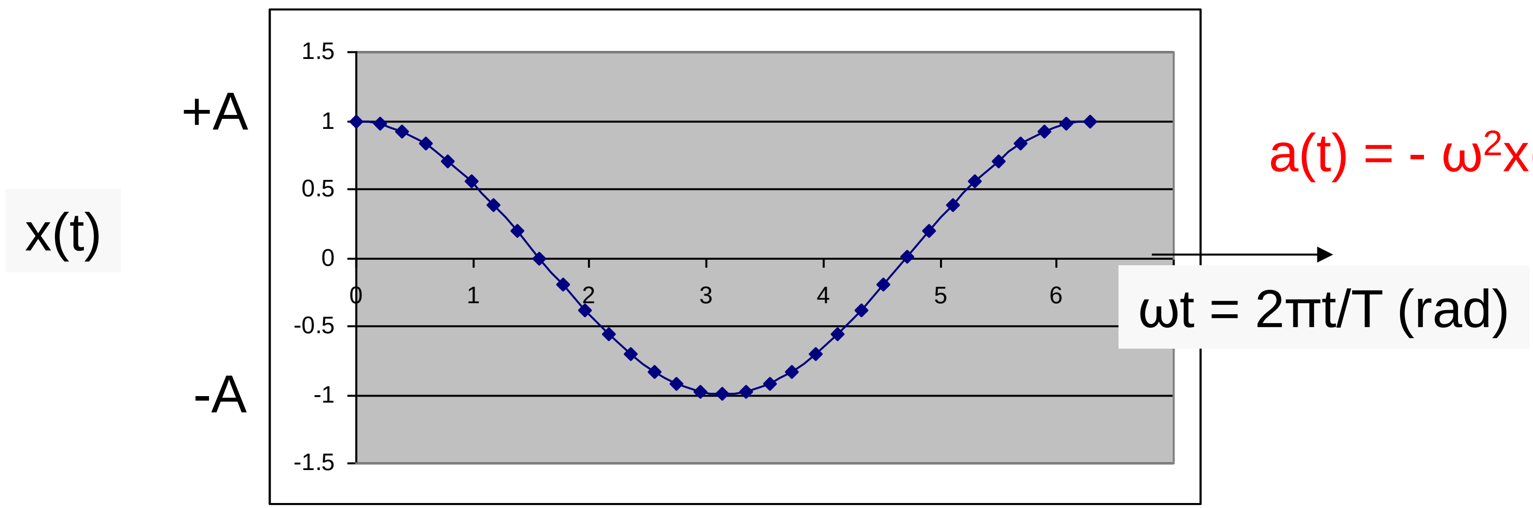
  [circuito LC $\omega = 1/\sqrt{LC}$ $T = 2\pi\sqrt{LC}$]

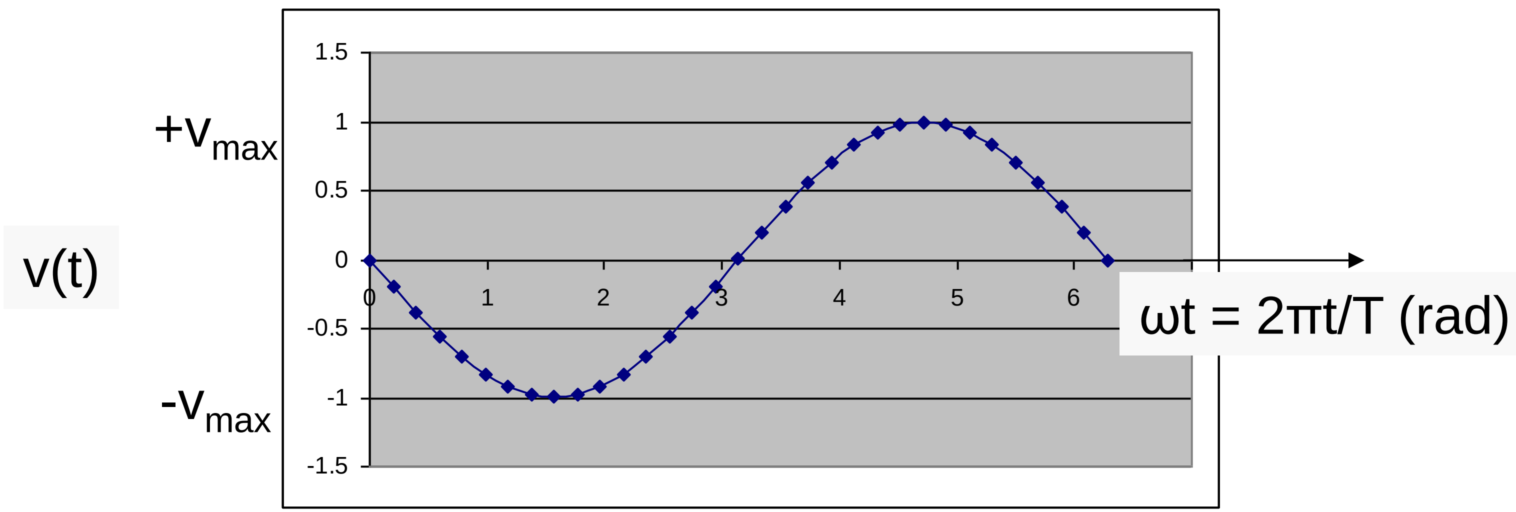
  etc.

