



# Oscillazioni e onde



Corso di Fisica per CTF  
AA 2009/10



- **Oscillazioni**
  - circuito LC, sistema massa-molla, pendolo semplice
  - oscillazioni smorzate; oscillazioni forzate, risonanza
- **Ottica geometrica**
  - riflessione, specchi
  - rifrazione, fibre ottiche, diottri, lenti sottili, strumenti ottici
- **Onde e ottica fisica**
  - generalità, frequenza, lunghezza d'onda, velocità, intensità e ampiezza, principio di sovrapposizione, onde stazionarie
  - onde acustiche, livello d'intensità
  - principio di Huygens, diffrazione
  - interferenza della luce, reticolo di diffrazione, polarizzazione

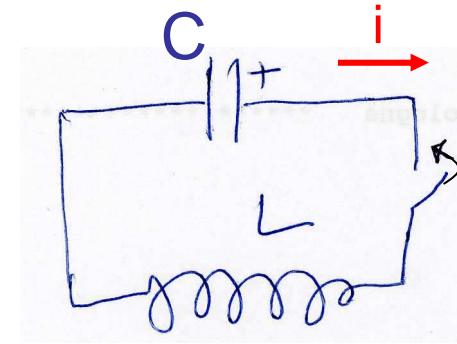


# Oscillazioni



# Circuito LC

- $t = 0$ , C carico,  $q = q_0$
- chiudo il tasto: comincia a circolare  $i$  (le cariche + migrano verso l'armatura sinistra) ed entra in azione L, l'energia presente in C (E) passa in L (B), il processo continua finchè  $i$  diventa max e C è scarico ( $q=0$ ), a quel punto  $i$  continua a caricare + l'armatura sinistra (per inerzia) e l'energia presente in L (B) è trasferita a C (E) ... e così via sempre oscillando (non ci sono R!):  
somma dell'en. di C (E) e di L (B) = cost.



- Kirchhoff, a  $t$  generico:  $L di/dt + q/C = 0$   
ossia  $L d^2q/dt^2 + q/C = 0$   
cioè  $d^2q/dt^2 = -1/(LC)q = -\omega^2q$   
 $q(t) = q_0 \cos \omega t$  soluzione del moto armonico  
 $i(t) = dq/dt = -\omega q_0 \sin \omega t$



## (Cfr.) Sistema massa-molla

- una massa oscilla attaccata ad una molla (ad es. sopra un piano senza attriti)
- per spostare la massa (molla) di  $dx$  dalla posizione (allungamento)  $x$ :

$$d\mathcal{L} = Fdx = -kxdx$$

$$\mathcal{L} = \int_0^x -kxdx = -k \int_0^x xdx = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{dalla posiz. di equilibrio a } x)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}kx^2 = W(x) - W(0)$$

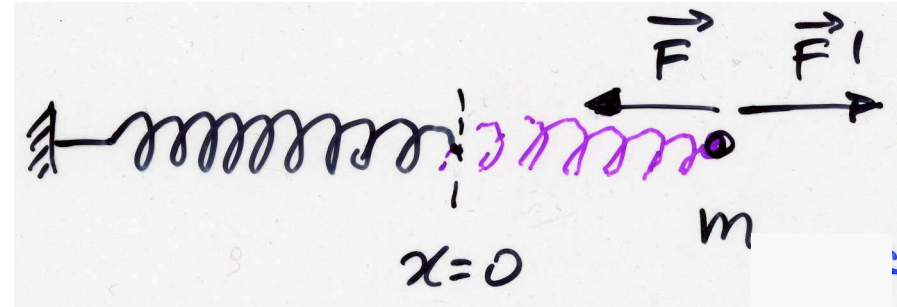
$$W(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{se pongo } W(0) = 0$$

$$A, \text{ spostamento massimo: } W(A) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\text{en. cinetica della massa: } K = \frac{1}{2}mv^2$$

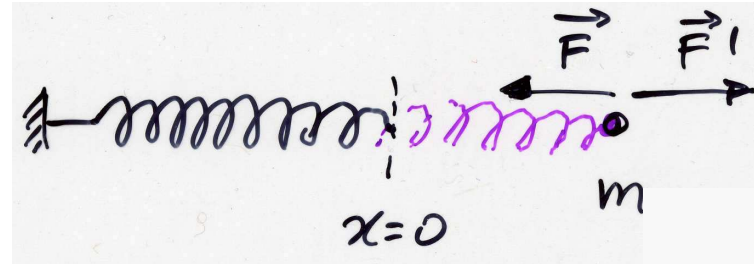
$$W(x) + K(x) = E_0 \quad \text{conserv. en. totale meccanica}$$

$$[ W(t) + K(t) = E_0 \quad \text{siccome } x = x(t), v = v(t) !]$$





# Energia nei sistemi meccanici



en. della molla (potenziale)

$$W = \frac{1}{2}kx^2 \quad [\text{cfr } q^2/(2C)]$$

ampiezza del moto A

$$\text{en. totale: } E_0 = W(x) + K(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

pongo

$$\omega^2 = k/m = (v_{\max}/A)^2$$

eq. di moto

$$a = -(k/m)x = -\omega^2x \quad (\text{Il princ.: } ma = F = -kx)$$

soluzione con  $x=+A$  per  $t=0$ , matematicamente:

$$x(t) = A\cos\omega t$$

**moto armonico semplice**

$$v(t) = -\omega A\sin\omega t \quad (=dx/dt)$$

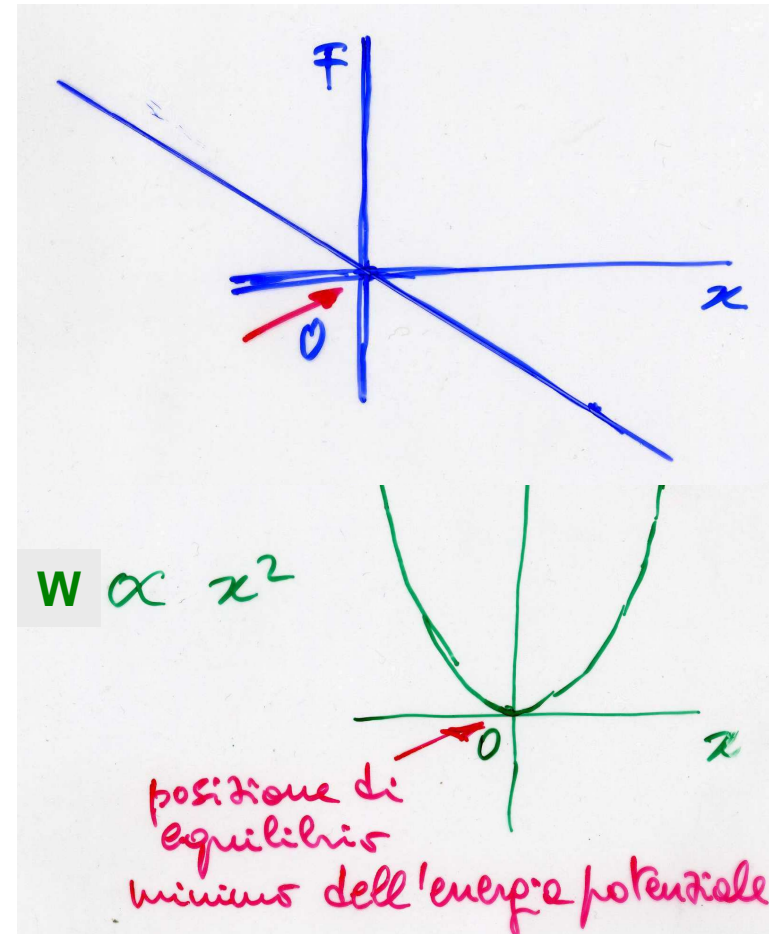
$$a(t) = -\omega^2 A\cos\omega t \quad (=dv/dt)$$



# Oscillazioni armoniche

- in generale: un sistema oscilla intorno ad una posizione di equilibrio stabile – con moto armonico semplice se la  $F$  di richiamo verso la posizione di eq. stabile è  $\propto -\text{spostamento}$  e c'è un'inerzia che fa superare la posiz. di equil. continuando il moto (piccole oscillazioni del pendolo, massa-molla, circuito LC, molecola  $H_2$ )

- $F(x) \propto -x$  k  $(a \propto -x)$
- $W(x) = -\mathcal{L}(x) \propto x^2/2$  m





## Oscillazione (passo passo)

- trasferimento: en. cinetica  $\longleftrightarrow$  en. potenziale

t	x	v	a	en.	$E_0$
0	+A	0	$-\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$
$t_1$	0	$-\omega A$	0	cin.	$\frac{1}{2}mv_{\max}^2$
$t_2$	-A	0	$+\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$
$t_3$	0	$+\omega A$	0	cin.	$\frac{1}{2}mv_{\max}^2$
$t_4$	+A	0	$-\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$

sposto il sistema  
dall'equilibrio e  
lo lascio andare

il moto si ripete uguale

- $t_4 = T$ ;  $t_2 = t_4/2 = T/2$  per simmetria  
 $t_1 = t_2/2 = T/4$ ;  $t_3 = t_2 + (t_4 - t_2)/2 = 3T/4$  per simmetria
- $\omega = \sqrt{k/m} = v_{\max}/A \rightarrow v_{\max} = \omega A$





## Soluzione (senza derivate)

- uso la cons. dell'en. meccanica (e  $m=k/\omega^2$ )

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \cancel{\frac{1}{2}kA^2}(x/A)^2 + \cancel{\frac{1}{2}kA^2}(v/(\omega A))^2 = \cancel{\frac{1}{2}kA^2}$$

$$\rightarrow (x(t)/A)^2 + (v(t)/(\omega A))^2 = 1 \quad \text{cfr } \cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1 \quad \forall \Phi$$

- se voglio  $x$  e  $v$  periodiche con periodo  $T$  prendo

$$x(t)/A = \cos(2\pi t/T) \quad v(t)/(\omega A) = -\sin(2\pi t/T)$$

che soddisfano  $x=A$  per  $t=0$  e  $v(T/4) = -v_{\max} = -\omega A$

- $T$  è un tempo caratteristico del sistema

$$T = 1/\nu = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$$

l'unico **dimensionalmente** possibile

$$[\omega^{-1}] = [(m/k)^{0.5}] = [(M/(MT^{-2}))^{0.5}] = [T]$$



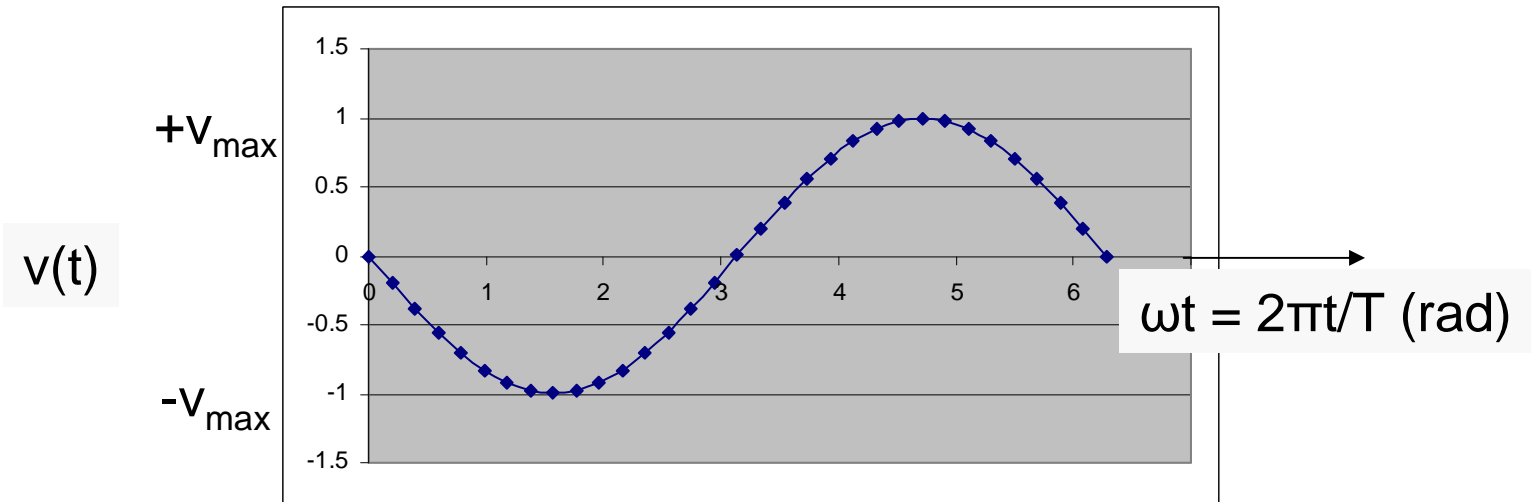
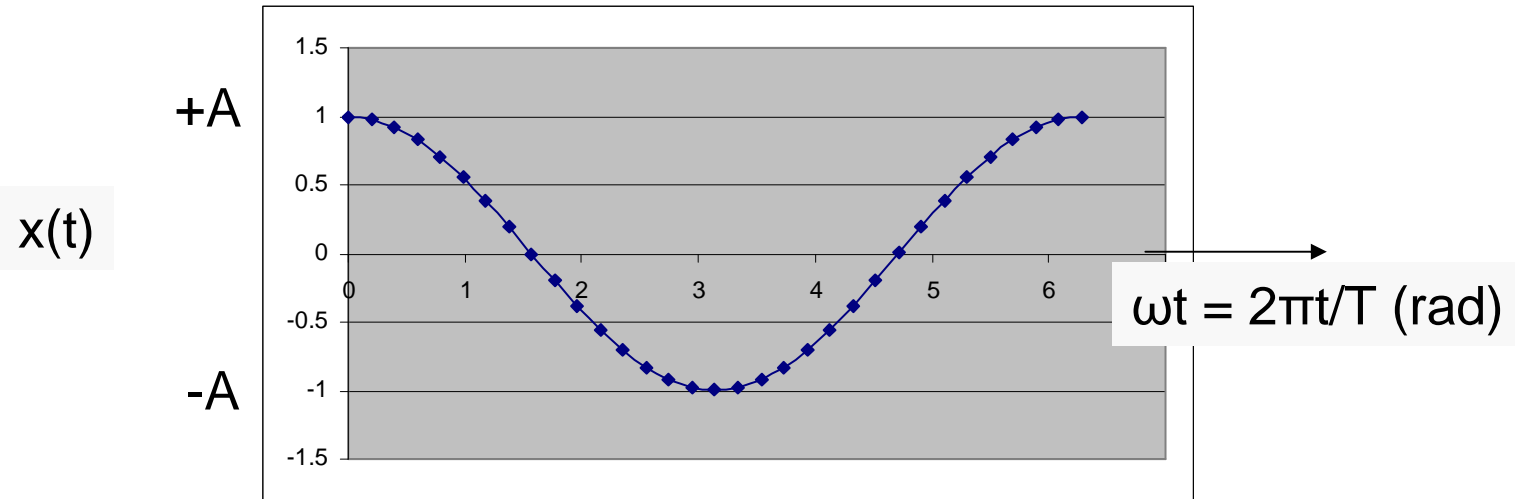
## Oscillazioni (cont.)

- tutte le oscillazioni si comporteranno allo stesso modo, cambia solo  $\omega$  ( $T$ ) a seconda del sistema e cambia lo spostamento dalla posiz. di equilibrio (distanza, angolo, carica)
- massa-molla  $\omega = \sqrt{k/m}$   $T = 2\pi\sqrt{m/k}$
- pendolo semplice  $\omega = \sqrt{g/L}$   $T = 2\pi\sqrt{L/g}$
- circuito LC  $\omega = 1/\sqrt{LC}$   $T = 2\pi\sqrt{LC}$
- etc.
- spostamenti, velocità (lineari, angolari, correnti), accelerazioni (lineari, angolari, deriv. della corrente) saranno dati da funzioni sinusoidali (moto armonico semplice di pulsazione  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ )

piccole  
oscillaz.



# Oscillazioni (cont)

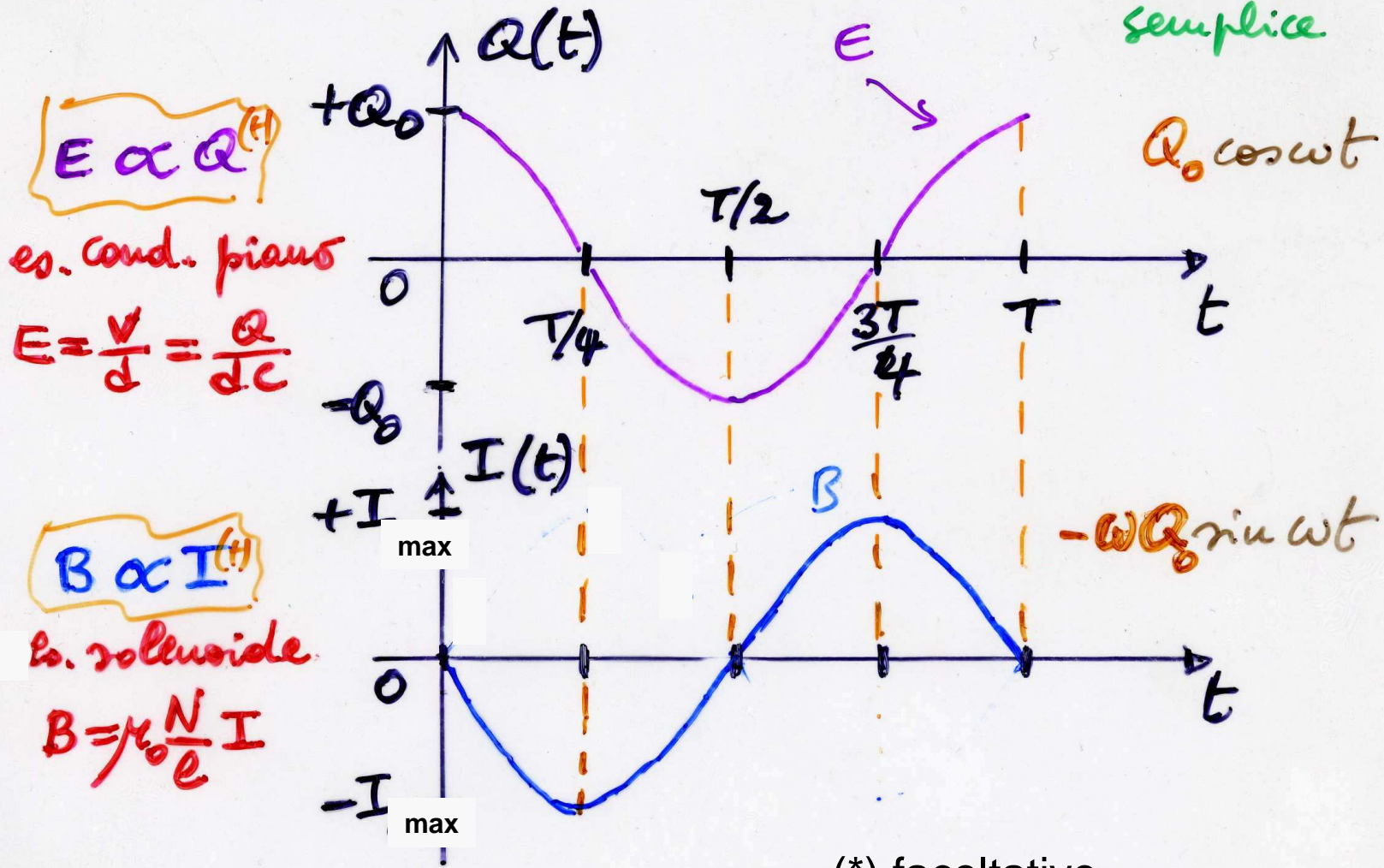




# Oscillazioni (cont.)(\*)

Circuiti LC - oscillazioni e.m.

moti  
armonici  
semplice



(\* ) facoltativo



# Pendolo semplice

- $mg \cos\theta = F$  *tensione del filo*
- $-mg \sin\theta = ma = mL\alpha$
- piccole oscill.:  $\theta_0$  piccolo  
 $\rightarrow \sin\theta \sim \theta$

- $-g\theta = L\alpha$  ( $= Ld^2\theta/dt^2$ )

$$\omega^2 = g/L$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

indipendenti da  $\theta_0$

$$g = 4\pi^2 L/T^2$$

misurando  $L, T \rightarrow g$

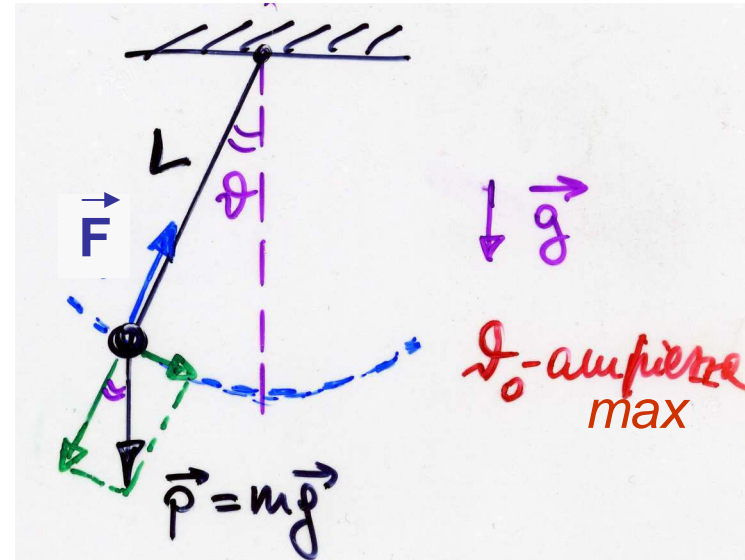
- (\*) [pendolo fisico:  $m \rightarrow I$ ;  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M} = L \wedge \mathbf{p}(mg)$

$$-mgL \sin\theta = I\alpha; \quad -mgL\theta = I\alpha; \quad T = 2\pi\sqrt{mgL/I}$$

con  $L$  distanza del baricentro dal centro di sospensione]