  piccole oscillaz.
- spostamenti, velocità (lineari, angolari, correnti), accelerazioni (lineari, angolari, derivata della corrente) saranno tutti dati da funzioni sinusoidali (moto armonico semplice di pulsazione $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$)

Oscillazioni (cont)

$a(t) = -\omega^2 x(t)$





Pendolo semplice

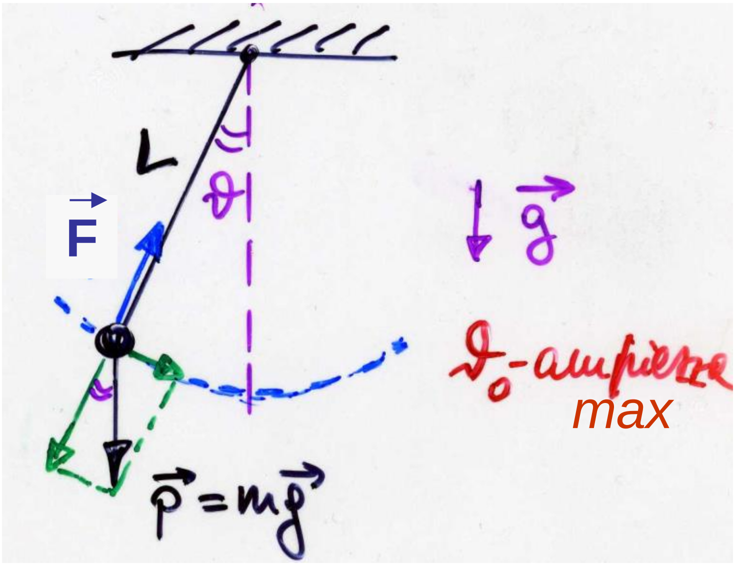
- $mg\cos\theta = F$ tensione del filo
- $-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}a = \cancel{m}L\alpha$
- piccole oscill.: $\boxed{\theta_0 \textbf{ piccolo}}$

  $\rightarrow \sin\theta \sim \theta$ (rad!)
- $-g\theta = L\alpha \; (= L\,d^2\theta/dt^2)$

  $\omega^2 = g/L$ $\boxed{T = 2\pi\sqrt{L/g}}$

  indipendenti da θ_0

$\boxed{g = 4\pi^2 L/T^2}$ misurando L,T $\rightarrow$ g



- (*) [pendolo fisico: $m \rightarrow I$; $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}=\mathbf{L}\times(m\mathbf{g})$

  $-mgL\sin\theta = I\alpha$; $-mgL\theta = I\alpha$; $T = 2\pi\sqrt{mgL/I}$

  con L distanza del baricentro dal centro di sospensione]

(*) paragrafo facoltativo

Angoli piccoli (*)