(\*) paragrafo facoltativo

FLN mag 10





## Angoli piccoli (\*)

$$\theta = 90^\circ = 1.5708 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 1$$

$$(\sin \theta - \theta) / \sin \theta = -0.57$$

$$\theta = 30^\circ = 0.5236 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 0.5$$

$$(\sin \theta - \theta) / \sin \theta = -0.047$$

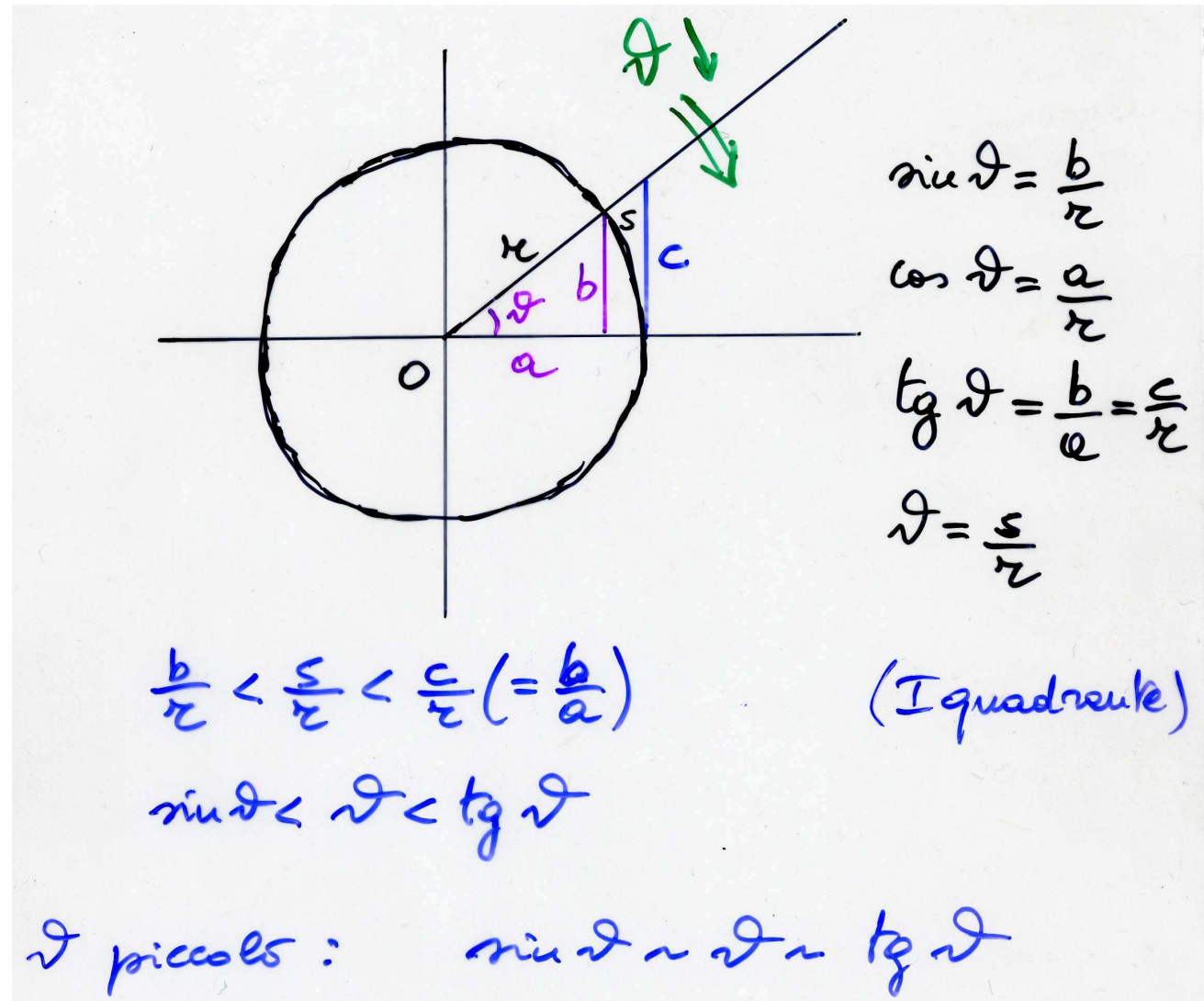
$$\theta = 3^\circ = 0.05236 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 0.05234$$

$$\text{tg} \theta = 0.05241$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \theta) / \sin \theta &= \\ &= -0.00046 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{tg} \theta - \theta) / \text{tg} \theta &= \\ &= +0.00091 \end{aligned}$$





## Oscillazione e.m., applicazione

---

- oscillazioni del circuito LC: **energia di  $\mathbf{E}$  confinata in C**  
 $\leftrightarrow$  **energia di  $\mathbf{B}$  confinata in L**
- supponiamo di avere una regione dello spazio vuota in cui è presente un campo  $\mathbf{E}$  (o  $\mathbf{B}$ ) oscillante, per le leggi dell'e.m. sarà indotto un campo  $\mathbf{B}$  (o  $\mathbf{E}$ ) oscillante
- qualitativamente, questi campi oscillanti generano onde e.m. che si propagano nello spazio con velocità  $c = 1/\sqrt{(\epsilon_0\mu_0)}$ , con la frequenza  $\nu$  dell'oscillazione, con lunghezza d'onda  $\lambda = c/\nu$  e con densità di energia (vedi p. 55-58)

$$\eta_e + \eta_m = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}B^2/\mu_0 = \text{cost}$$

(mentre le oscillazioni sono confinate in una regione dello spazio, quindi hanno solo frequenza  $\nu$ )



## Oscillazioni smorzate (\*)

- sistema massa-molla **con attrito**

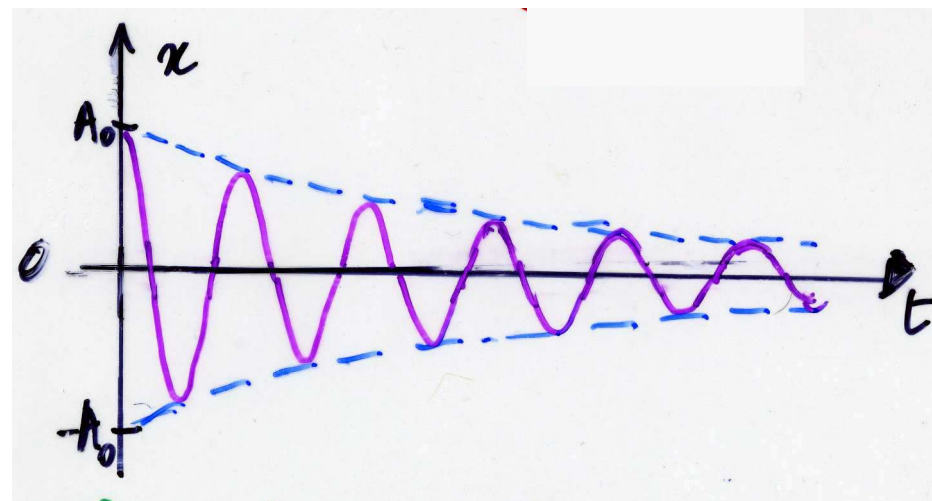
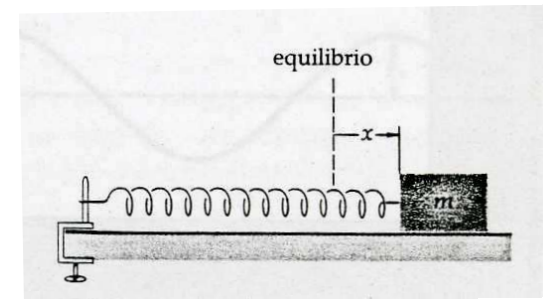
$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \quad \text{termine } \propto v, \text{ attrito, smorzamento}$$

- $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2(t) < \frac{1}{2}kA_0^2$

ad es.  $A(t) = A_0 \exp(-\gamma t / (2m))$

- se  $\gamma \geq 2\sqrt{km}$  il moto è aperiodico

se  $\gamma < 2\sqrt{km}$  oscillazione con  $A$  decrescente



(\*) facoltativo

FLN mag 10

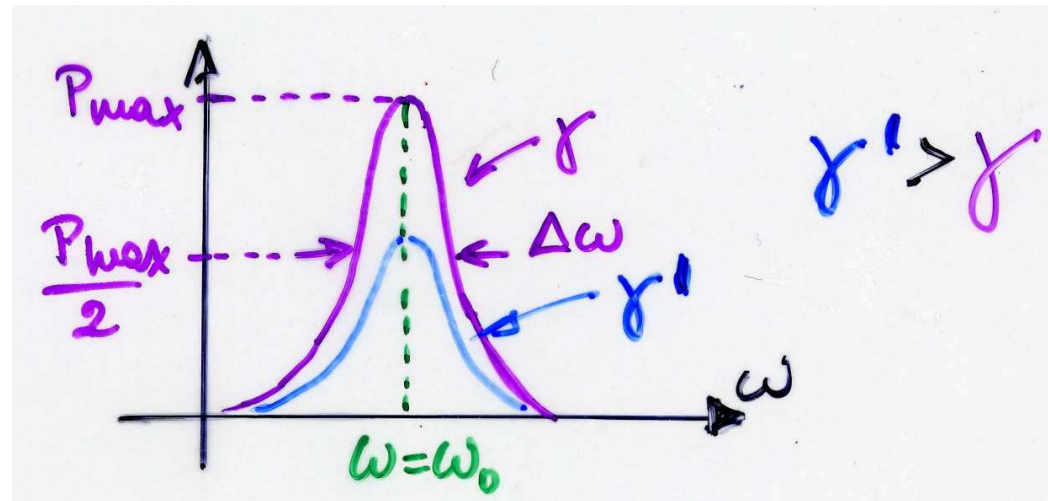
16





## Oscillazioni forzate, risonanza (\*)

- sistema sottoposto ad una  $F$  esterna sinusoidale  
 $ma + (\gamma v) + kx = F(t) = F_e \cos \omega t$   
 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$     $\nu_0 = \omega_0/2\pi$    **frequenza propria del sistema**
- se  $\gamma=0$  il trasferimento di energia diventa  $\infty$  per  $\omega=\omega_0$   
(in pratica si avrà una 'rottura')
- se  $\gamma \neq 0$  il trasferimento di energia (potenza) è max per  $\omega=\omega_0$  : es. assorb. di radiazione e.m. da parte di atomi e molecole



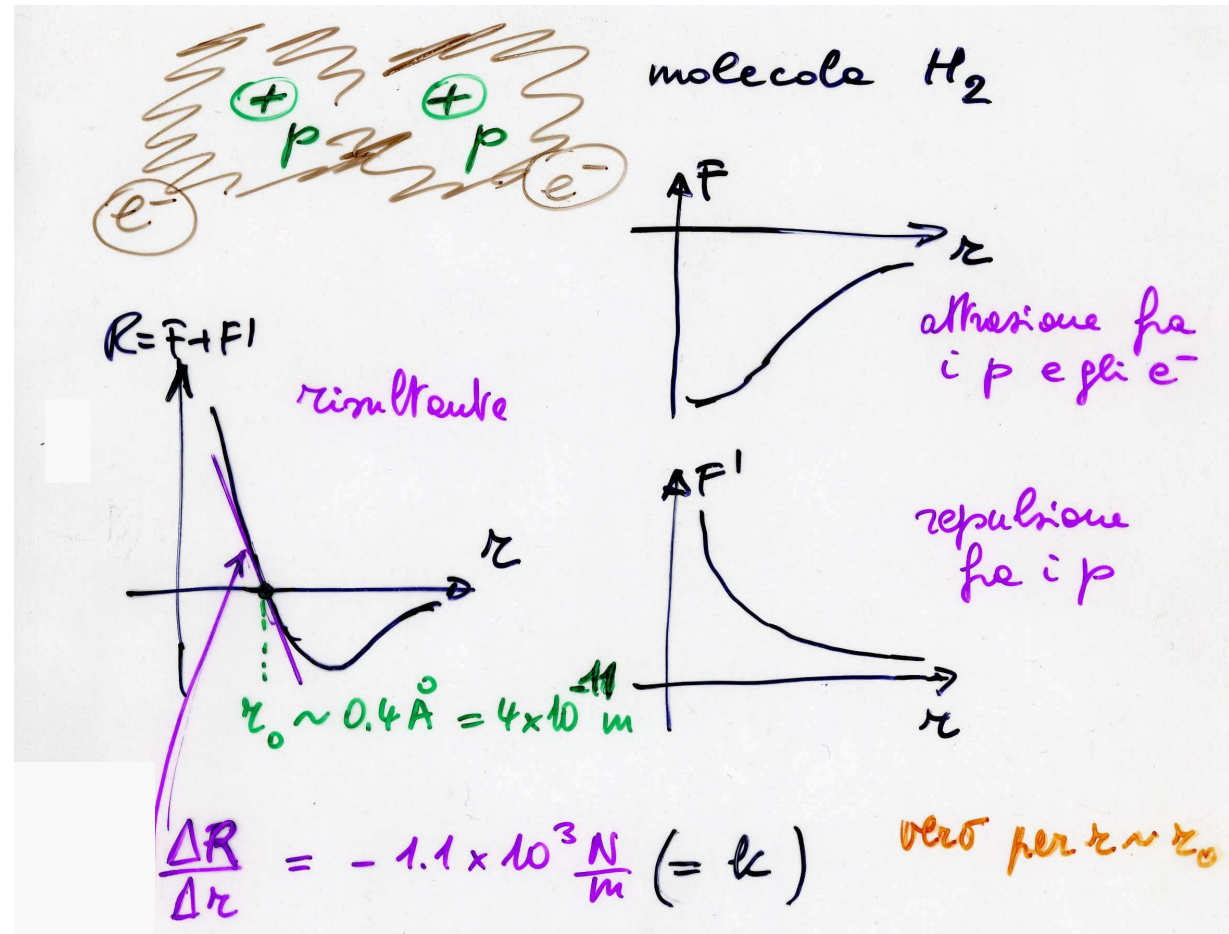
(\*) facoltativo



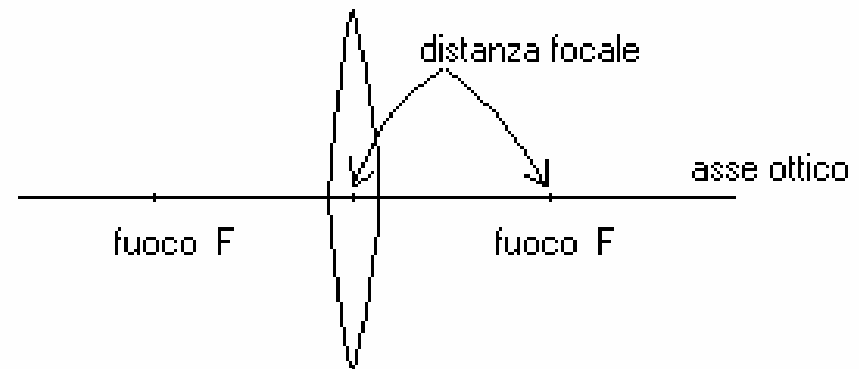
## Oscillazioni, applicazione (\*)

- molecola  $H_2$   $\omega = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{1.1 \cdot 10^{-3} / 1.67 \cdot 10^{-27}} \sim 0.8 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$   
 $\nu = 1.3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$   
 $\lambda = c/\nu = 2.5 \mu\text{m}$

→ se si eccita  $H_2$  con luce IR, si metterà ad oscill., assorbirà energia e posso 'vederlo'



(\*) facoltativo



## Ottica geometrica



# La luce

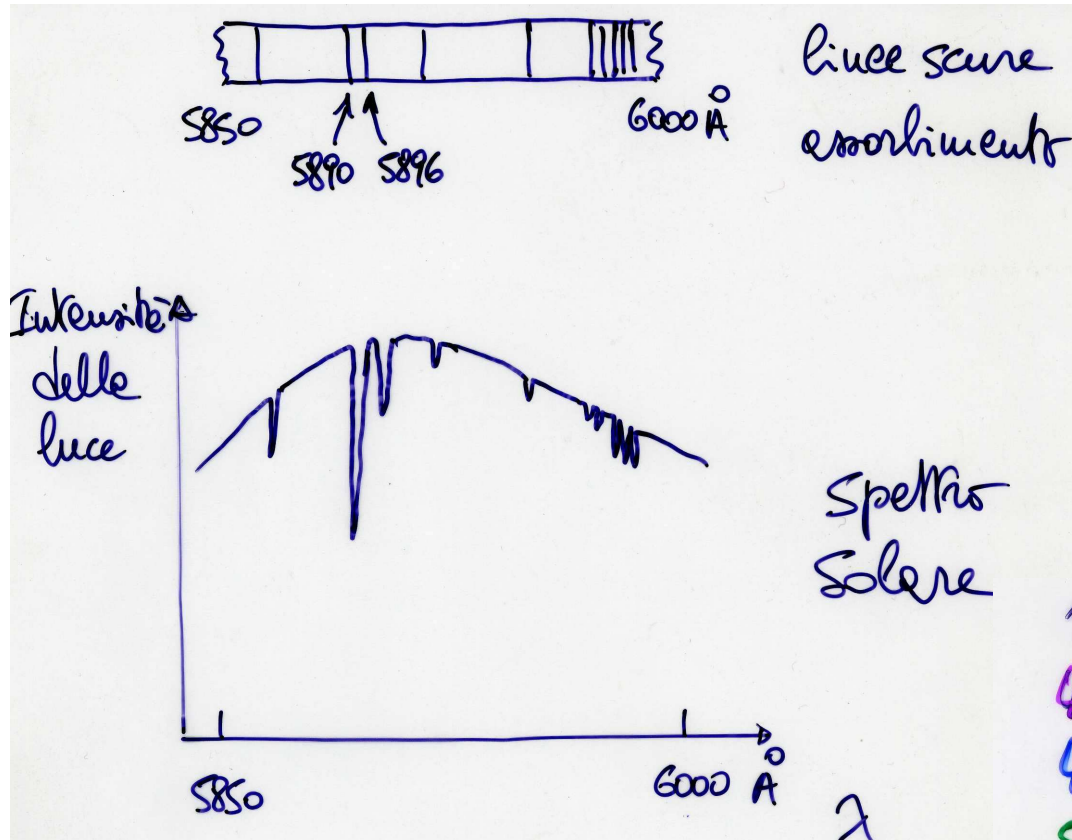
- onda e.m.  $v = \lambda \nu$
- ampiezza:  $\vec{E}$
- intensità:  $I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E^2$  \*
- velocità:  $c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  \*
- spettro e.m.
  - $\lambda \in (\sim 10^{-18} \div \sim 10^5) \text{ m}$  \*
  - $\nu \in (\sim 10^3 \div \sim 10^{26}) \text{ Hz}$
- visibile
  - $\lambda \in (0.4 \div 0.7) \times 10^{-6} \text{ m}$  \*
  - $\nu \in (4.3 \div 7.5) \times 10^{14} \text{ Hz}$

energia/(m<sup>2</sup>s)

\* nel vuoto



# Luce visibile

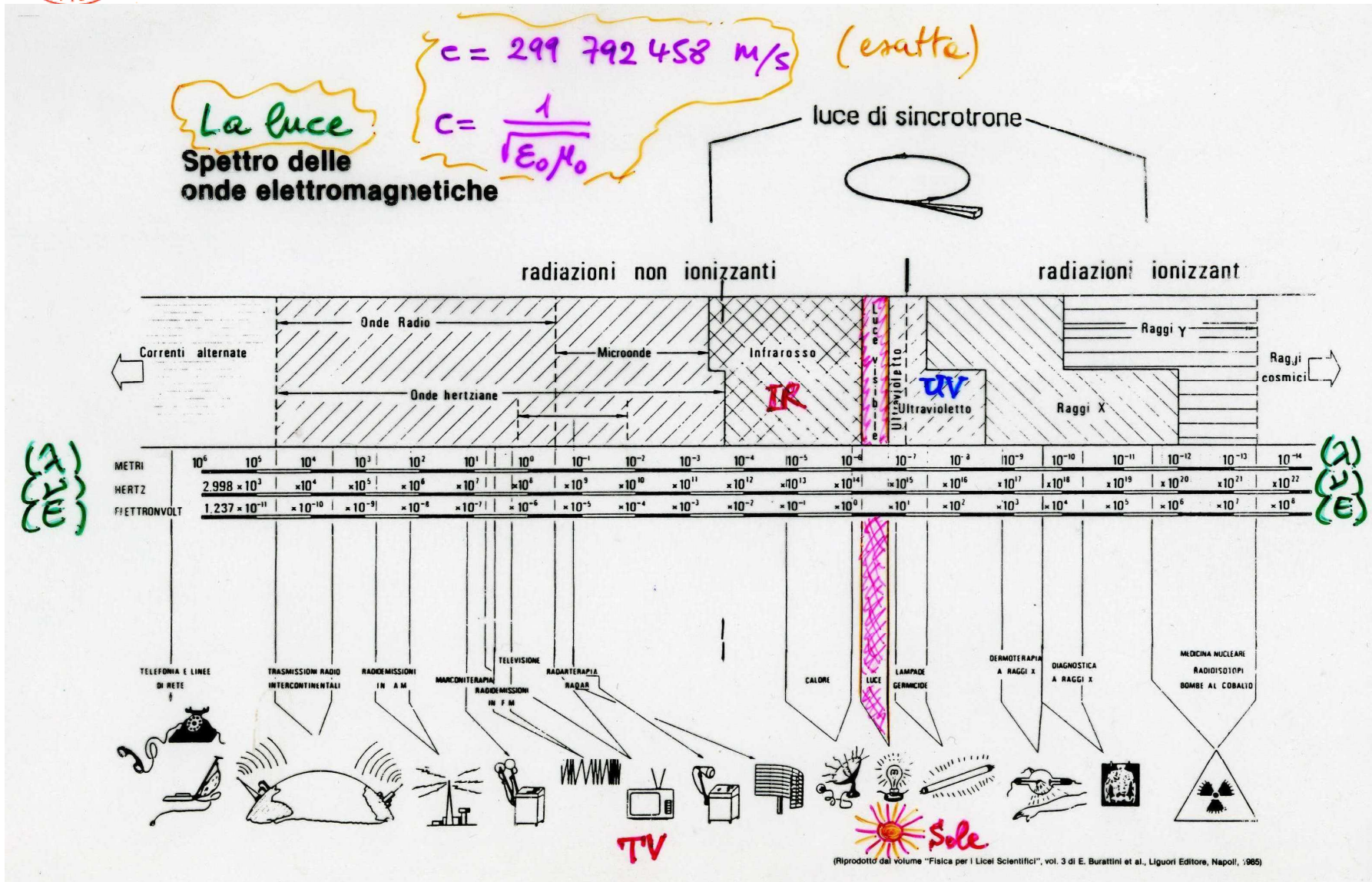


legge di Wien  
 $\lambda = 2.898 \text{ mm/T(K)}$   
 $T_{\text{sup. sole}} \approx 5000 \text{ K}$

$\lambda$ (nm)	colore
400-450	violetto
450-500	blu
500-550	verde
550-600	giallo
600-650	arancione
650-700	rosso



# Spettro delle onde e.m. (\*)





# Propagazione della luce

- nel vuoto (dalle eq. di Maxwell, e.m.), velocità dell'onda

$$c = 1/\sqrt{(\epsilon_0\mu_0)} = 299792458 \text{ m/s}$$

massima velocità di un segnale

- mezzi trasparenti omogenei e isotropi

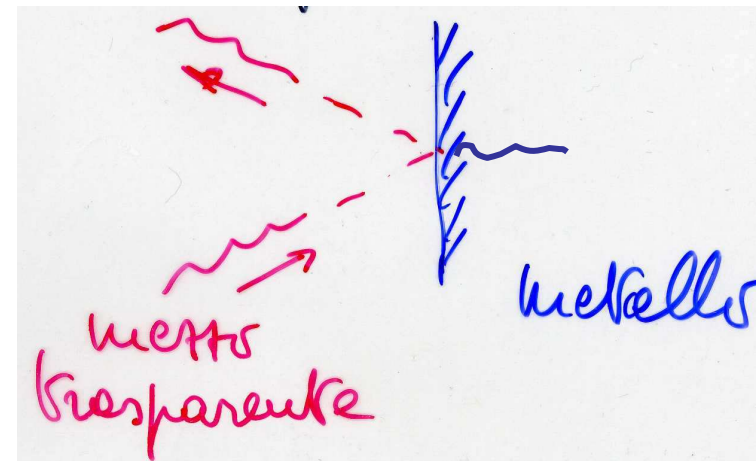
$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \epsilon_r > 1; \quad \mu \sim \mu_0$$

$$v = 1/\sqrt{(\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0)} = c/n \quad \rightarrow \quad n = \sqrt{\epsilon_r}$$

indice di rifrazione

$$n = c/v \quad n \geq 1$$

- mezzi assorbenti, metalli:  
sono parzialmente riflettenti  
(mentre parte dell'energia è  
assorbita entro  $1-2 \lambda$ )





## Condizioni dell'ottica geometrica

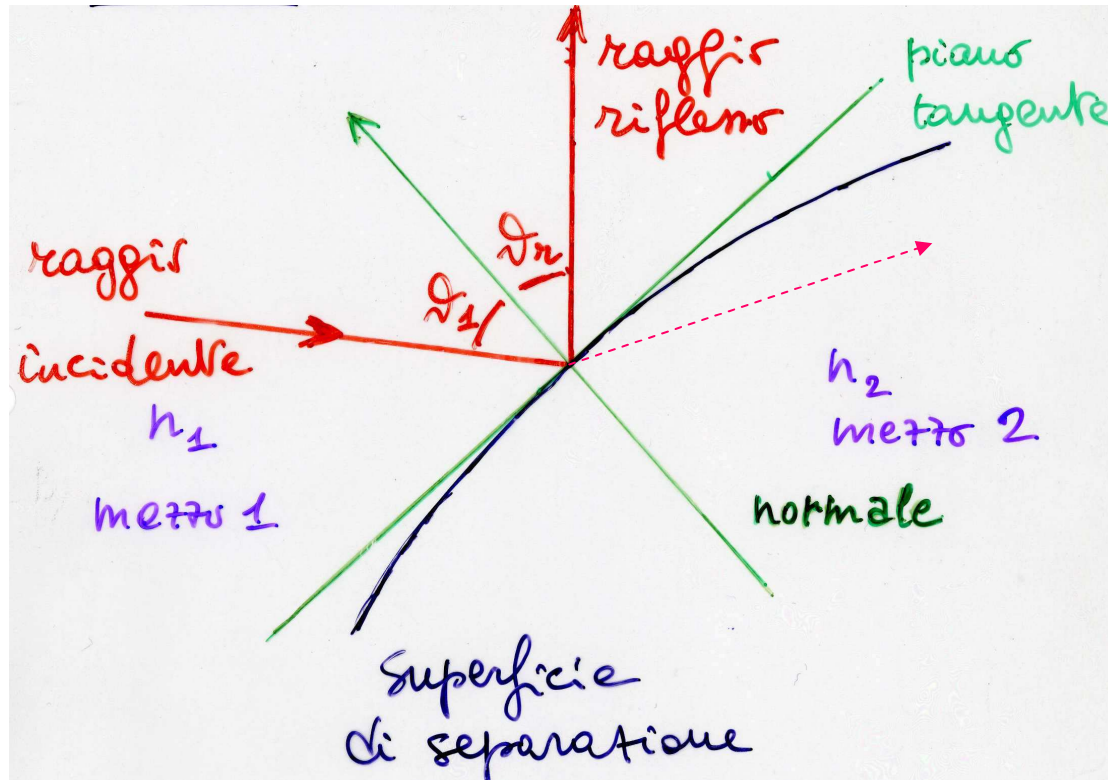
---

- limite per  $\lambda \rightarrow 0$  (dimensioni di ostacoli, disomogeneità etc.,  $d \gg \lambda$ )
- si considera la propagazione dei raggi luminosi
- nei mezzi trasparenti omogenei e isotropi la luce si propaga in linea retta
- i raggi luminosi sono deviati da ostacoli, disomogeneità etc.
  - riflessione al passaggio fra mezzi diversi
  - rifrazione al passaggio fra mezzi diversi





# Riflessione



- leggi della riflessione

- r. incidente, normale, r. riflesso  $\in$  stesso piano

- $\theta_r = \theta_1$

- $I_{\text{inc.}} = I_{\text{rifl.}} + I_{\text{trasm.}}$

(cons. dell'energia)



## Riflessione, potere riflettente

---

- $R = I_r/I_i \leq 1$     potere riflettente
- incidenza normale ( $\theta_1 = 0$ )
  - aria-metallo, specchi, R:  $\sim 0.9$ (Ag),  $\sim 0.8$ (Al),  $\sim 0.6$ (Fe)  
(da un mezzo trasparente ad uno assorbente)
  - mezzo trasparente 1 – mezzo trasparente 2

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left( \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2$$

ad es. aria-vetro, lenti:  $n_1 \sim 1$ ,  $n_2 \sim 1.5$ ,  $R \sim 0.04$  ( $\rightarrow$  la riflessione **non** è il fenomeno dominante)

- incidenza rasente ( $\theta_1 = 90^\circ$ )
  - $R = 1$



## Sistema ottico

---

- fa corrispondere un'immagine ad un oggetto oppure viceversa: si propagano i raggi luminosi, reversibili
- stigmatico: ad un punto oggetto corrisponde un solo punto immagine (punti coniugati)
- se il sistema è stigmatico, basta conoscere due raggi per trovare la corrispondenza (altri r. possono servire per verificare che la corrispondenza trovata è corretta)
- ad es. riflessione: specchio piano, specchio sferico etc.; rifrazione: lenti, microscopi etc.



# Specchio piano

costruzione dell'immagine: l'immagine è virtuale dritta, non vi passa energia

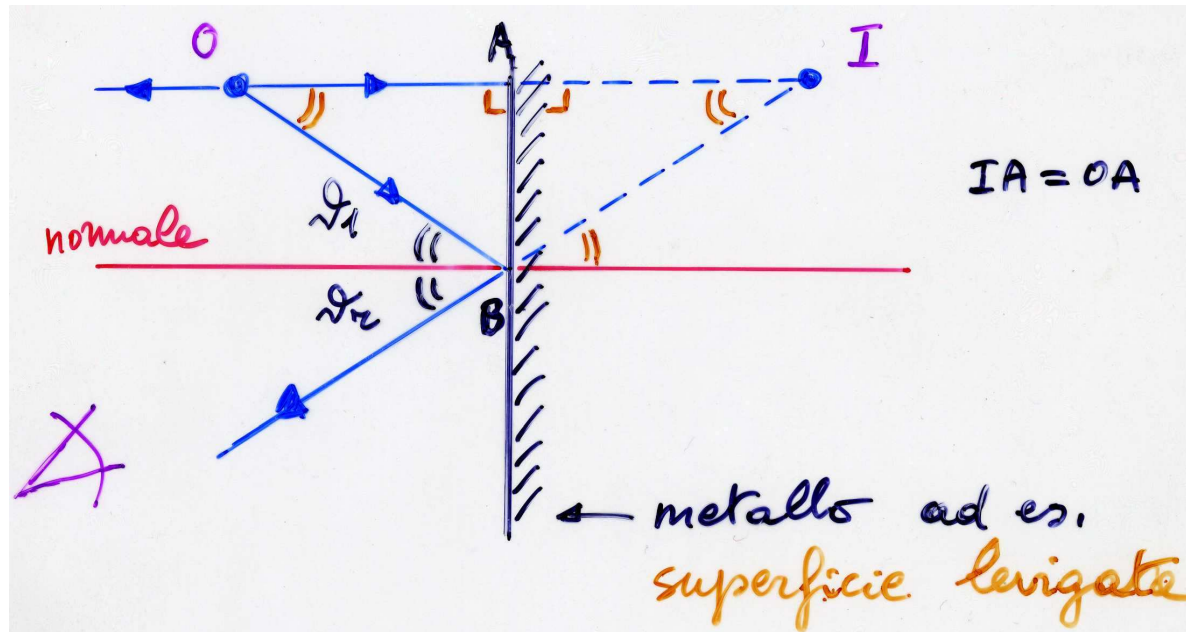
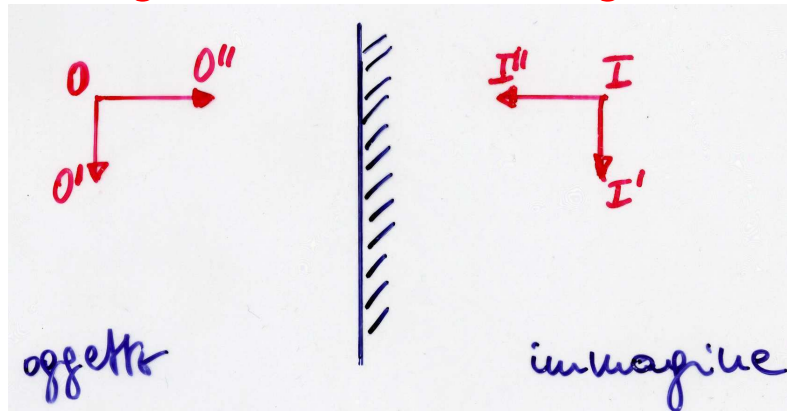


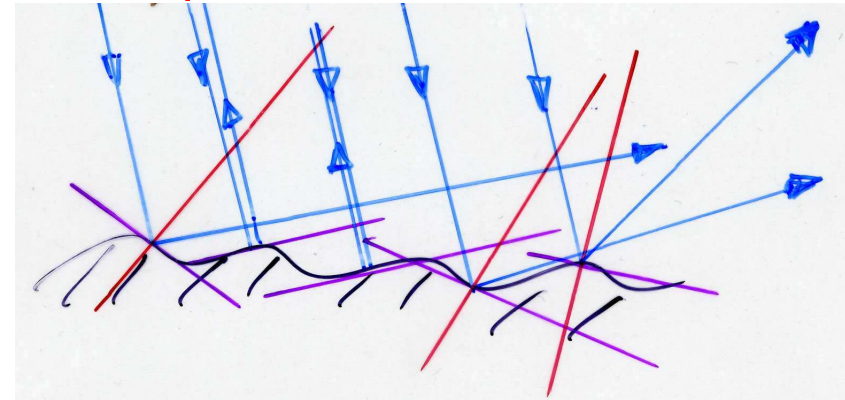
immagine trasversa e longitudinale



ingrandimento:  $+1(t)$ ,  $-1(l)$

FLN mag 10

superficie ruvida, diffusione





# Specchi sferici, fuoco (\*)

- C centro di curvatura, r raggio, V vertice
- CV asse ottico
- lo sp.sf. è stigmatico se la calotta in V è piccola,  $\theta$  piccolo
- $AD = CD$ ;  $AC = r$
- $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos\theta$

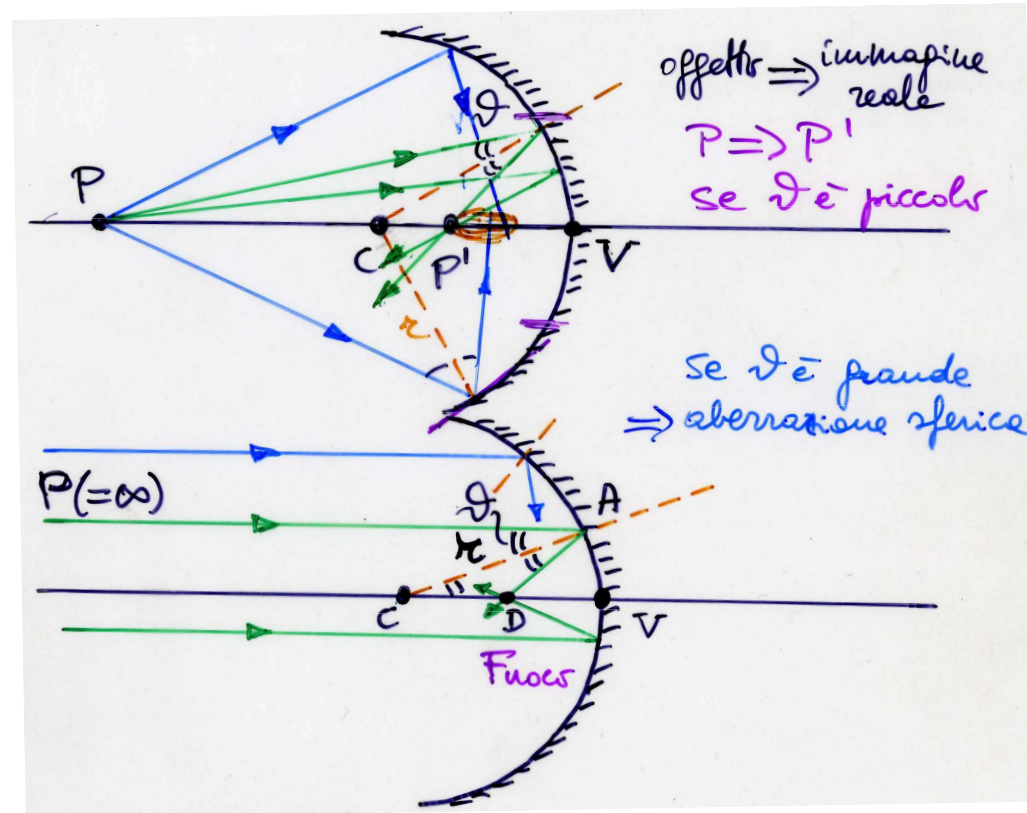
$$\cancel{CD}^2 = r^2 + \cancel{CD}^2 - 2r \cdot CD \cos\theta$$

$$CD = r / (2 \cos\theta)$$

se  $\theta \sim 0$ ,  $CD = DV = r/2$   $\Rightarrow$

$$f = r/2$$

fuoco, coniugato di  $P = \infty$



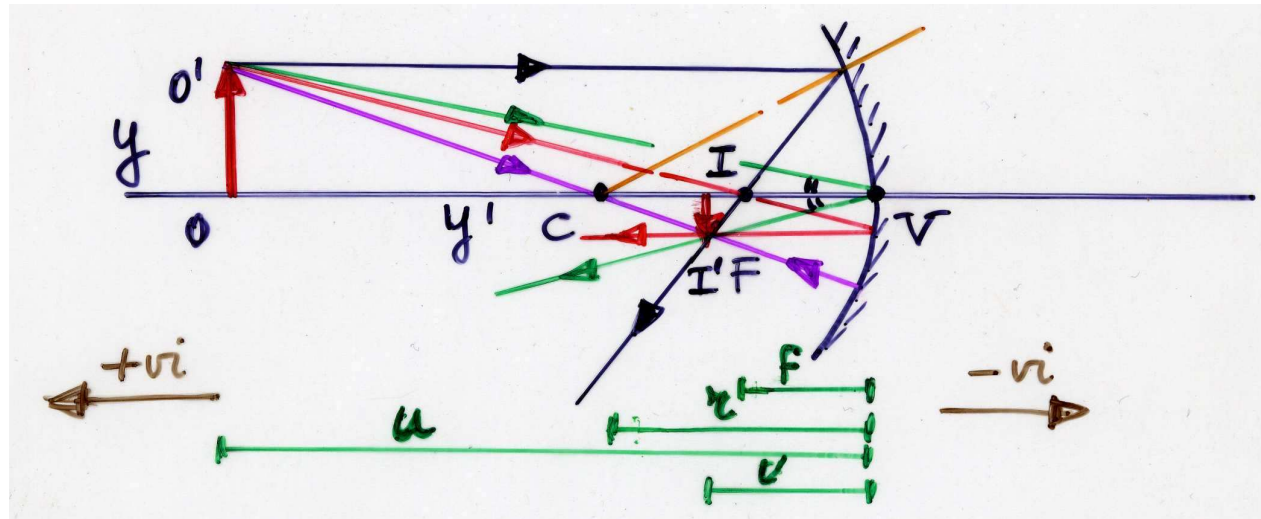
(\*) facoltativo

FLN mag 10

29



## Costruzione dell'immagine con lo specchio sferico(\*)



- raggio  $\parallel$  all'asse, si riflette passando per F
- passante per F, si riflette  $\parallel$  all'asse
- passante per C ( $\theta_1=0$ ), si riflette nella direz. d'incidenza
- passante per V:  $OO'V$  e  $II'V$  simili  $\rightarrow OO'/u = II'/v$

$$m = y'/y = -v/u$$

ingrandimento lineare trasversale

(\*) facoltativo

FLN mag 10

30



## Formula dei punti coniugati(\*)

- O e I, O' e I' p. coniugati

- OO'V e II'V simili:

$$OO'/II' = u/v$$

- OO'C e II'C simili

$$OO'/II' = (u-r)/(r-v)$$

$$\rightarrow u/v = (u-r)/(r-v)$$

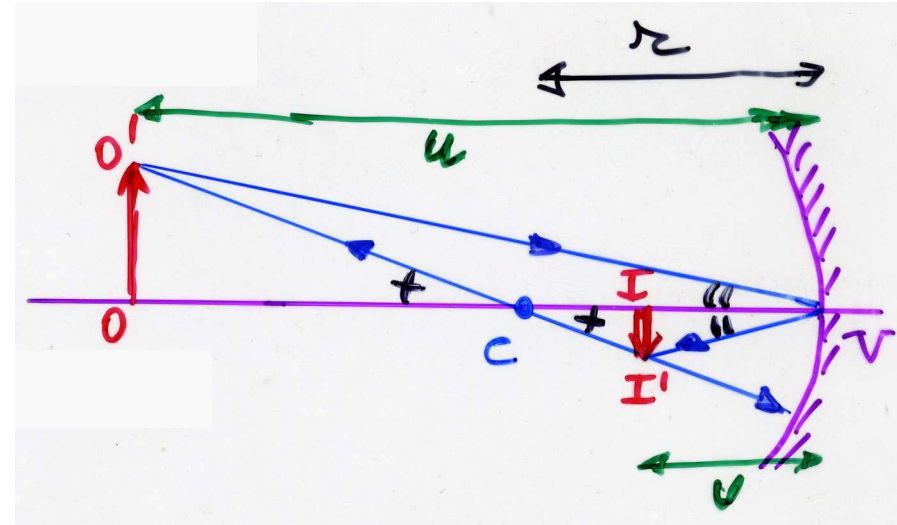
$$ru - uv = uv - rv$$

(moltiplico per  $1/(ruv)$  a dx e sx)

$$1/v - 1/r = 1/r - 1/u$$

$$1/u + 1/v = 2/r = 1/f$$

formula dei punti coniugati (degli specchi)



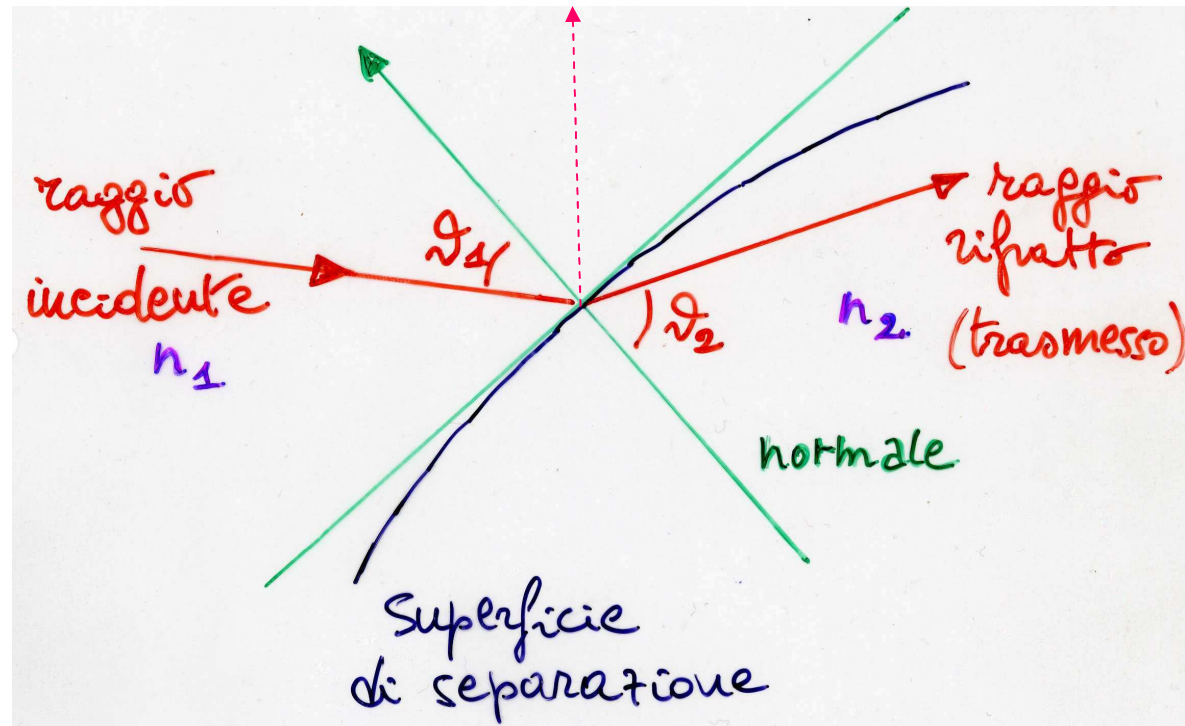
(\*) facoltativo

FLN mag 10

31



# Rifrazione



- leggi della rifrazione (trasmissione)
  - r. incidente, normale, r. rifratto (trasmesso)  $\in$  stesso piano
  - $\sin\theta_2 = (n_1/n_2)\sin\theta_1$  (legge di Snell)
  - $I_{\text{inc.}} = I_{\text{rifl.}} + I_{\text{trasm.}}$  (cons. dell'energia)