$\theta = 90° = 1.5708$ rad

$\sin\theta = 1$

$(\sin\theta - \theta)/\sin\theta = -0.57$

$\theta = 30° = 0.5236$ rad

$\sin\theta = 0.5$

$(\sin\theta - \theta)/\sin\theta = -0.047$

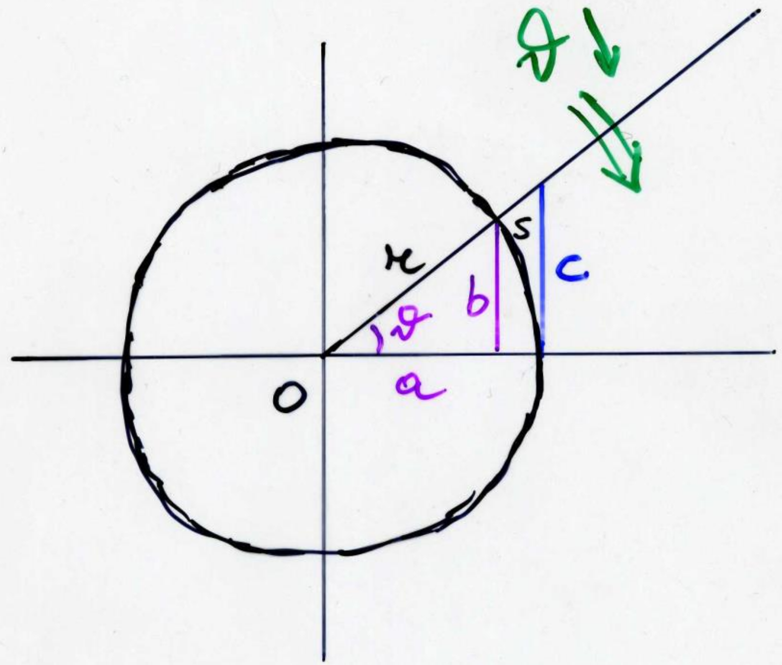
$\theta = 3° = 0.05236$ rad

$\sin\theta = 0.05234$

$\mathrm{tg}\,\theta = 0.05241$

$(\sin\theta - \theta)/\sin\theta =$
$= -0.00046$

$(\mathrm{tg}\,\theta - \theta)/\mathrm{tg}\,\theta =$
$= +0.00091$



$\sin\vartheta = \frac{b}{r}$

$\cos\vartheta = \frac{a}{r}$

$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{b}{a} = \frac{c}{r}$

$\vartheta = \frac{s}{r}$

$\frac{b}{r} < \frac{s}{r} < \frac{c}{r} \left(= \frac{b}{a}\right)$ (I quadrante)

$\sin\vartheta < \vartheta < \mathrm{tg}\,\vartheta$

ϑ piccolo: $\sin\vartheta \sim \vartheta \sim \mathrm{tg}\,\vartheta$

(*) facoltativo ma utile

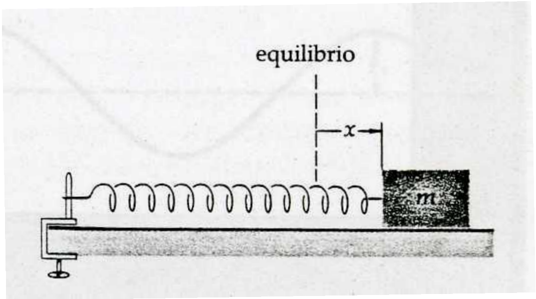
Oscillazioni smorzate (*)