# Legge di Snell

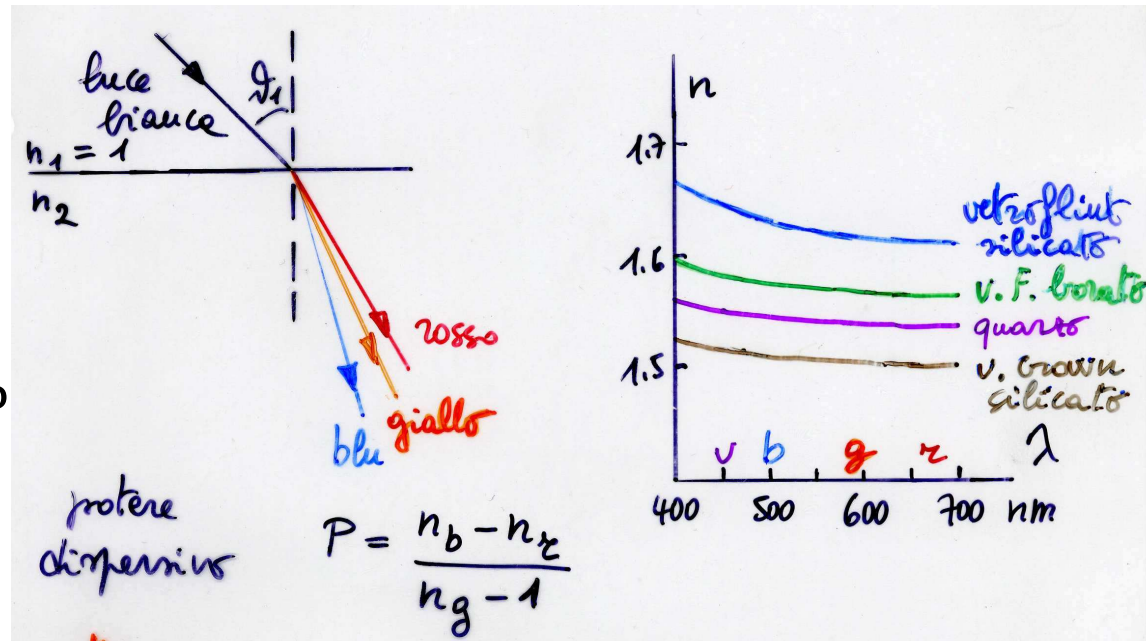


- $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$
- per angoli piccoli,  $\sin \theta \sim \theta \rightarrow n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$   
es. aria-vetro  $\theta_1 = 15^\circ$ ,  $n_{\text{aria}} = 1$ ,  $n_{\text{vetro}} = 1.52$   
 $\sin \theta_1 / \sin \theta_2 = 1.52$ ;  $\theta_1 / \theta_2 = 1.53$ ;  $\Delta = 7\%$
- anche  $\sin \theta_1 / v_1 = \sin \theta_2 / v_2$  oppure  $\sin \theta_1 / \lambda_1 = \sin \theta_2 / \lambda_2$
- dispersione,  $n = n(\lambda)$

potere dispersivo

$$P \sim 0.009 / 0.5 = 1.8\%$$

(vedi pag. 51)





## Legge di Snell (2)

---

- $n_1 < n_2$  (da un mezzo otticamente meno denso ad uno più denso)

$$\sin\theta_2 = (n_1/n_2)\sin\theta_1 < \sin\theta_1 \rightarrow \theta_2 < \theta_1$$

il raggio rifratto si avvicina alla normale

es. H<sub>2</sub>O-vetro  $n_1 = 1.33$   $n_2 = 1.52$ ,  $\sin\theta_2 = 0.875 \sin\theta_1$

→ se  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 25.9^\circ$

- $n_2 < n_1$  (da un mezzo otticamente più denso ad uno meno denso)

$$\sin\theta_2 = (n_1/n_2)\sin\theta_1 > \sin\theta_1 \rightarrow \theta_2 > \theta_1$$

il raggio rifratto si allontana dalla normale

es. H<sub>2</sub>O-vetro  $n_1 = 1.52$   $n_2 = 1.33$ ,  $\sin\theta_2 = 1.14 \sin\theta_1$

→ se  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 34.8^\circ$



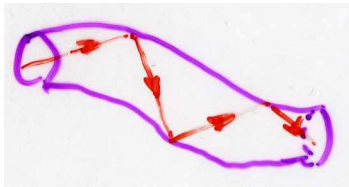
# Riflessione totale

- $n_1 > n_2$ : se aumento  $\theta_1$  aumenta anche  $\theta_2$  ... fino a che è possibile, si arriva a  $\theta_2 = \pi/2$  e allora non ci sarà più rifrazione, ma solo riflessione (riflessione totale); l'angolo  $\theta_1$  corrispondente si chiama angolo limite

$$\sin\theta_{1\text{lim}} = (n_2/n_1)\sin(\pi/2)$$

$$\theta_{1\text{lim}} = \arcsin(n_2/n_1)$$

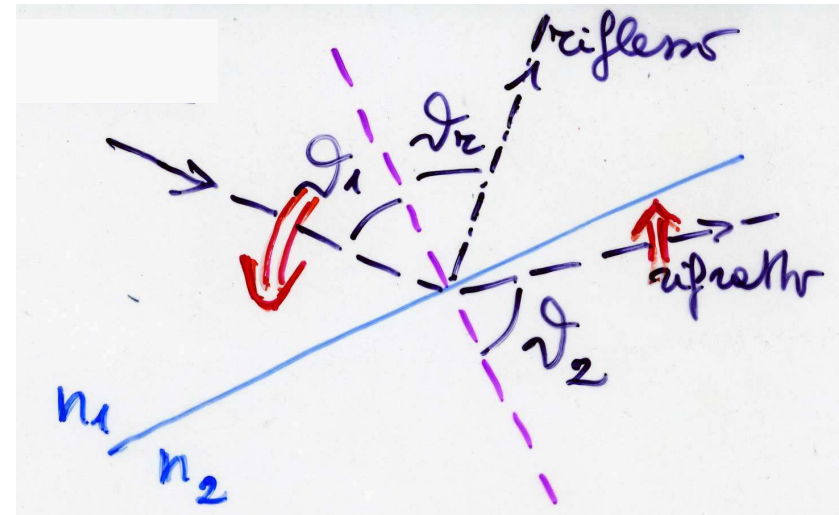
- per  $\theta_1 > \theta_{1\text{lim}}$  si ha riflessione totale, potere riflettente  $R=1$  (guide di luce, fibre ottiche: comunicazioni, endoscopia)



- es. vetro-aria

$$n_1 = 1.52; \quad n_2 = 1$$

$$\theta_{1\text{lim}} = \arcsin(1/1.52) = 41.1^\circ$$

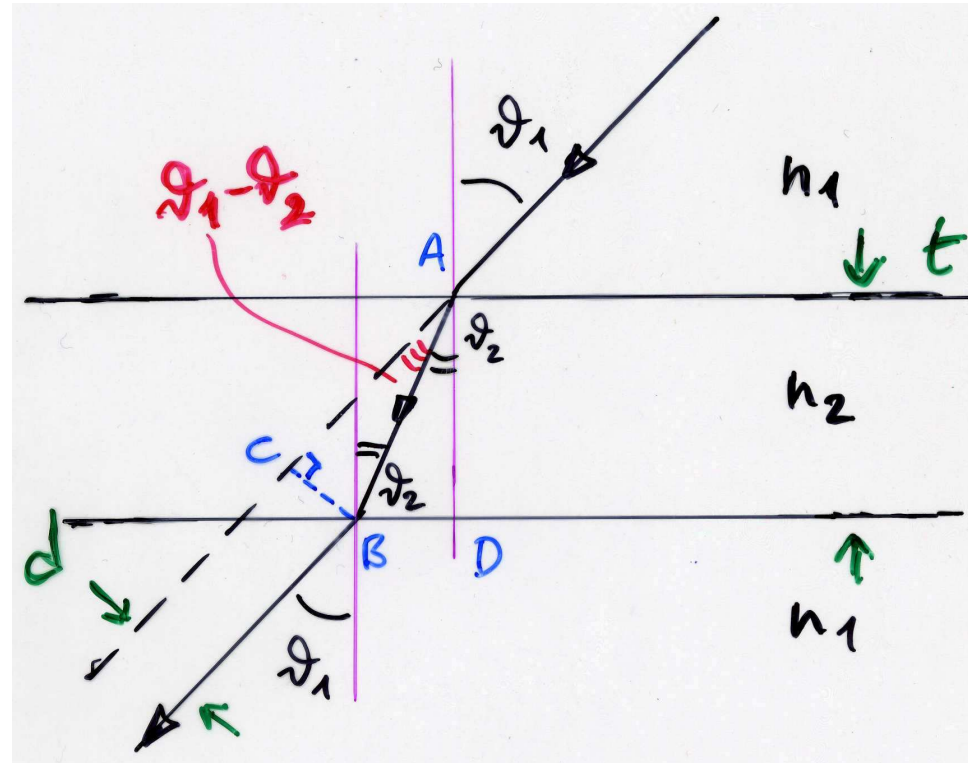




## Passaggio attraverso una lastra piano-parallela (\*)

$$AB = t / \cos\theta_2$$

$$CB = AB \sin\widehat{CAB}$$



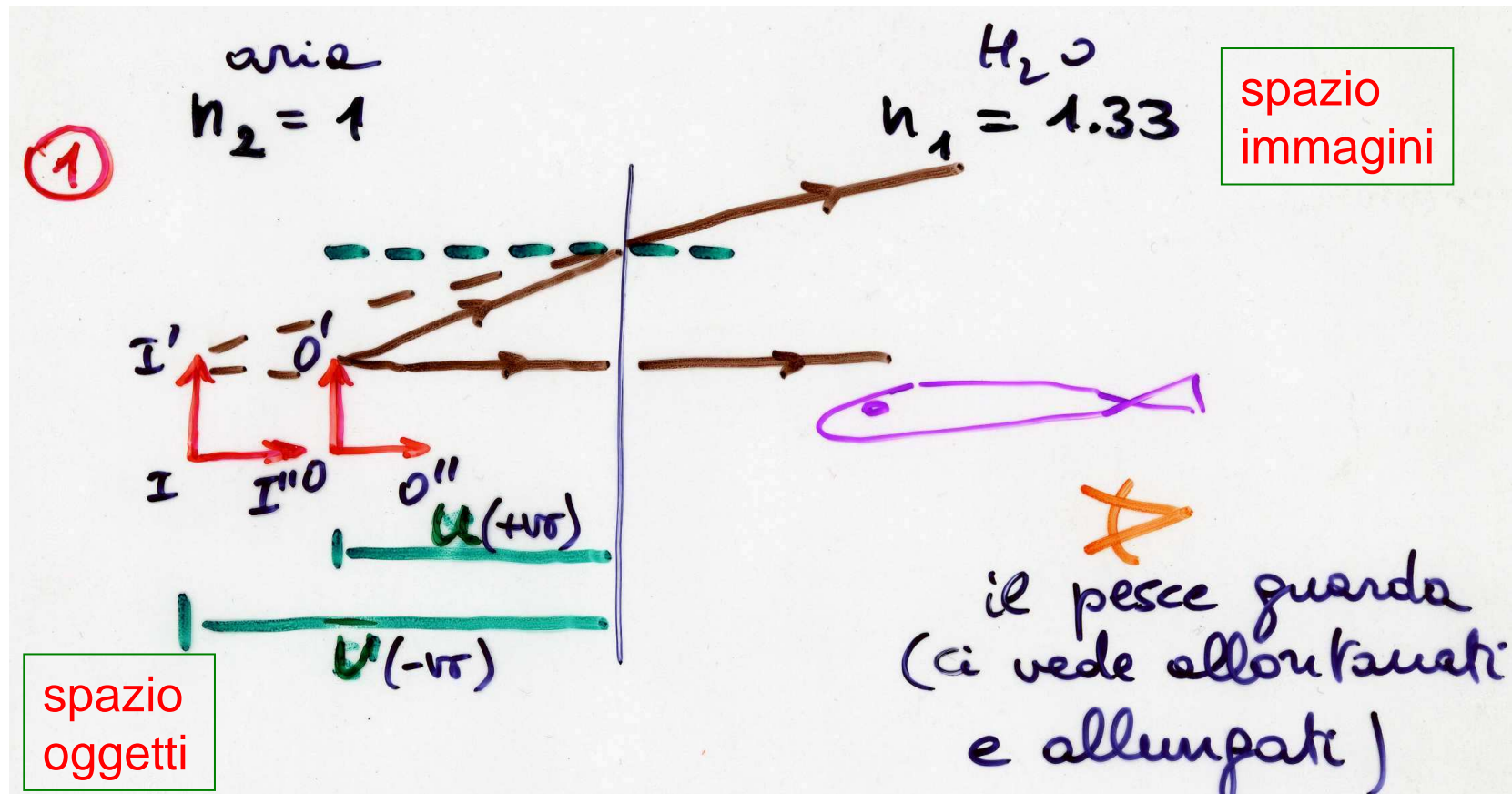
- lastra trasparente di spessore  $t = AD$ , spostamento  $d = CB$ 
  - 1a rifrazione  $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$
  - 2a rifrazione  $n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$
- $d = t \sin(\theta_1 - \theta_2) / \cos\theta_2$

(\*) facoltativo



# Diottri piani

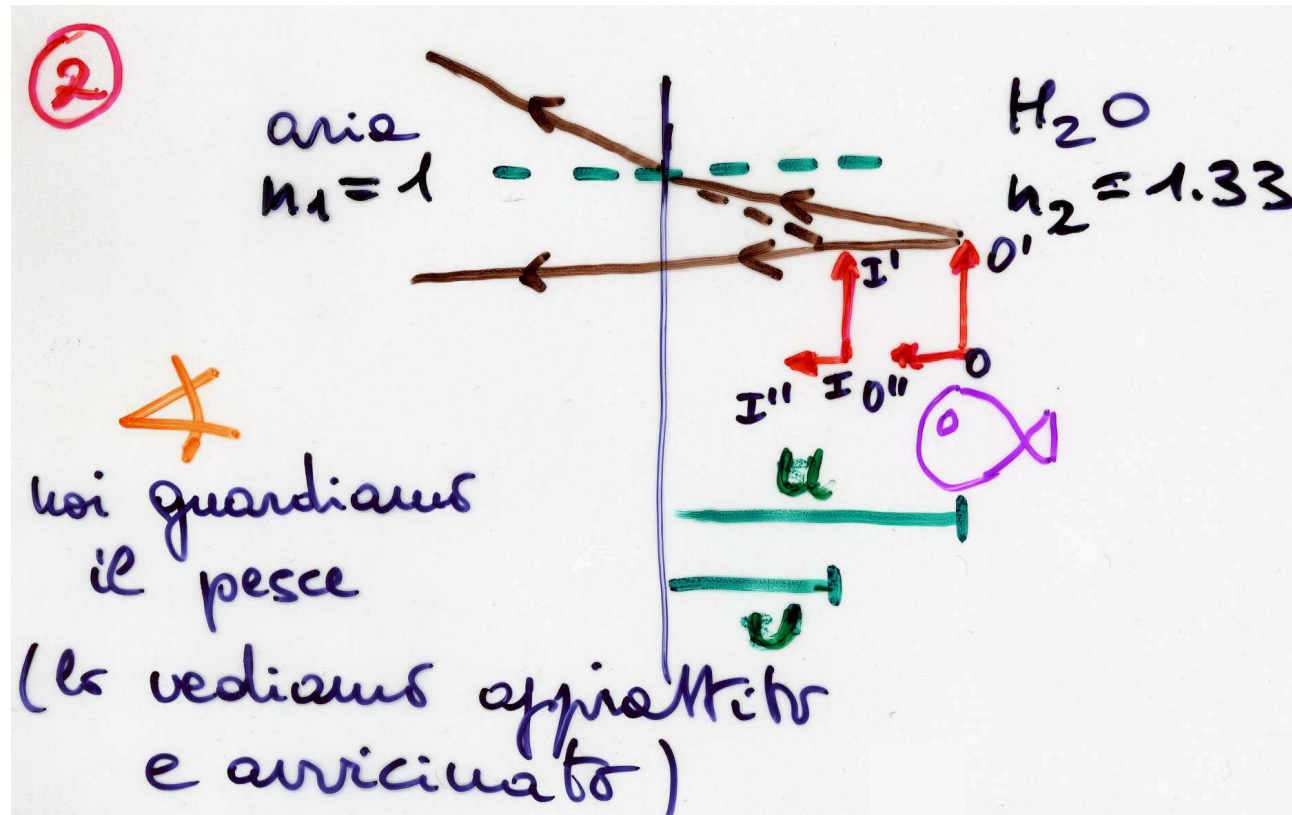
- un diottro piano è formato da due mezzi trasparenti separati da una superficie piana (u e v sono +vi nei rispettivi spazi)



- $m_{\text{trasv}} = +1$ , **immagine virtuale dritta**;  $m_{\text{longit}} = -v/u = +n_1/n_2$



## Diottri piani (2)



- $m_{\text{trasv}} = +1$ , **immagine virtuale dritta**;  $m_{\text{longit}} = -v/u = +n_1/n_2$

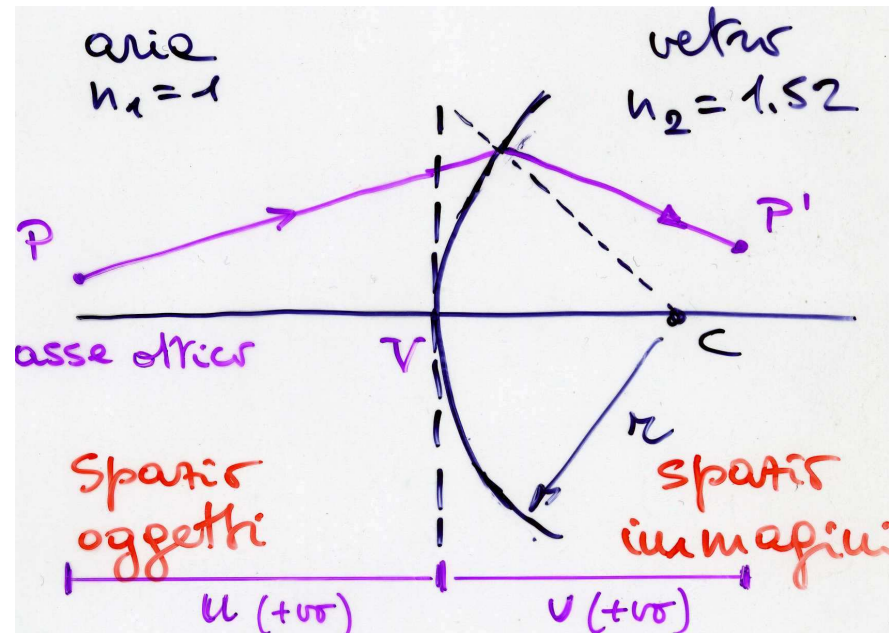
1  $n_2/u + n_1/v = 0$ ;

2  $n_2/u + n_1/v = 0$



# Diottri sferici e lenti

diottro  
sferico



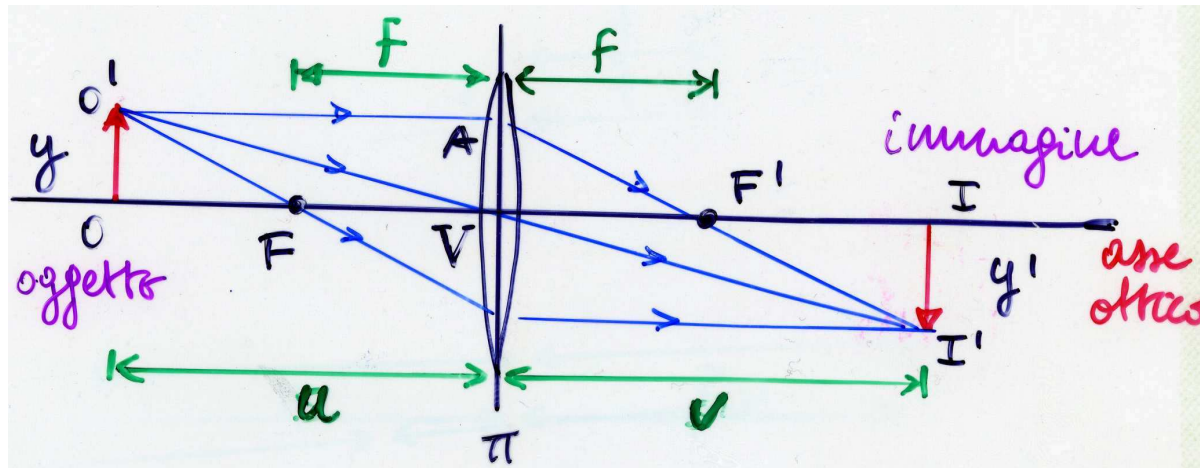
o altro materiale  
trasparente

- **diottro**: due mater. traspar. separati da una superf. sferica
- **lente**: due diottri, di cui almeno uno sferico; i raggi che la attraversano subiscono una doppia rifrazione
- (i diottri e) le lenti, se valgono le approssimazioni (di Gauss)
  - 1) onde monocromatiche
  - 2) piccola apertura
  - 3) raggi parassiali,sono un sistema stigmatico (punto oggetto  $\longleftrightarrow$  punto immagine) – altrimenti: aberrazioni



# Lenti sottili

- **lente sottile**: spessore trascurabile, al limite un piano ( $\pi$ )



$u$  ( $v$ ) – posizione dell'oggetto (immagine)

l'asse ottico congiunge  $FF'$  (o i centri di curvatura)

- $OO'V$  e  $II'V$  simili:  $OO'/II' = u/v$
- $AVF'$  e  $II'F'$  simili:  $OO'/II' = f/(v-f)$
- $u/v = f/(v-f) \rightarrow uv - uf = fv$  [moltiplico per  $1/(uvf)$  a dx e sx]
- $1/u + 1/v = 1/f$

formula dei punti coniugati (delle lenti),  $f$  distanza focale





## Lenti sottili (2)

---

- una lente ha due fuochi,  $F$  e  $F'$ , equidistanti da  $V$ , punti coniugati dei punti all' $\infty$  ( $1/v = 1/f - 1/\infty = 1/f$  etc.)
- considerando la lente costituita da due diottri sferici, di raggio di curvatura  $r_1$  e  $r_2$ , si può mostrare che
$$1/f = (n-1)(1/r_1 + 1/r_2)$$
con  $n$  indice di rifrazione del materiale della lente (immersa in aria), tipicamente  $\sim 1.5$  (vetro, plastica); [cfr con lo specchio sferico:  $1/f = 2/r$ ]
- **lente convergente**: più spessa al centro,  $f$  +va  
**lente divergente**: più spessa ai bordi,  $f$  -va
- l'inverso di  $f$  (in m) si chiama potere diottrico  $P = 1/f$  della lente e si misura in diottrie (D)



## Lenti sottili (3) (\*)

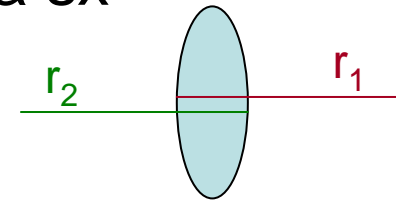
- risolviamo per  $f$  la formula dei costruttori di lenti (col mcm)

$$1/f = (n-1) [r_2+r_1]/(r_1r_2) \Rightarrow \boxed{(n-1)f = r_1r_2/(r_2+r_1)}$$

- **lente di vetro in aria:  $n-1 \approx 0.5$  +vo; oggetto a sx**

- **lente convessa-convessa  $r_1$  +vo  $r_2$  +vo**

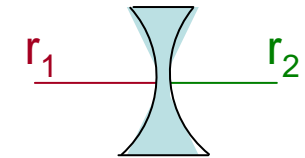
□  $f$  +vo sempre; lente convergente



- **lente concava-concava  $r_1$  -vo  $r_2$  -vo**

□  $f$  -vo sempre: numer. +vo, denom. -vo;

**lente divergente**

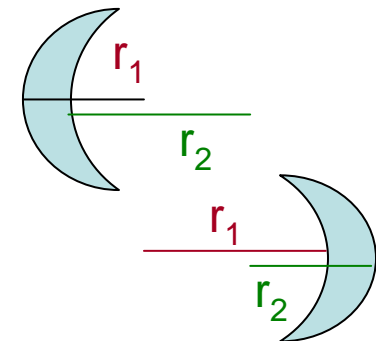


- **lente convessa-concava  $r_1$  +vo  $r_2$  -vo**

□  $f$  +vo (-vo) se  $|r_2| > |r_1|$  ( $< |r_1|$ )

- **lente concava-convessa  $r_1$  +vo  $r_2$  -vo**

□  $f$  -vo (+vo) se  $|r_2| > |r_1|$  ( $< |r_1|$ )

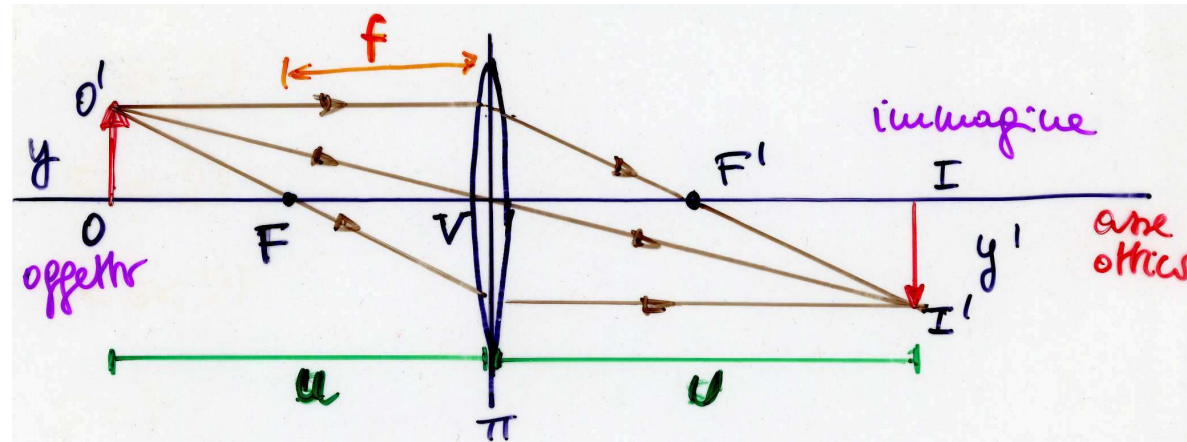


- **lente di aria in vetro:  $1-n \approx -0.5$  -vo ... e cambiano i segni!**

(\*) facoltativo, ma da meditare FLN mag 10



# Costruzione dell'immagine



rapp. utili

(verifica: analitica, eq. punti coniugati)

- // all'asse, passa per  $F'$
- per il vertice, continua (quasi) diritto [comunque // , vedi pag. 36]
- per  $F$ , esce // all'asse

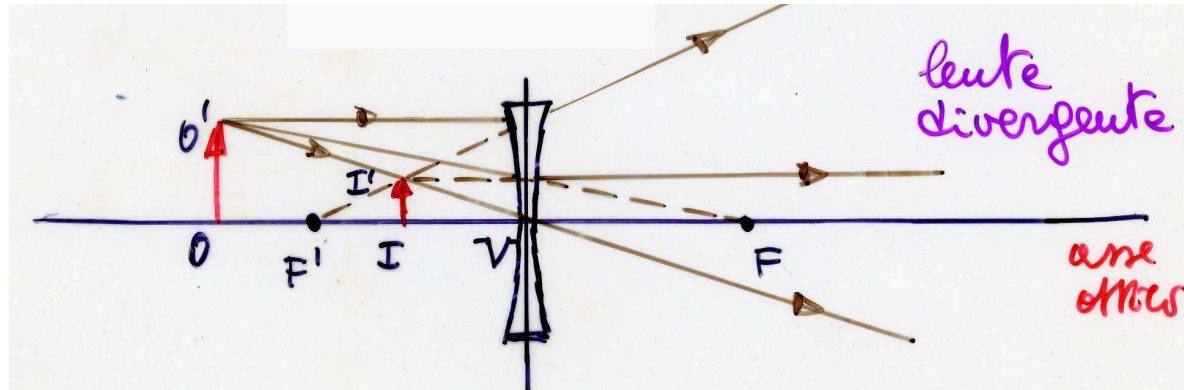
- ingrandimento lineare trasverso

$OO'V$  simile a  $II'V$

$$m = y'/y = -v/u = - (v-f)/f = -f/(u-f)$$



# Lente divergente

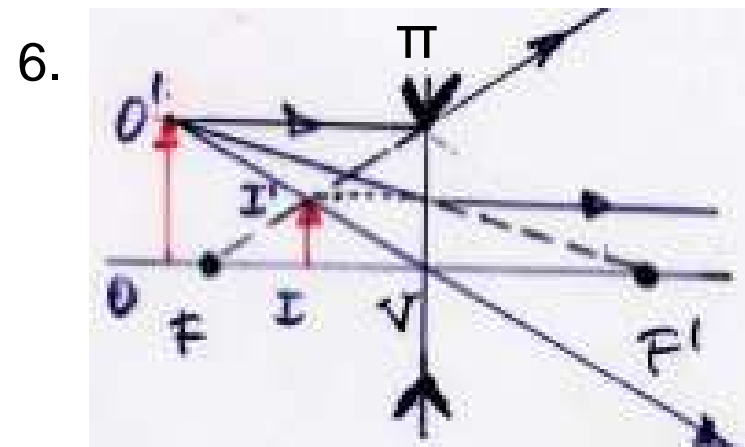
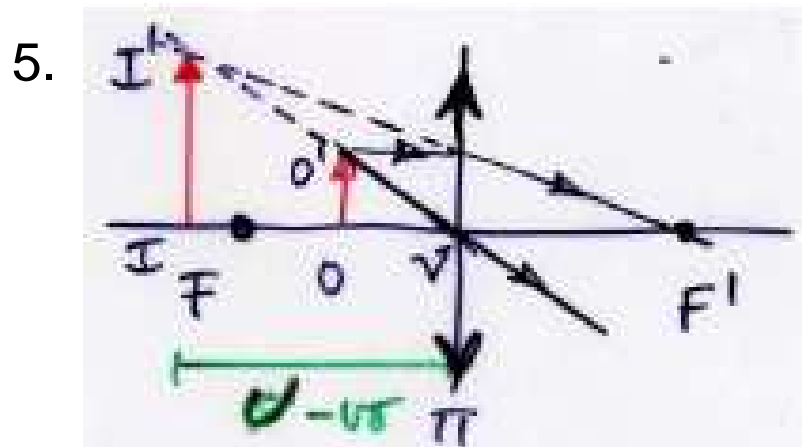


- **lente divergente, più spessa ai bordi** (ad es. se i due diottri sono concavi): raggi da  $P=\infty$ , dopo la doppia rifrazione, provengono da  $F'$  (quelli da  $P'=\infty$ , da  $F$ ); se si usa la formula di pag. 41-42,  **$f$  risulta  $-va$  (sia  $r_1$  che  $r_2$  sono  $-vi$ )**
- il terzo raggio utile passa per  $V$  ed esce parallelo a se stesso (estrapolato all'indietro è sempre nella stessa direzione)
- l'immagine è sempre virtuale, dritta, rimpicciolita: **risolvendo per  $v$  l'eq. dei punti coniugati  $1/v = 1/f - 1/u = (u-f)/(uf)$  si ha  $v = uf / (u-f)$  sempre  $-va$ , visto che  $u$  è  $+va$  e  $f$   $-va$**



# Lenti sottili, posizione e tipi di immagine

- eq. dei punti coniugati:  $v = uf/(u-f)$ ;  $m = -v/u$ 
  1.  $u > 2f$      $f < v < 2f$     reale, invertita, rimpicciolita
  2.  $u = 2f$      $v = 2f$     “    “    unitaria
  3.  $f < u < 2f$      $v > 2f$     “    “    ingrandita
  4.  $u = f$      $v = \infty$     “    “    “
  5.  $u < f$      $v -va$     virtuale, diritta    “
  6. diverg.     $v -va$     “    “    rimpicciolita

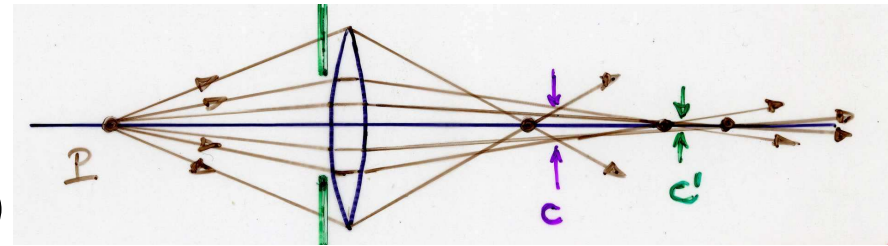




# Aberrazioni delle lenti

- aberrazione sferica (simile agli specchi): oggetto sull'asse

- diaframma, però si riduce la luce
- C, C' cerchi di minima confusione
- oppure sup. non sferiche (parabol.)

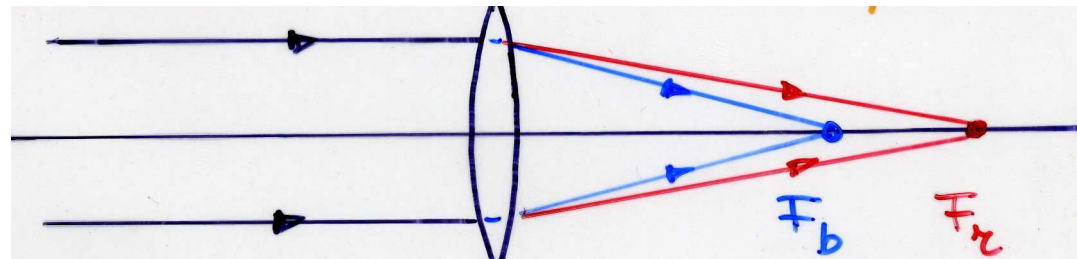


- altri effetti geometrici

- coma/astigmatismo: oggetto poco/molto fuori asse
- distorsione: l'ingrandimento varia con la distanza dall'asse

- aberrazione cromatica, dispersione (assente negli specchi)

- combinazioni di lenti con dispersione diversa



vetro crown K3:

$$n_{\text{blu}} = 1.525$$

$$n_{\text{rosso}} = 1.516$$

FLN mag 10



# L'occhio

- retina - visione b/n, bastoncelli: pixel  $1 \times 1 \mu\text{m}^2$  (a colori, coni  $4 \times 4 \mu\text{m}^2$ )

diaframma

crystallino & iride

lente adattabile

retine

$P = \infty$

$F$

2.5cm

lente aggiustabile  
diaframma

a riposo

$f \sim 2.5\text{cm}$

$u$

$v$

$P$

$P'$

$F'$

2.5cm

$f$

(minimo) distanza di  
visione distinta

punto prossimo

$d = 25\text{cm}$

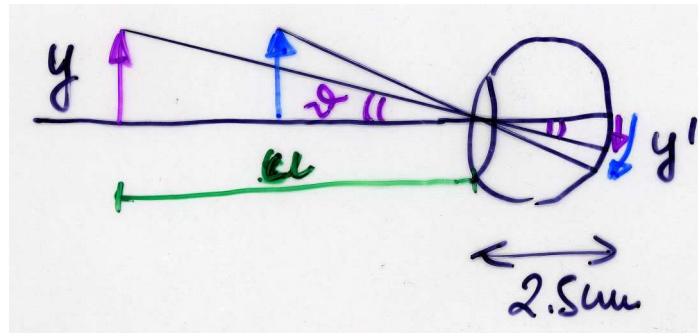
$f' = \frac{uv}{u+v} = 2.27\text{cm}$

$u = d, v = 2.5\text{cm}$



## L'occhio (2)

- grandezza apparente di un oggetto



- $y'$  lunghezza dell'immagine sulla retina, l'angolo sotto cui vedo l'oggetto di lunghezza  $y$  è

$$\theta = y'/2.5\text{cm}$$

d'altra parte  $\text{tg}\theta = y/u \sim \theta$  (angoli piccoli)

$$y' = 2.5 \text{ cm } y/u$$

$y'$  cresce se  $y$   e se  $u$  

- la risoluzione angolare dei pixel è  $4\mu\text{m}/2.5\text{cm} \sim 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$





# La lente d'ingrandimento

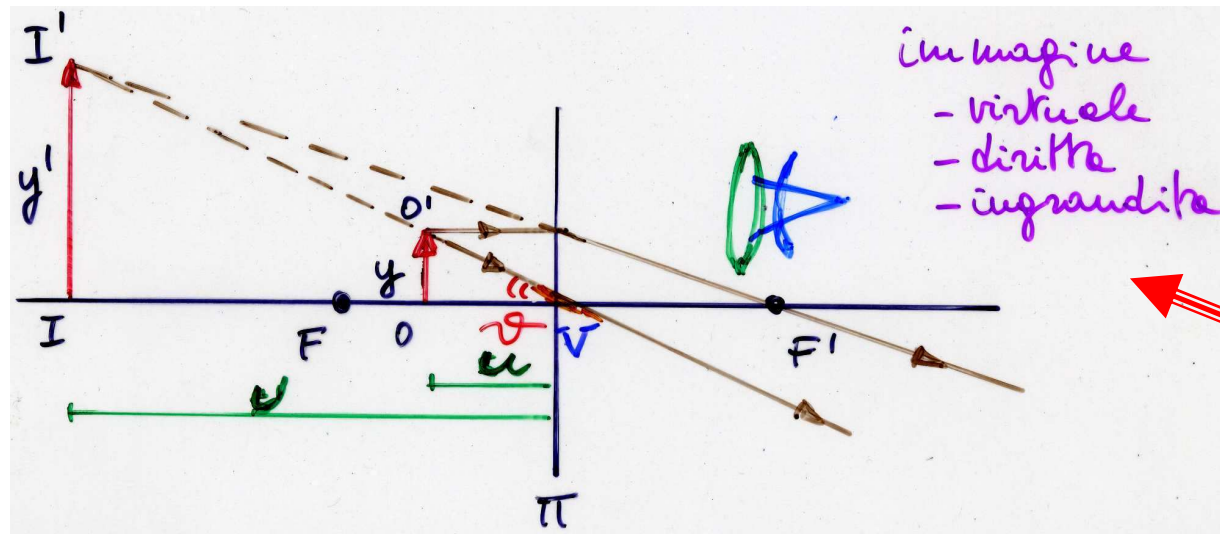


immagine  
all' $\infty$

immagine  
al p.p.

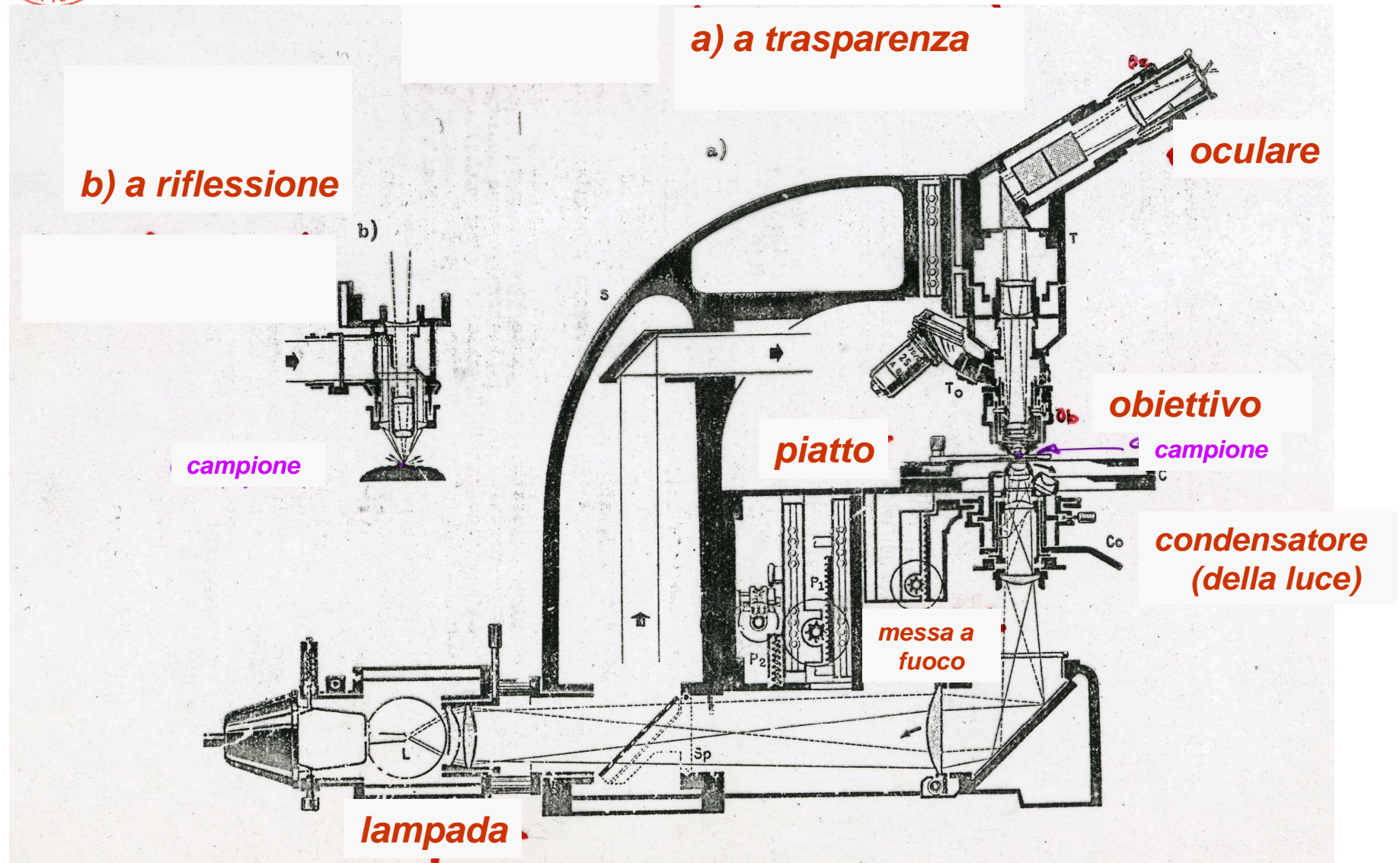
- a occhio nudo:  $\text{tg}\theta_0 = y/d = y/25\text{cm} \sim \theta_0$  **oggetto avvicinato alla distanza di visione distinta**
- con la lente (**convergente**):  $\text{tg}\theta = y/u \sim \theta (= y'/v)$  **vicino all'occhio**
- ingrandimento angolare o visuale

$$\beta = \theta/\theta_0 = d/u \approx 25\text{cm}/f \quad (\beta = m = -v/u = 1 + 25\text{cm}/f)$$

in pratica  $f_{\min} \sim 2.5\text{cm}$  (40 D)  $\rightarrow \beta_{\max} \sim 10$  (compensando le aberrazioni si arriva a 40, microscopio semplice)

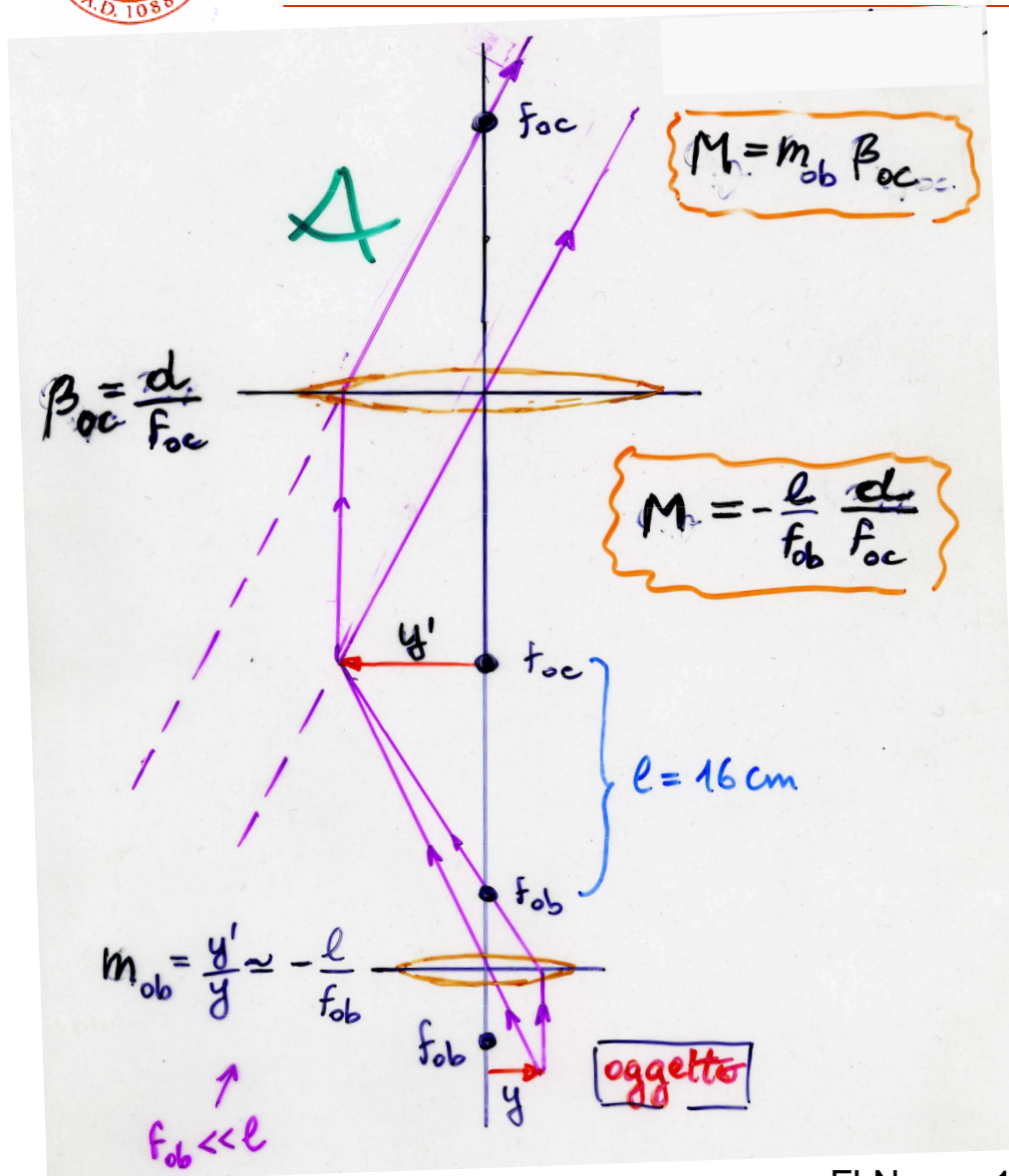


# Microscopio ottico composto





## Microscopio ottico (2)



- l'immagine finale è invertita
- l'oggetto è posto vicino a  $F_{ob}$ , l'immag. reale si forma in  $F_{oc}$  ed è vista dall'oculare: → l'ingrandim. è il prodotto dell'ingr. lineare dell'obiettivo per quello visuale dell'oculare (lente d'ingr.)
- con  $f_{ob} \sim 4 \text{ mm}$ ,  $f_{oc} \sim 10 \text{ mm}$  si ha, per costruzione,  
$$M \sim -\left(\frac{16 \text{ cm}}{f_{ob}}\right)\left(\frac{25 \text{ cm}}{f_{oc}}\right) = -1000$$
- in pratica la limitazione è data dalla  $\lambda$  della luce (vedi oltre, pag. 100-101)