- sistema massa-molla con attrito

  ma + γv + kx = 0 termine $\propto$ v, attrito, smorzamento

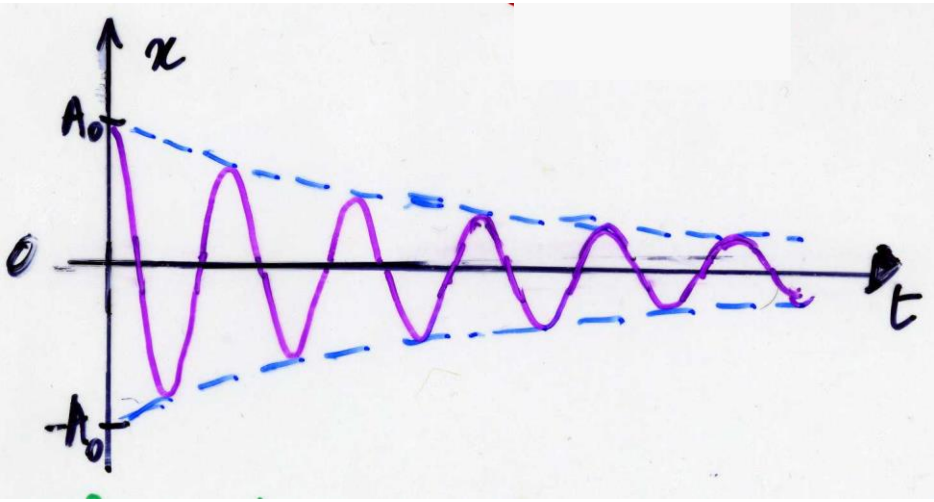
- $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2(t) < \frac{1}{2}kA_0^2$

  ad es. $A(t) = A_0 \exp[-\gamma t/(2m)]$



- se $\gamma \geq 2\sqrt{km}$ il moto è aperiodico

  se $\gamma < 2\sqrt{km}$ oscillazione con A decrescente



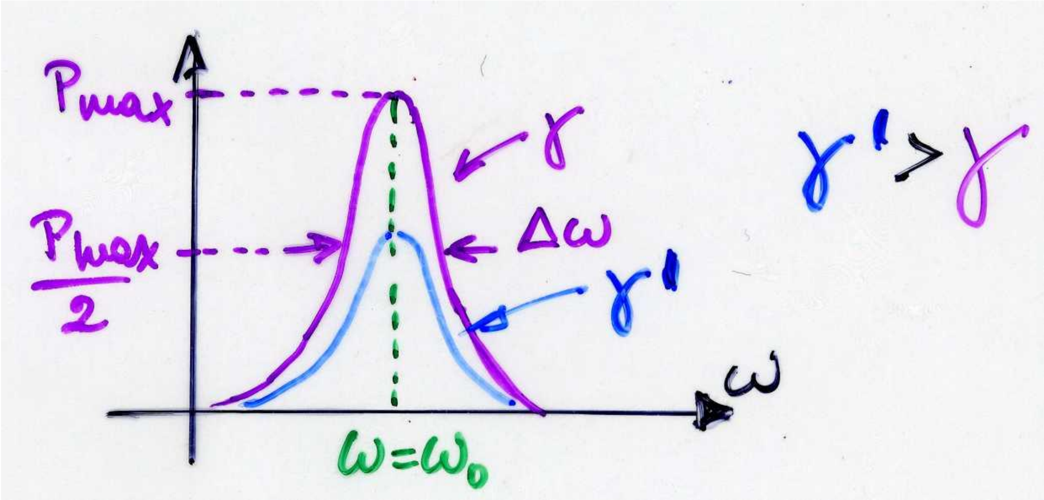
(*) facoltativo

Oscillazioni forzate, risonanza (*)

- sistema sottoposto ad una F esterna sinusoidale

  $ma + (\gamma v) + kx = F(t) = F_e \cos\omega t$

  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ frequenza propria del sistema
- se $\gamma=0$ il trasferimento di energia diventa ∞ per $\omega=\omega_0$ (in pratica si avrà una 'rottura')
- se $\gamma\neq0$ il trasferimento di energia (potenza) è max per $\omega=\omega_0$: es. assorb. di radiazione e.m. da parte di atomi e molelole



(*) **facoltativo**

Oscillazioni, applicazione (*)