# Prisma(\*)

- deflessione

$$\delta = (i-r) + (i'-r') = (i+i') - (r+r')$$

$$\alpha + (90^\circ - r) + (90^\circ - r') = 180^\circ$$

$$\rightarrow \alpha = r+r'$$

- rifrazioni/Snell

$$- \sin i = n \sin r \quad \text{angoli}$$

$$- n \sin r' = \sin i' \quad \text{piccoli}$$



$$\underline{i+i' = n(r+r')}$$

$$i = nr$$

$$i' = nr'$$

es. $\alpha=60^\circ$ $n=1.52$
--------------------------------------

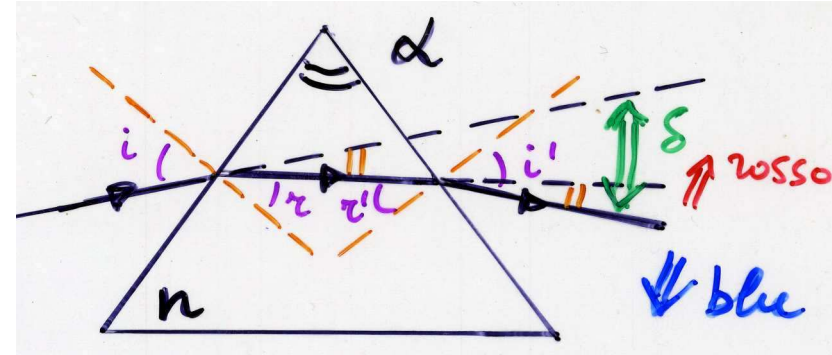
- $\delta \approx (n-1)(r+r') = (n-1)\alpha$  es.  $\delta = 31.2^\circ$

- dispersione e potere dispersivo

$$n = n(\lambda) \quad \Delta\delta/\Delta\lambda = \alpha\Delta n/\Delta\lambda$$

$$n_b = 1.525 \quad n_r = 1.516 \quad \Delta\delta = 0.54^\circ \text{ rosso-blu}$$

$$\Delta\delta/\delta = \Delta n/(n-1) = 1.7\% \text{ vetro crown K3} \quad \forall \alpha$$





# Onde



## Richiamo: oscillazioni e oscillazioni armoniche

---

ripetendo e riassumendo:

- $y$ : “spostamento dalla posizione di equilibrio,  $y=0$ ”  
(spostamento generalizzato: lineare, angolo, carica etc.);  
forza di richiamo “elastica”; inerzia che fa superare  $y=0$
- oscillazione in genere  
 $y = y(t)$  con  $y$  fra  $(-A, +A)$ 
  - fenomeno temporale periodico
  - regione spaziale fissata e limitata
  - energia  $E \propto A^2$ , confinata
- oscillazione armonica,  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ ,  
 $y = A\sin(\omega t + \delta) = A\sin[\omega(t + t_0)]$   
dove  $(\omega t + \delta) = \omega(t + t_0)$  è la fase



## Proprietà fondamentali delle onde

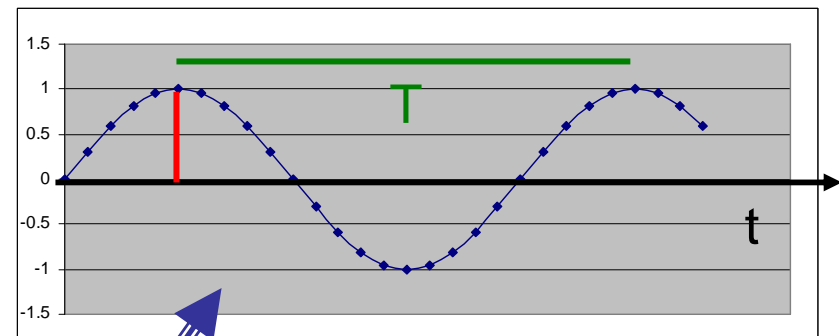
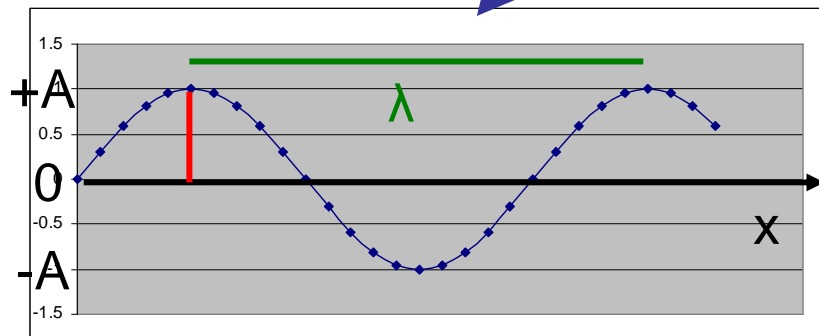
---

- Moto ondoso: trasferimento di energia da un punto P ad un altro Q senza trasferimento di materia
  - onde meccaniche (onde d'acqua, su corde tese, suono) hanno bisogno di un mezzo per propagarsi
  - onde e.m. (luce, onde radio, raggi X) possono viaggiare nel vuoto e la loro propagazione è modificata dalla presenza di materia
- Un'o. meccan. viaggia da P a Q perchè una perturbazione ha causato lo spostamento di una particella in P. Questa trascina una p. vicina che è spostata a sua volta e così via, fino a che la perturbazione raggiunge Q dopo un certo tempo (ritardo). Se il materiale è elastico, le particelle oscillano intorno alla loro posizione di equilibrio.



## Proprietà fondamentali delle onde (2)

- Se la perturbazione è ripetitiva si propaga un'onda, altrimenti si ha un impulso.
- Se la perturbazione alla sorgente è armonica semplice, il grafico degli spostamenti delle particelle a  $t$  fisso è una senoide.



- Se consideriamo il movimento di una singola particella nel tempo (a  $x$  fisso,  $x$  direzione di propagazione) si ha un moto armonico semplice.





## Proprietà fondamentali delle onde (3)

---

- La perturbazione (spostamento generalizzato) può essere  $\perp$  alla direz. di propagazione (o. **trasversali, polarizzabili**) oppure // (**onde longitudinali, non polarizzabili**)
- **Ampiezza (A)** : il più grande spostamento di  $\forall$  partic. rispetto alla posiz. di equilibrio.
- **Lunghezza d'onda ( $\lambda$ )** : distanza fra due particelle con lo stesso moto (fase) ad es. fra due creste (o due valli).
- **Periodo ( $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$ )** : tempo impiegato da ogni particella per una oscillazione completa, tempo impiegato da un'onda per percorrere una  $\lambda$ .
- Quindi la velocità dell'onda (**spazio percorso/tempo impiegato**) è

$$v = \lambda/T = \lambda\nu$$

valida per  $\forall$  onda.



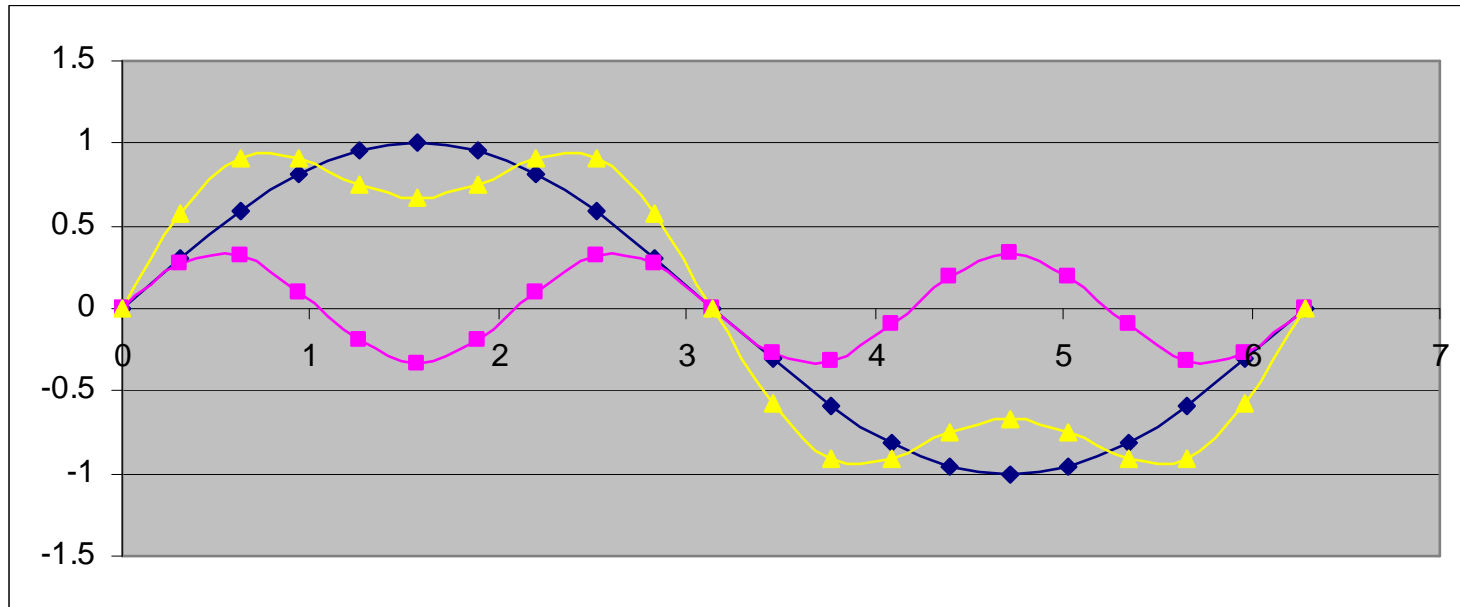
## Principio di sovrapposizione

---

- $v$  e  $\lambda$  dipendono dal mezzo in cui l'onda si propaga,  $v$  (o  $T$ ) dipende esclusivamente dalla sorgente
- Un'onda e.m. consiste di un  $\mathbf{E}(x,t)$  accompagnato da un  $\mathbf{B}(x,t)$  [come visto in e.m.  $\mathbf{E}$  produce  $\mathbf{B}$  che produce  $\mathbf{E}$  etc.]: come ampiezza si prende di solito  $\mathbf{E}$ .
- **Principio di sovrapposizione** : se ci sono due o più onde dello stesso tipo che viaggiano nella stessa direzione, lo spostamento totale è la somma algebrica degli spostamenti nel punto. Sommando onde di  $v$  ed  $A$  diverse, opportunamente scelte, si può riprodurre  $\forall$  forma d'onda (teorema di Fourier) nella stessa direzione.



## Principio di sovrapposizione (2)



Se le onde non viaggiano nella stessa direzione, ma si incontrano solo in qualche punto, esse emergono dopo l'incrocio nella stessa forma che avevano prima dell'incontro.



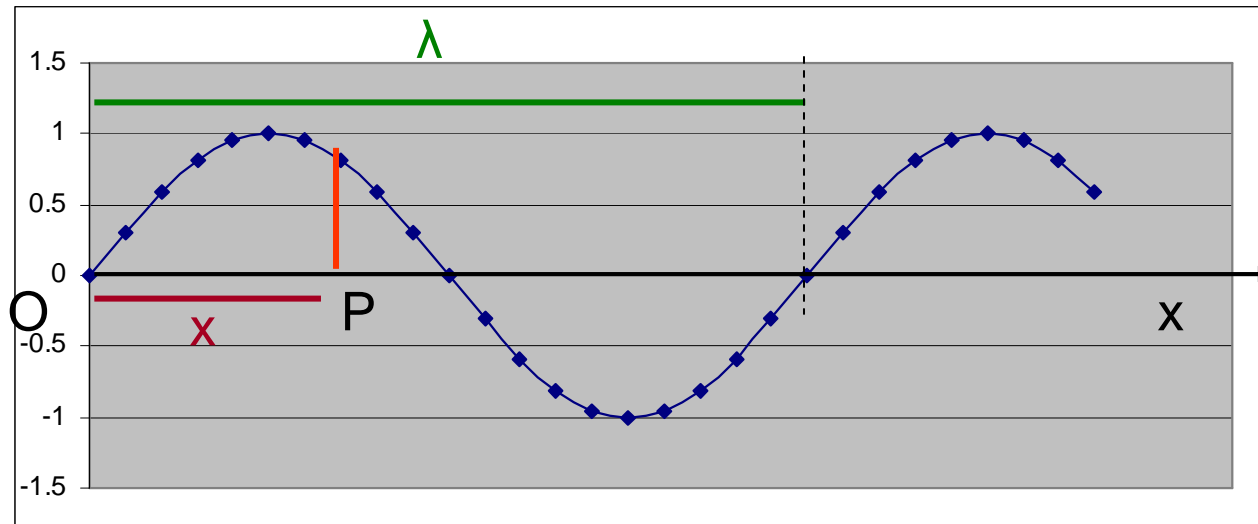
## Principio di sovrapposizione (3)

---

- Se hanno  $\lambda$  uguale e arrivano insieme con creste coincidenti sono in fase, se sono sfasate di  $\pi$  sono in opposizione di fase.
- I fenomeni dell'interferenza, diffrazione, battimenti ed onde stazionarie sono tutti conseguenza del principio di sovrapposizione
- (Assumendo  $y = 0$  per  $t = 0$ ), lo spostamento  $y$  a  $t$  generico di una particella che oscilla di m.a.s. di frequenza  $\nu$  (periodo  $T$ ) può essere rappresentato come  
$$y = A \sin 2\pi t/T = A \sin 2\pi \nu t$$



# Forma matematica di un'onda sinusoidale



- In un'onda sinusoidale ( $\lambda = 2\pi/k$  e  $T$  o  $v = \omega/2\pi$ ), tutte le particelle oscillano sinusoidalmente: il moto delle particelle in  $P$  ritarderà di  $(x/\lambda)T$  rispetto ad  $O$ , ossia dovrò sostituire a  $t \rightarrow t - (x/\lambda)T \rightarrow y = A \sin 2\pi/T [t - (x/\lambda)T]$

$$y = A \sin 2\pi [t/T - x/\lambda] = A \sin 2\pi v [t - x/v] = A \sin(\omega t - kx)$$



## Dalle oscillazioni alle onde (\*)

---

- trasferimento di E (ad es. serie di pendoli accoppiati: un pendolo oscillante trasferisce E al pendolo vicino inizialmente fermo e così via – ritardo, sfasamento)
- mezzo elastico (atomi oscillanti trasferiscono E agli atomi adiacenti – ritardo, sfasamento)

(d di trasferimento)/(t impiegato) = velocità

di propagazione della perturbazione (onda)

- $\lambda$ , lunghezza d'onda, minima distanza fra punti in concordanza di fase (dopo un periodo T)

$$v = \lambda/T = \lambda\nu$$

(T periodo del moto armonico semplice)



## Onde (\*)

---

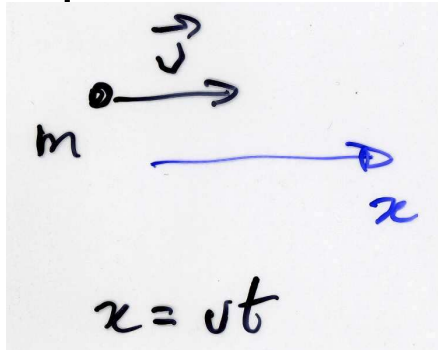
- $f(x,t)$  – propagazione nello spazio (con velocità  $v$ ) di una perturbazione oscillatoria (in  $t$ ), ossia di energia
- es. onde liquide, serie di pendoli uguali, corda lunga/ $\infty$  tesa, onde sonore, onde e.m., tsunami
- la sorgente fissa la frequenza  
 $\nu = 1/T$  (parte temporale)
- il mezzo 'elastico' è perturbato (messo in oscillazione) al passaggio dell'onda, ma mediamente fermo – non si muove secondo  $v$  – serve da “sostegno” (un punto oscillante mette in agitazione oscillatoria il vicino, con un certo ritardo)
- l'energia si muove senza trasporto di materia





# Movimento di onde e particelle (\*)

particella

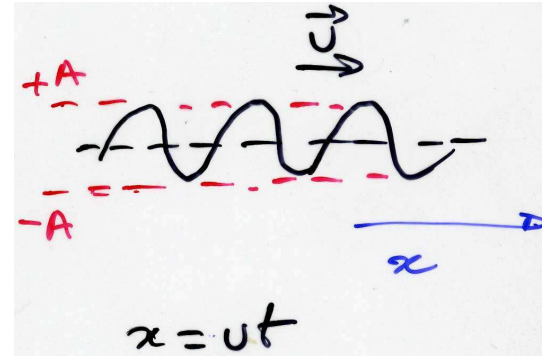


m.r.u.

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

ci vuole una **F**  
per accelerare  
ad es.  $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$   
 $= m(\mathbf{v}-0)/\Delta t$

onda



m.r.u.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (+)$$

ci vuole una sorgente/**F**  
per accelerare/mettere  
in oscillazione il mezzo  
(sasso sul liquido,  
pendolo etc.)

superf.  $\perp$  alla  
propagazione

(+) si usa  $I = E/(tS)$

(\*) in alternativa a pagg. 54-61 FLN mag 10





## Rappresentazione matematica dell'onda (\*)

- si può mostrare che la **perturbazione  $y$**  in un'onda progressiva (si muove nel verso +vo dell'asse  $x$ ) è una funzione sia di  $x$  che di  $t$  ed è data da

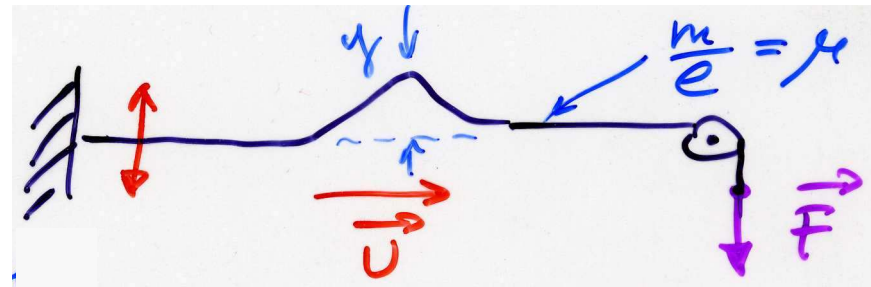
$$y = y(x,t) = y(x-vt)$$

dove  $v$  è la velocità di fase

- es.1 onda impulsiva/impulso: corda tesa vibrante lunga  $l$   
 $y = y(x-vt)$

è l'allontanamento dalla posizione di equilibrio, con

$v^2 = F/\mu$  che dipende dall'elasticità ( $F$ ) e dall'inerzia ( $\mu = m/l$ ) del mezzo (vero in generale)



FLN mag 10 (\*) in alternativ a pagg. 54-61

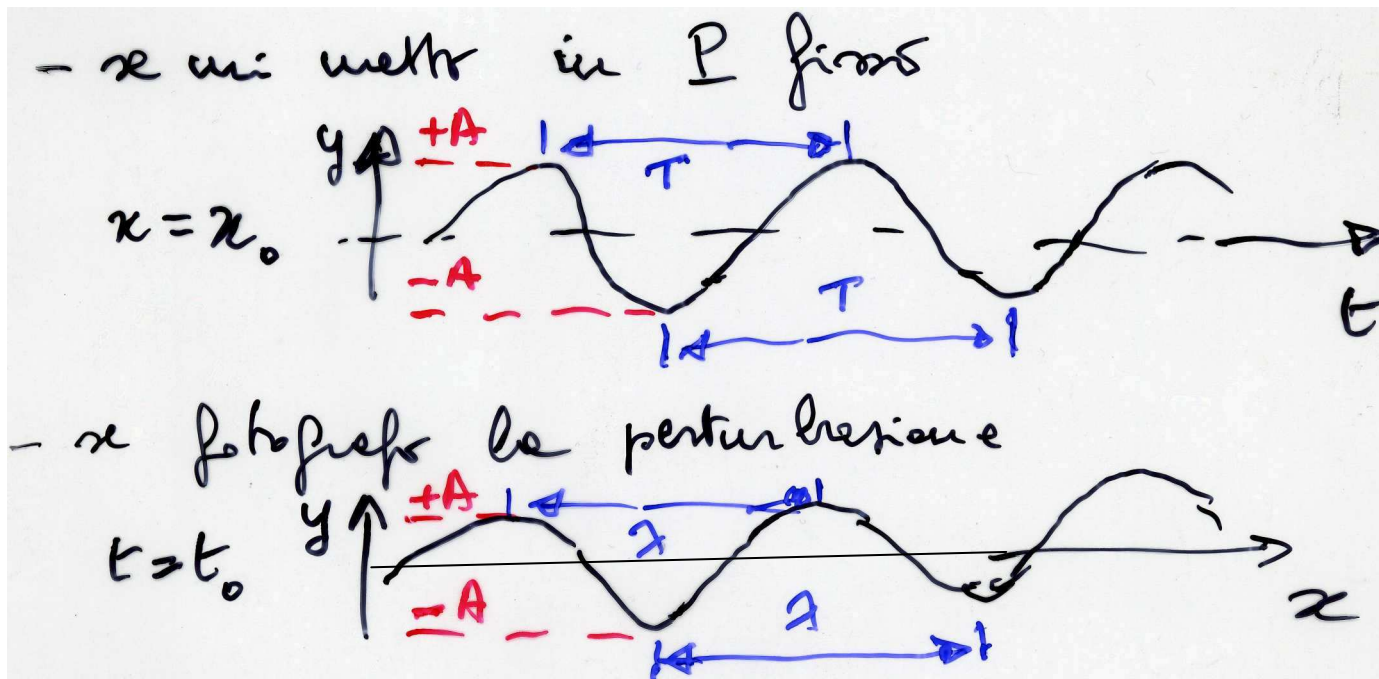


## Rappresentazione matematica dell'onda (2) (\*)

- es.2 onda armonica / periodica: l'eq. di un'onda piana monocromatica progressiva è

$$y = A \sin\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x-vt)\right]$$

dove l'espressione in [ ] è la **fase** dell'onda



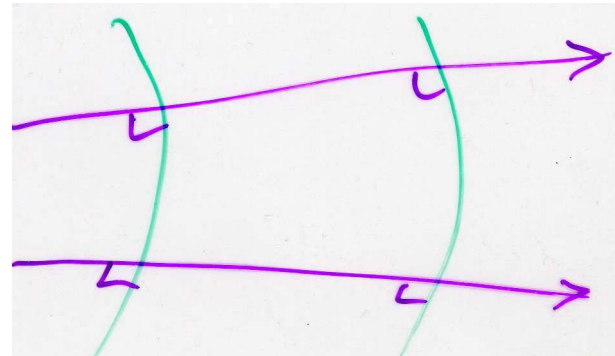
(\*) in alternativa a pagg. 54-61  
FLN mag 10



## Rappresentazione matematica dell'onda (3)

- $v = \omega/2\pi$  dipende dalla sorgente
- $v$  e  $\lambda$  dipendono dal mezzo
- fase: descrive lo stato di oscillazione
- fronte d'onda / superficie d'onda: luogo dei punti con la stessa fase; ad es. onda piana, i fronti d'onda sono piani equidistanti  $\lambda$ ; onda sferica, i fronti d'onda sono superfici sferiche equidistanti  $\lambda$  etc.
- raggi:  $\perp$  ai fronti d'onda, direzioni in cui si muove l'onda (cioè l'energia, la qdm) – li abbiamo usati in ottica geometrica

$$\lambda v = \lambda/T = v$$





# Energia e intensità, ampiezza

- l'intensità  $I$  è definita come la potenza media (nel  $t$ ) divisa l'area della superficie  $\perp$  direz. di propagazione

$$I = E/(tS) = P_{\text{media}}/S \quad \text{in W/m}^2$$

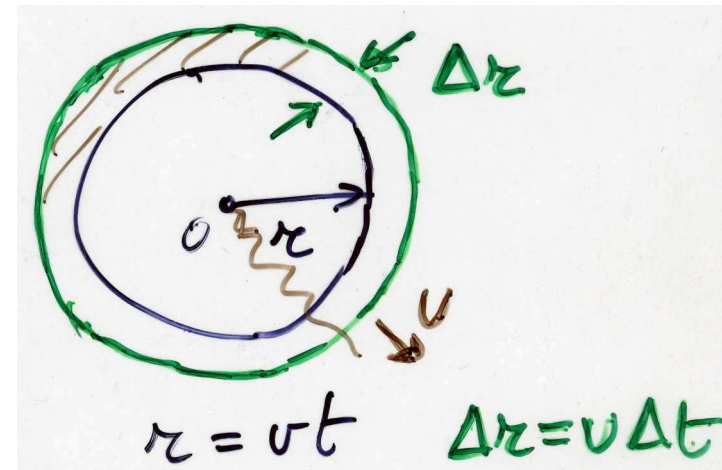
- es. onda sferica  $I = P_{\text{media}} / 4\pi r^2$   
al tempo  $t$  l'energia è nulla fuori di una sfera di raggio  $r = vt$

- l'en. che traversa  $S$  in  $\Delta t$  è  
 $\Delta E = \eta \Delta V = \eta S \Delta r = \eta S v \Delta t$   
ossia  $P_{\text{media}} = \Delta E / \Delta t = \eta S v$

$$\rightarrow I = P_{\text{media}}/S = \eta v$$

$$\text{ma } \eta \propto A^2 \text{ (moto armon. sempl.)} \rightarrow I \propto A^2$$

- onda sferica:  $I \propto 1/r^2$ ;  $A \propto 1/r$  (costanti per un'onda piana)



( $\eta$  – densità di energia)

valida per  $\forall$  onda



# Velocità di propagazione dell'onda

---

si può mostrare che

- corda tesa vibrante

$$v^2 = F/\mu \quad F \text{ tensione della corda, } \mu = m/\text{lunghezza}$$

- onde elastiche nei solidi

$$v^2 = Y/\rho \quad Y \text{ modulo di Young, } \rho \text{ densità del mezzo}$$

- onde sonore nei gas

$$v^2 = B/\rho = \gamma RT/M \quad B \text{ modulo di volume, } \gamma = c_p/c_v$$

- onde e.m. nel vuoto

$$v^2 = c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$$

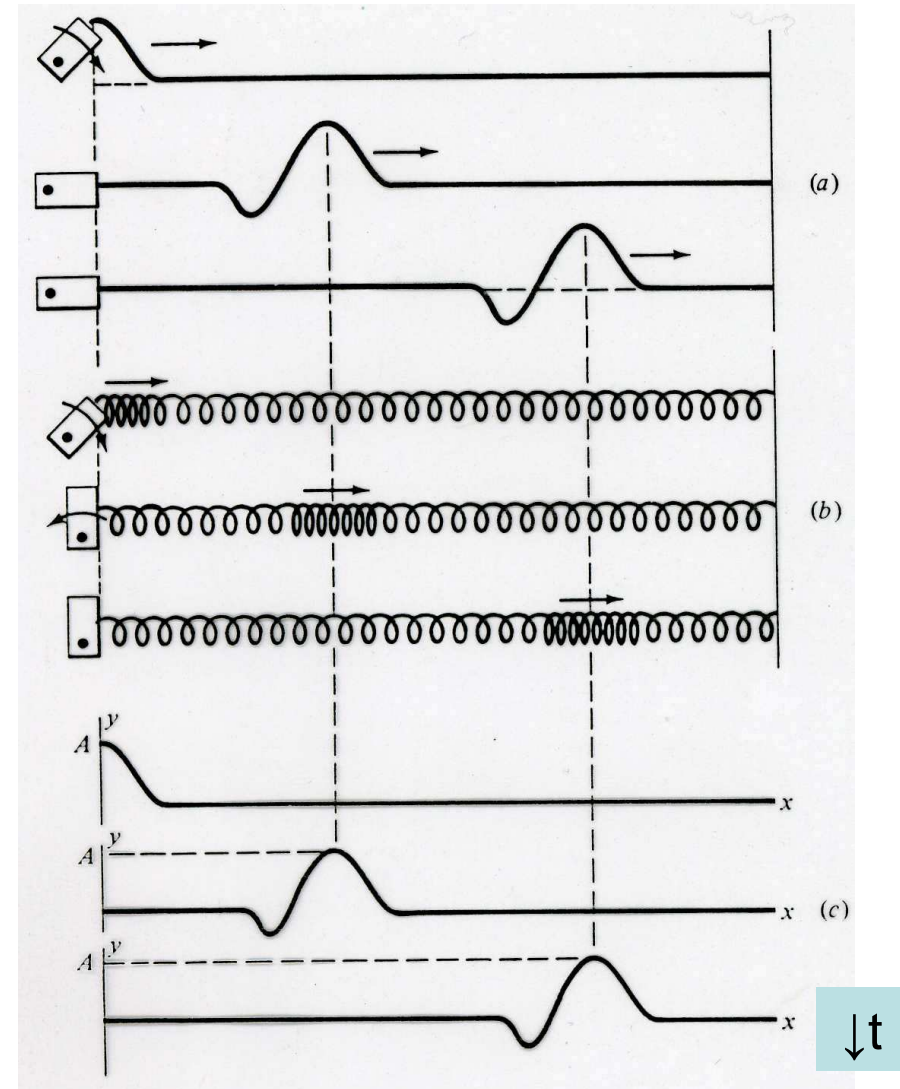
- etc. quindi in generale

$$v^2 \propto \frac{\text{(modulo di) elasticità del mezzo}}{\text{inerzia (o densità di massa) del mezzo}}$$



## Esempi di impulsi

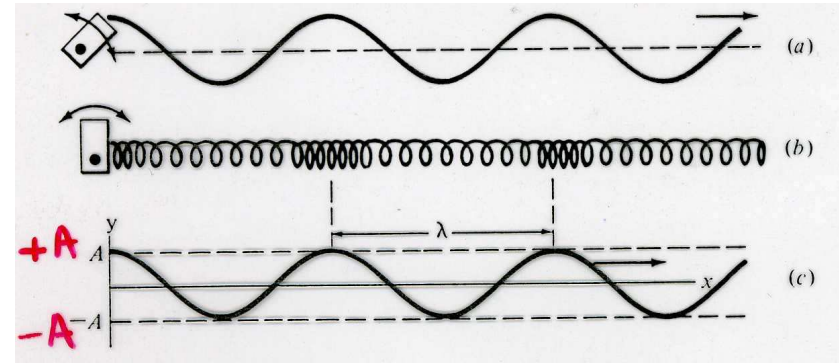
- (a) impulso (corda sotto tensione) - trasversale
- (b) impulso (molla o slinky) - longitudinale
- (c) rappresentazione grafica di (a) e (b)
- corda:  $y$  misura lo spostamento dalla posizione di equilibrio
- molla:  $y$  misura la compress./allungamento



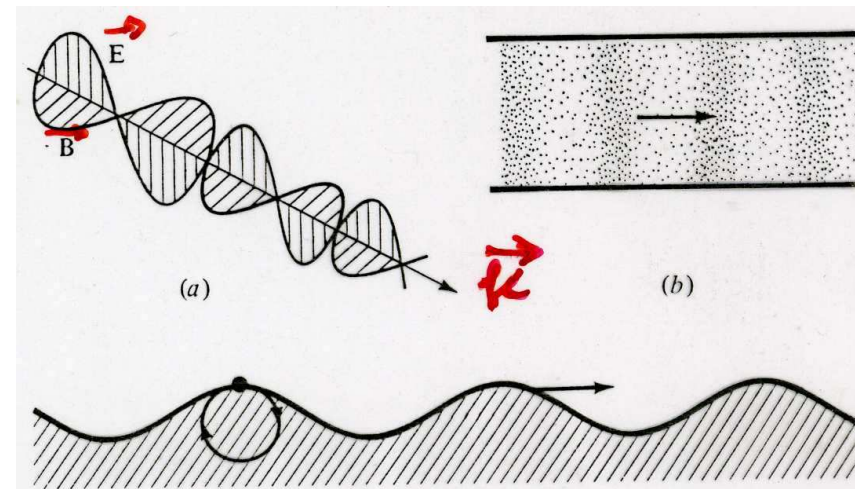


## Esempi di onde periodiche

- (a) onda periodica (corda)
- (b) onda periodica (molla)
- (c) rappresentazione grafica di (a) e (b)



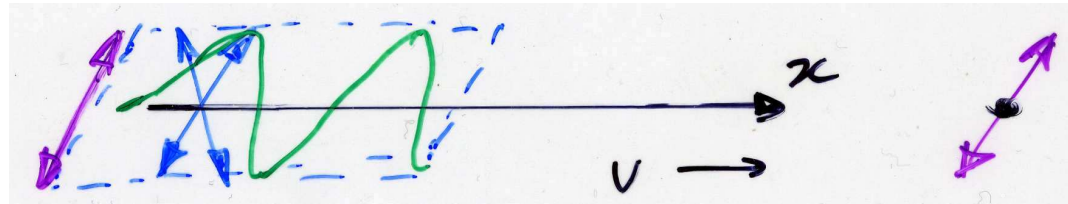
- (a) onda e.m.
- (b) onda sonora (pressione)
- onde d'acqua





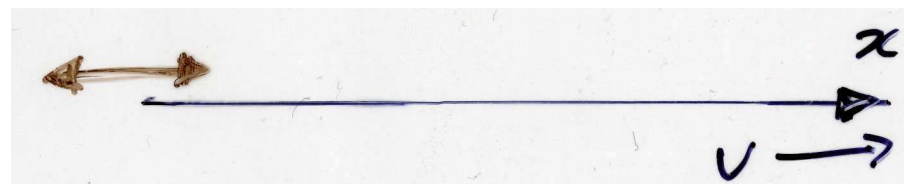
# Onde trasversali e longitudinali

- **onda trasversale: perturbazione  $\perp$  direzione di propagazione** (onde e.m., onde su una corda vibrante, onde dovute all'elasticità di taglio nei solidi)



**polarizzabile:** ad es. piano definito dalla perturb. e dalla direz. di propagazione fisso, polariz. lineare

- **onda longitudinale: perturbazione  $//$  direzione di propagazione**



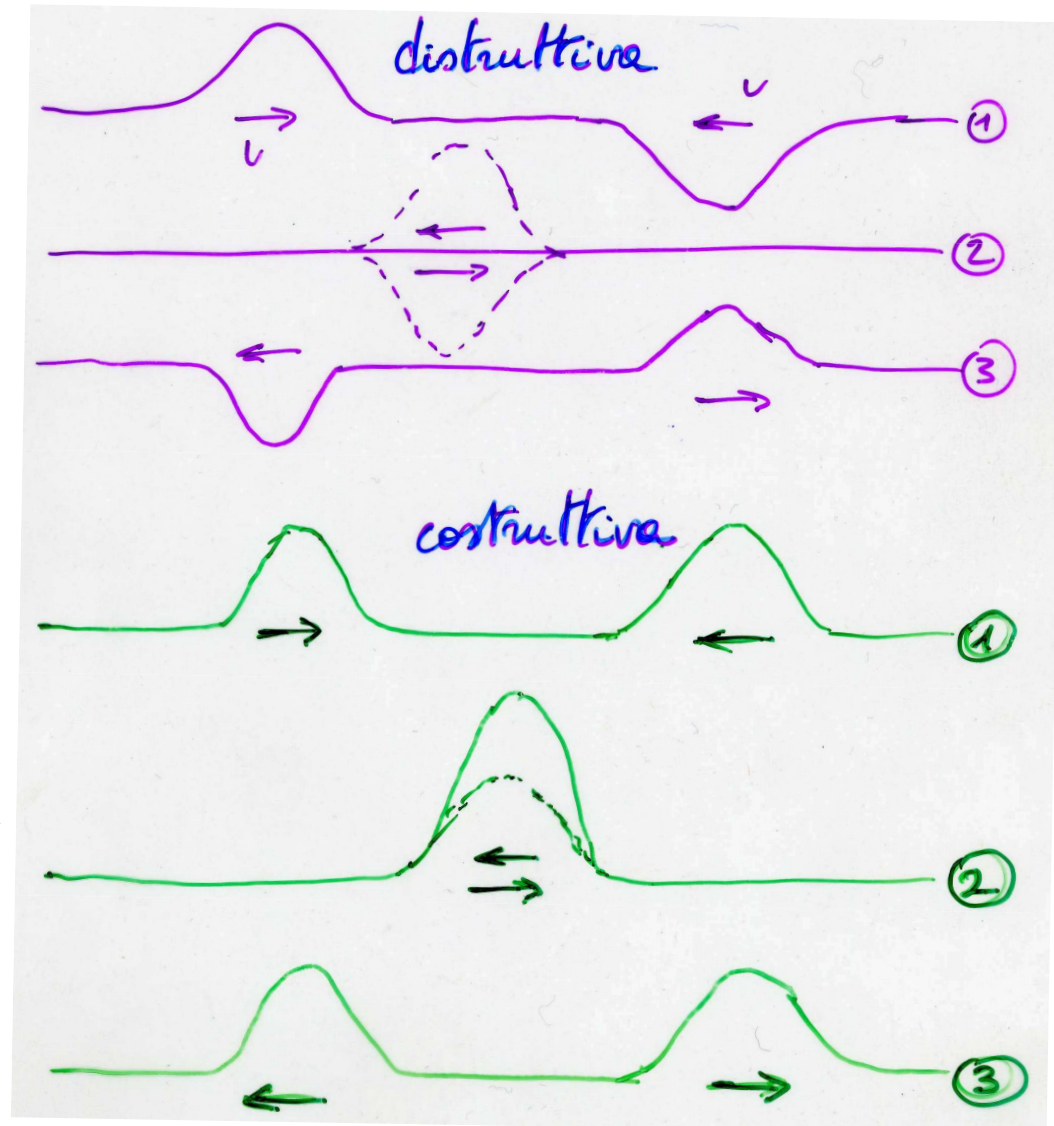
**non polarizzabile** (non si può individuare alcun piano)





# Principio di sovrapposizione (\*)

- le eq. sono lineari: in ogni punto in cui arrivano 2 (o più) onde / impulsi si devono sommare algebricamente le perturbazioni (sovrapposizione)  
➡ interferenza  
**costruttiva** / **distruttiva**  
(dove si ha **somma** / **differenza** di ampiezze uguali)



(\*) in alternativa



## Onde che si propagano in verso opposto – onde stazionarie

- ad es. in una corda tesa vibrante di lunghezza  $L$ : la riflessione dell'onda ad un estremo si somma con l'onda con l'onda incidente (riflessione con inversione di polarità agli estremi fissi)

– interferenza, in gen. distruttiva

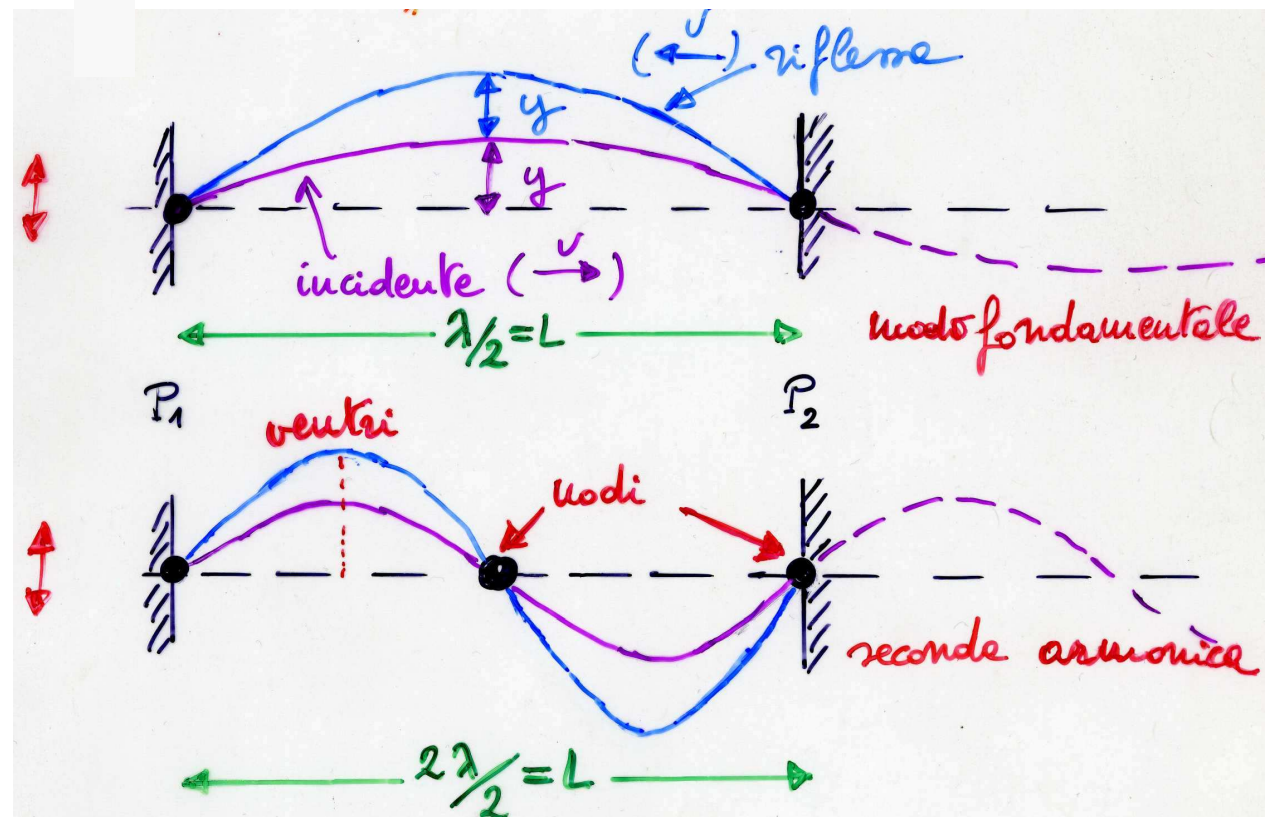
– relazione fra  $\lambda = v/v$  e  $L$  per avere interferenza costruttiva

– risonanza:

$$L = n(\lambda_n/2)$$

$n = 1, 2, 3 \dots$

intero





## Onde stazionarie (2)

- per ottenere la risonanza tutte le onde devono essere in fase

$$v_n = v/\lambda_n = nv/(2L) = nv_1 \quad n = 1,2,3 \dots$$

dove  $v_1 = v/(2L) = 1/(2L)\sqrt{F/\mu}$  è la frequenza fondamentale

- i nodi sono i punti dove l'ampiezza dell'onda è sempre = 0, i ventri quelli dove l'ampiezza è massima
- non c'è propagazione di energia fuori della corda, l'onda non viaggia (onda stazionaria)

- (\*) si può mostrare che la dipendenza da x e t si separa

$$y = 2A\sin(2\pi x/\lambda)\cos(2\pi vt)$$

la condizione dei nodi  $\sin(2\pi x/\lambda) = 0$  dà  $2L/\lambda_n = n$  con n intero

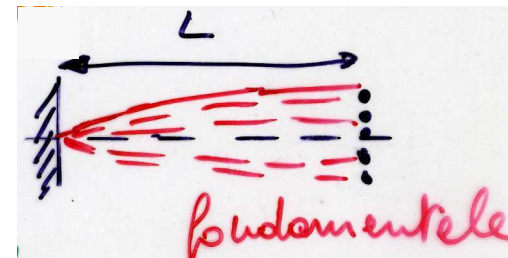
- (\*) se invece un estremo è fisso (nodo) e l'altro mobile (ventre) – ad es. canna d'organo

$$n\lambda_n/4 = L \quad \text{con } n = 1,3,5 \dots \text{ dispari}$$

$$v_1 = v/(4L)$$

(\*) paragrafi facoltativi

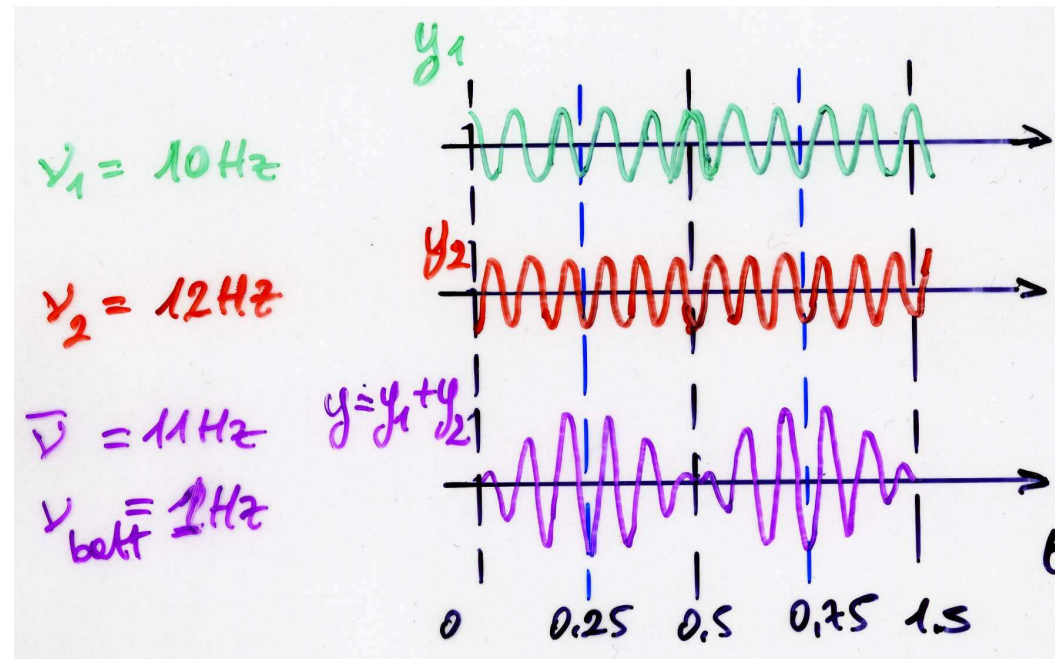
FLN mag 10





## Battimenti (\*)

- due (o più) onde di frequenza vicina e di uguale ampiezza, ad es.