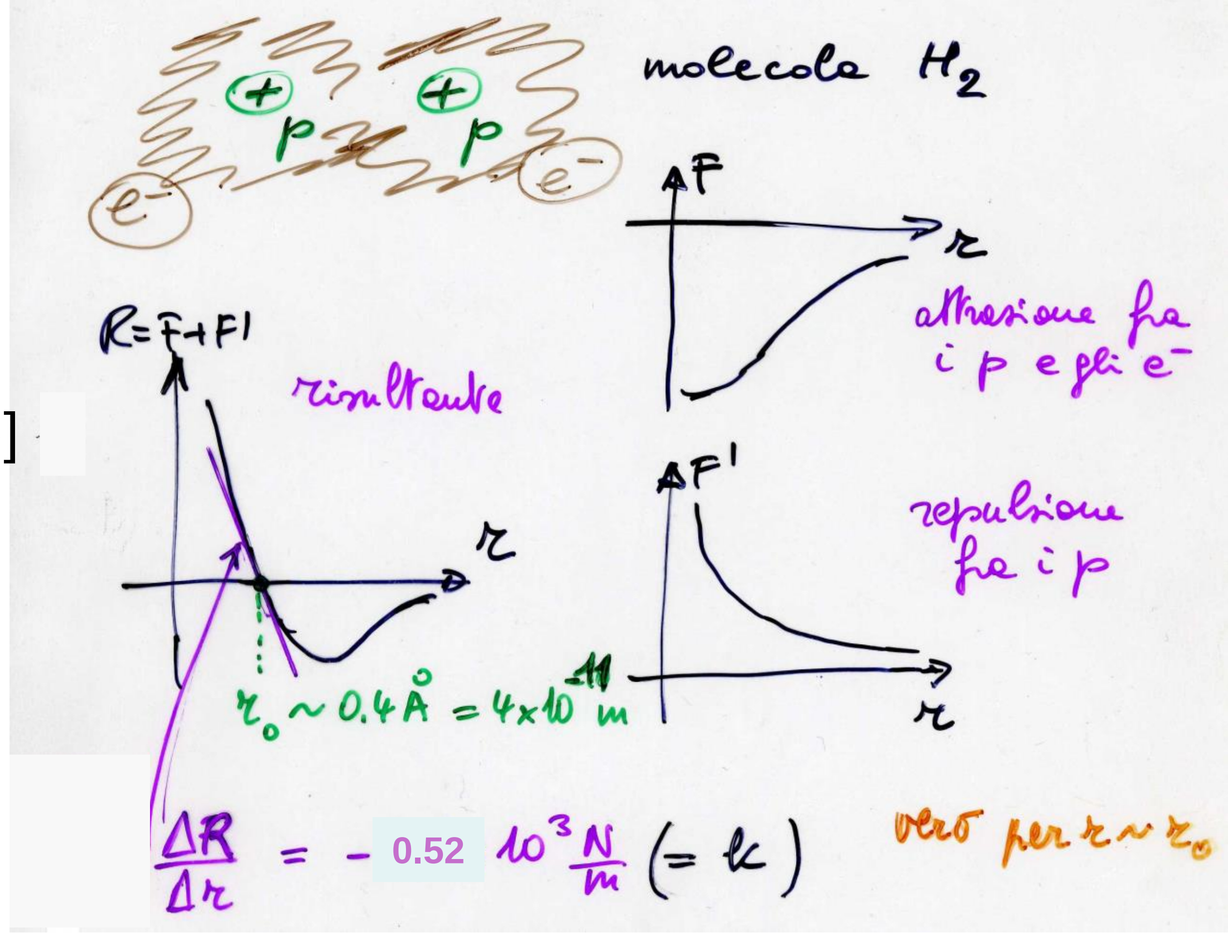
- molecola H_2 $\omega = \sqrt{k/\mu} = \sqrt{0.52 \cdot 10^3 / 0.84 \cdot 10^{-27}} \sim 0.8\ 10^{15}$ rad/s

  $\nu = 1.3\ 10^{14}$ Hz

  $\lambda = c/\nu = 2.4\ \mu m$

  (vedi Onde) [μ è la massa ridotta del H_2 $= m \cdot m/(m+m) = m/2$ (la vibrazione avviene rispetto al c.d.m. fisso)]

  $\rightarrow$ se si eccita H_2 con luce IR, H_2 si metterà ad oscill., assorbirà energia e posso «vederlo»



(*) facoltativo

Two cowboys marvelling at the Doppler effect in a train whistle

Fine delle oscillazioni