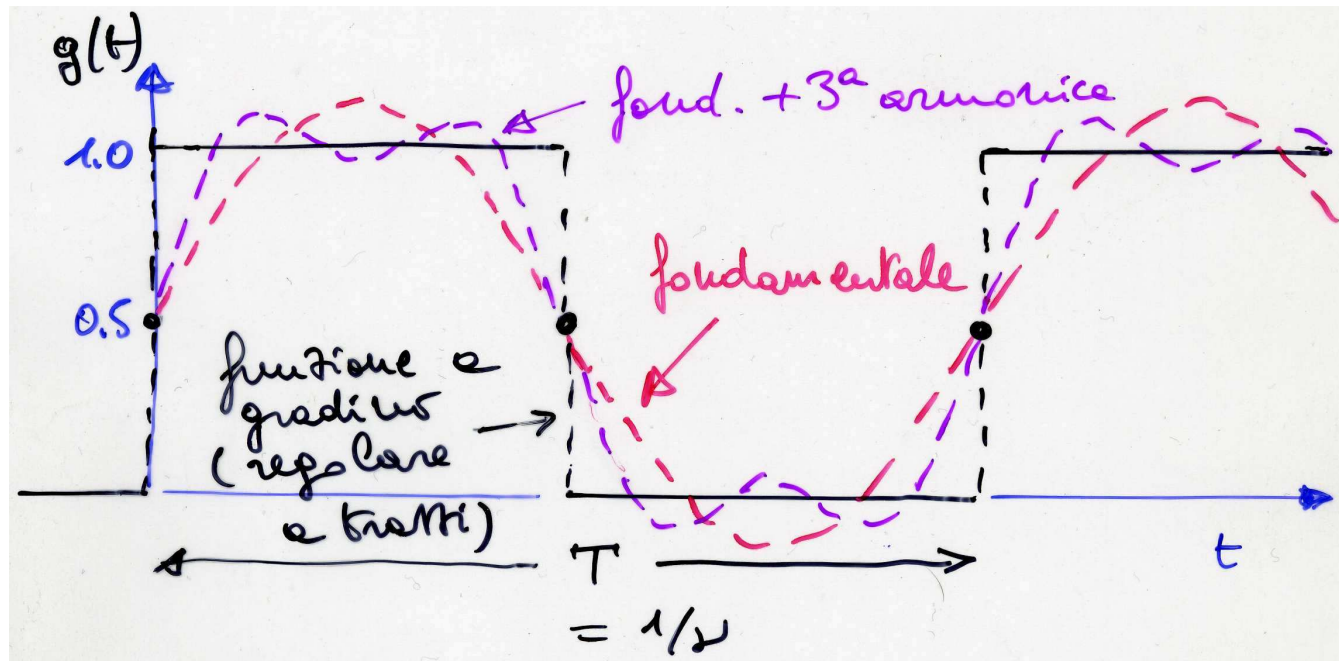
interferenza  $\rightarrow$  frequenza media  $\bar{\nu} = (\nu_1 + \nu_2)/2$  per un termine modulante  $\nu_{\text{batt}} = (\nu_2 - \nu_1)/2$

- usati per accordare strumenti musicali



## Moto periodico generico: teorema di Fourier (\*)

- il moto armonico semplice è il più semplice moto periodico → un generico moto periodico, ad es.  $g(t)$ , è esprimibile con una sovrapposizione di m.a.s.,  $f(t)$



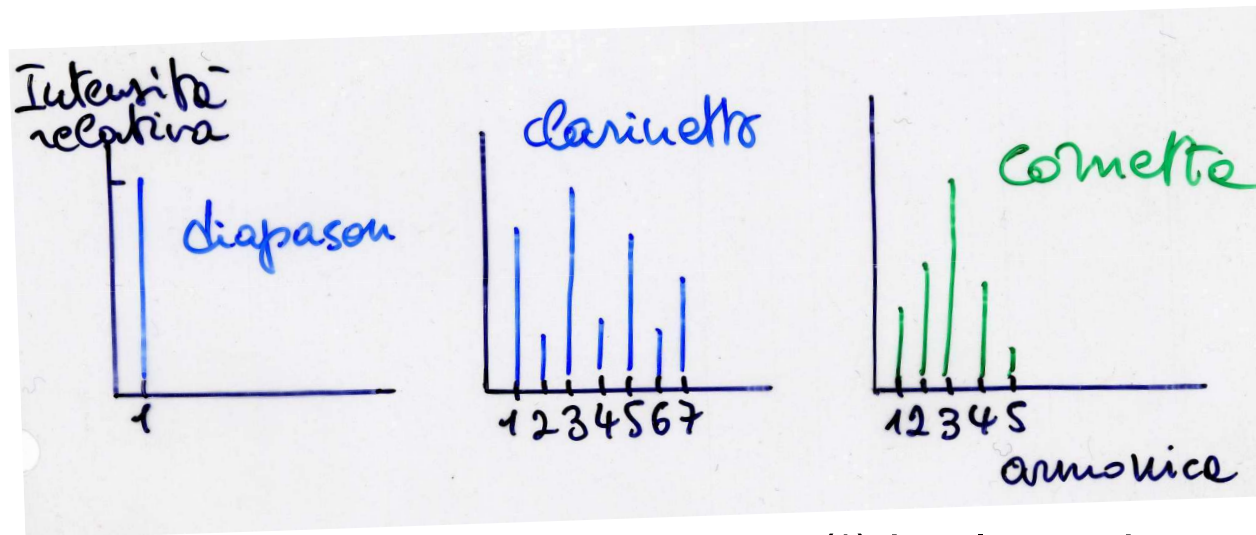
$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + \dots + \frac{1}{2n+1} \sin\left((2n+1) \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + \dots \right]$$

(\*) in alternativa a pagg. 54-61 FLN mag 10



## Teorema di Fourier (2) (\*)

- $\forall$  moto periodico di dato  $T$  ( $\nu$ ) è rappresentabile come somma di tanti (in generale  $\infty$ ) m.a.s. di frequenza  $\nu$  (fondament.),  $2\nu$ ,  $3\nu$  ... (armoniche super.), in generale sfasati fra loro – **teorema di Fourier**
- strumenti diversi hanno, per una stessa nota, la stessa fondamentale ma diverse armoniche (diverso spettro)





# Onde sonore

- onde di pressione in gas, liquidi, solidi

- aria (20°C)  $v = \sqrt{(\gamma RT/M)} = 343 \text{ m/s}$

- H<sub>2</sub>O  $v = 1450 \text{ m/s}$

- $I = p_{\text{max}}^2 / (2\rho v)$

dove  $(\rho v)$  è l'impedenza acustica e  $p_{\text{max}}$  è in effetti un  $\Delta p$ , sovrapposto a  $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

$p_{\text{max}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$     $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$    soglia di udibilità

“   “    $30 \text{ Pa}$    “    $1 \text{ W/m}^2$    soglia del dolore

- $v$  e  $\lambda$ , l'orecchio umano è sensibile nell'intervallo

$v = (30, 20000) \text{ Hz}$    [ $< 30 \text{ Hz}$  infra-s.,  $> 20 \text{ kHz}$  ultra-s.]

$\rightarrow \lambda = (10, 0.02) \text{ m}$  in aria

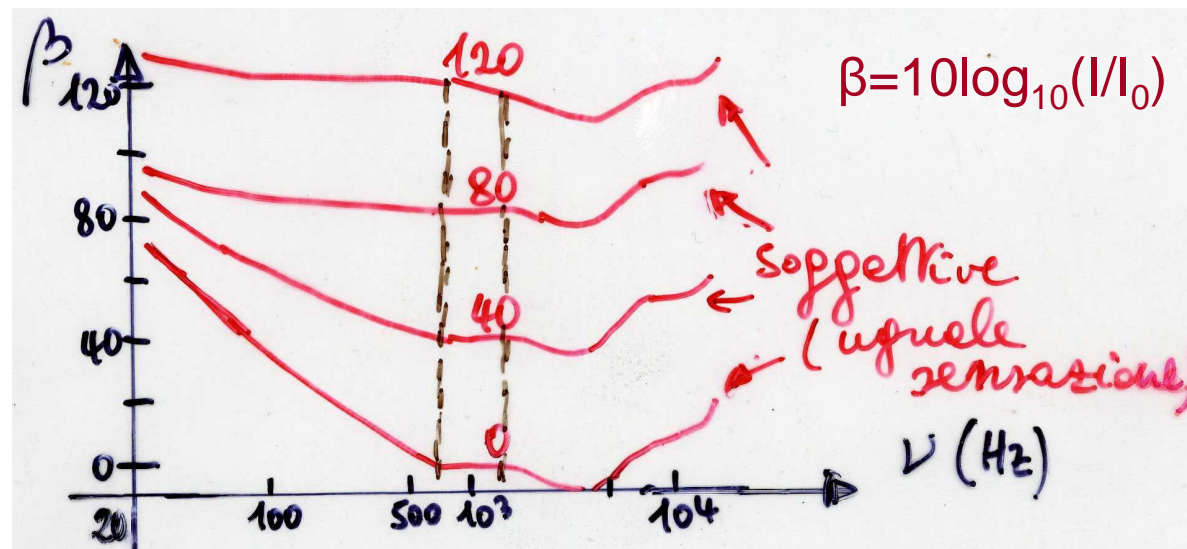
(l'orecchio del *Myotis lucifugus*  $v_{\text{max}} \sim 200 \text{ kHz}$  u.s.  $\lambda \sim 2 \text{ mm}$ )





## Onde sonore (2)

- u.s. in H<sub>2</sub>O es. 5 MHz →  $\lambda \sim 0.3$  mm  
si usano cristalli piezoelettrici: ecografia, produzione di emulsioni, lavaggi, effetti biologici su batteri
- sensibilità dell'orecchio: 12 ordini di grandezza in intensità ~ logaritmica (legge di Fechner) → scala logaritmica







## Onde sonore (3)

---

- si definisce livello d'intensità

$$\beta = 10\log_{10}(I/I_0)$$

che si misura in decibel (dB), dove  $I$  è l'intensità che corrisponde a  $\beta$  e  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  la soglia di udibilità (con riferimento all'orecchio umano)

- soglia di udibilità:  $\beta = 10\log_{10}(I_0/I_0) = 0 \text{ dB}$   
“ del dolore:  $\beta = 10\log_{10}(10^{12}) = 120 \text{ dB}$

traffico stradale  $\sim 70\text{-}80 \text{ dB}$  (inquinamento acustico)

- siccome  $I \propto A^2$  si ha una definizione analoga di  $\beta$

$$\beta = 20\log_{10}(A/A_0)$$

con  $A$  ampiezza corrispondente a  $\beta$  etc.



## Effetto Doppler(\*)

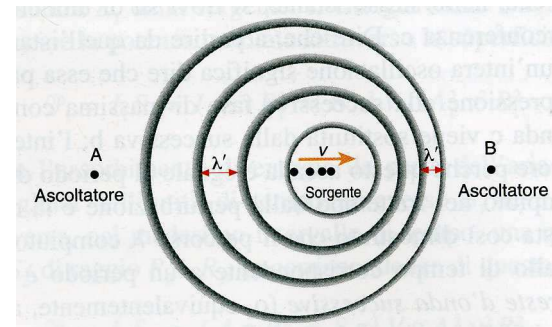
- consideriamo una sorgente S di onde sonore di frequenza  $\nu$  ed un osservatore O ad una certa distanza; se i due sono relativamente fermi, O sentirà un suono avente la stessa  $\nu$
- supponiamo che S si muova verso O con vel.  $v_s$  ed emetta una cresta per  $t=0$ : la successiva sarà emessa dopo  $T=1/\nu$ , intanto la 1<sup>a</sup> ha viaggiato  $\lambda=vT=v/\nu$  mentre S ha viaggiato  $v_s/\nu \rightarrow$  separazione fra due creste success.

$$\lambda' = v/\nu - v_s/\nu = (v - v_s)/\nu$$

e O sente una frequenza

$$\nu' = \nu \nu / (v - v_s)$$

( $\nu' = v/\lambda'$ , se si muove S, la vel. delle onde non cambia)



(\*) facoltativo



## Effetto Doppler (2) (\*)

---

- se S si allontana da O, si avranno creste più spaziate

$$\lambda' = (v+v_s)/v \quad \text{e} \quad v' = v v/(v+v_s)$$

- supponiamo ora S ferma e O che si avvicina con vel.  $v_o$ , la vel. delle onde relativa ad O è  $v+v_o$ , quindi O incontra le creste con frequenza

$$v' = (v+v_o)/\lambda = v (v+v_o)/v$$

( $\lambda = v/v$ , il moto di O non ha effetto sulla  $\lambda$  del suono, O intercetta solo più creste di quando è fermo relativamente ad S)

- S ferma e O si allontana, la vel. delle onde relativa ad O è  $v-v_o$  e avremo

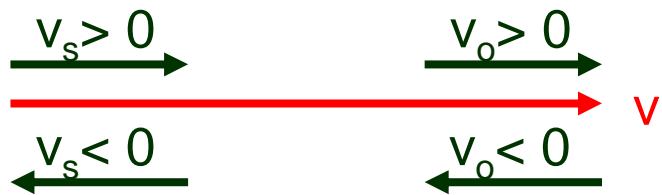
$$v' = (v-v_o)/\lambda = v (v-v_o)/v$$



## Effetto Doppler (3) (\*)

- riassumendo: quando S e O si avvicinano, la frequenza del suono percepita da O aumenta; quando si allontanano, diminuisce – lo spostamento di frequenza può servire a misurare la velocità relativa

- riassumendo in una sola formula

$$v' = v \frac{V - v_o}{V - v_s}$$


dove  $v_s$ ,  $v_o$  vanno presi con valore e segno: saranno +vi se sono paralleli a  $v$ , -vi se antiparalleli

- le formule valgono per tutte le onde meccaniche (nei gas, liquidi, solidi); per la luce valgono in 1<sup>a</sup> approx, se le vel. sono  $\ll c$ , inoltre conta solo la vel. relativa



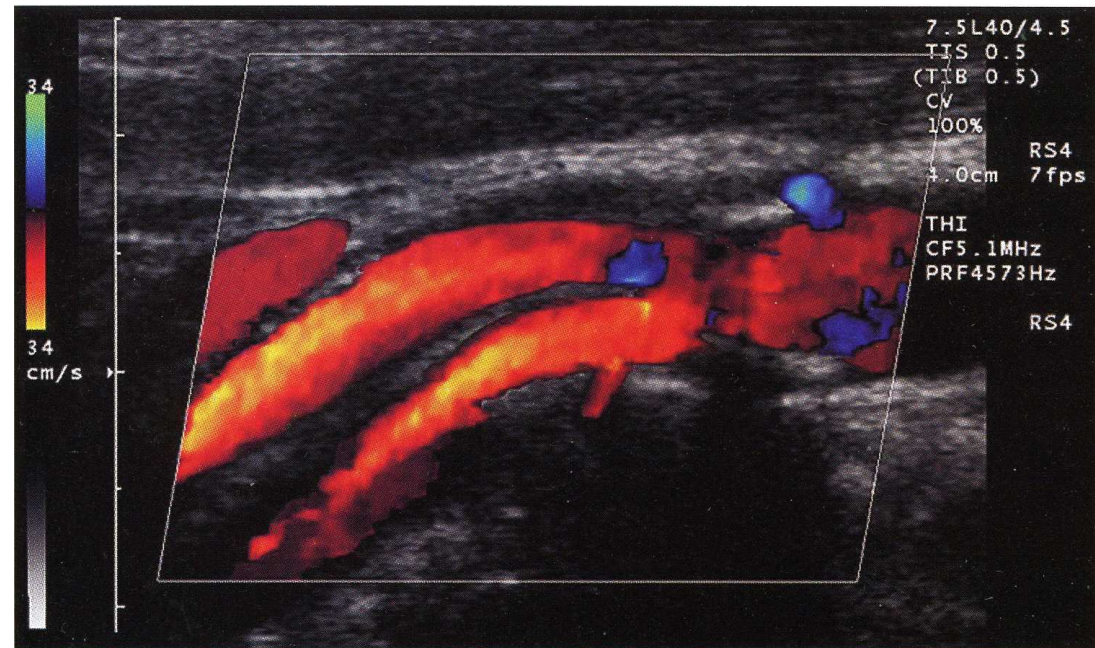
## Applicazioni dell'effetto Doppler (\*)

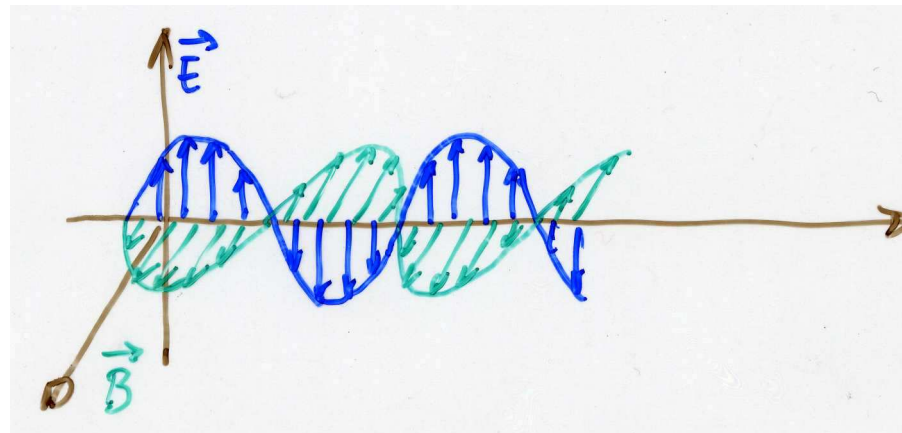
- radar (radio detecting and ranging) per misura di  $v_s$
- ecoDoppler con US; lo spostamento di frequenza è

$$\Delta v = 2(v_s/v) v \cos\theta$$

dove  $v_s$  è la vel. della sorgente (sangue, globuli rossi),  $v = 1540$  m/s quella del suono nei tessuti molli,  $\theta$  è l'angolo fra trasduttore e vaso sanguigno

- si lavora con impulsi brevi (come i delfini, pipistrelli etc.) ed i segnali riflessi (eco) sono processati matematicamente – rosso e blu indicano  $v_s +va$  e  $-va$ , rispett.



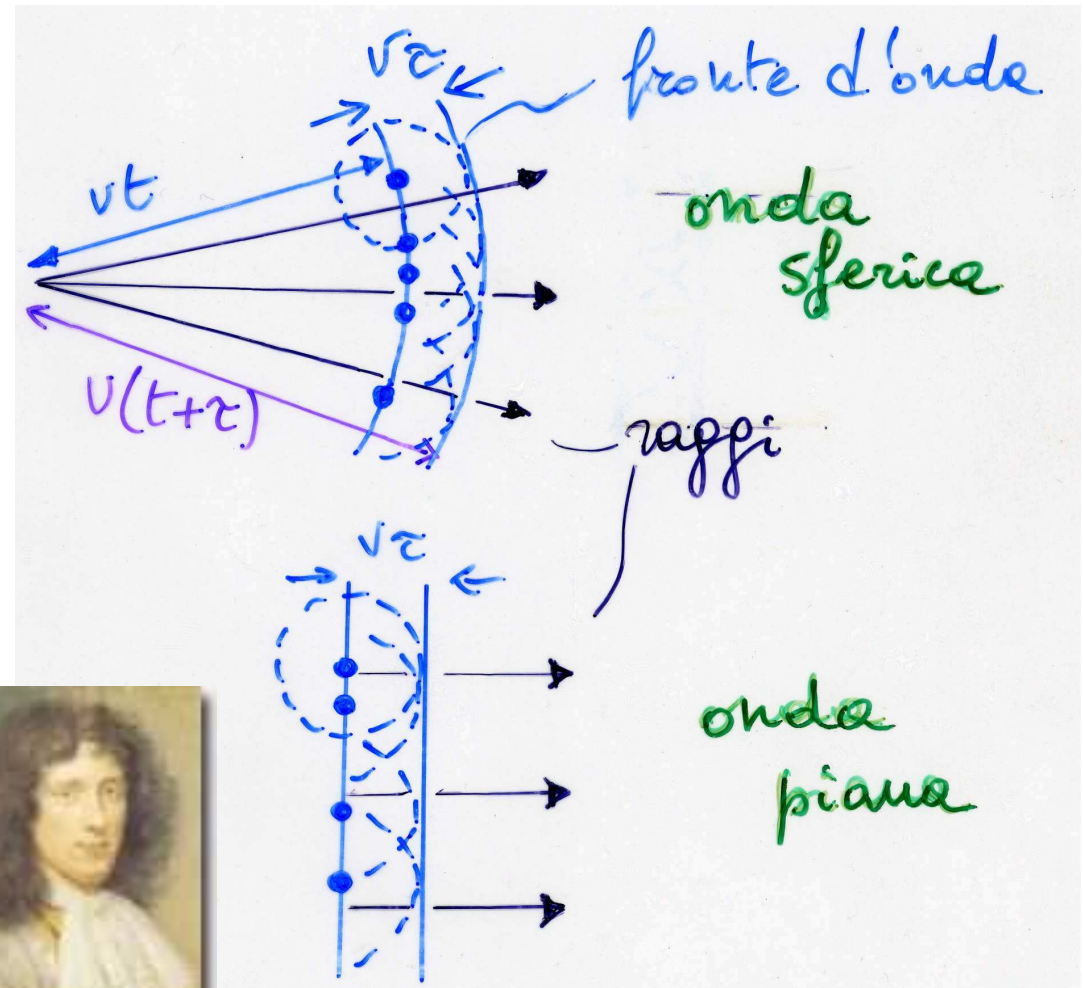


## Ottica fisica



# Principio di Huygens

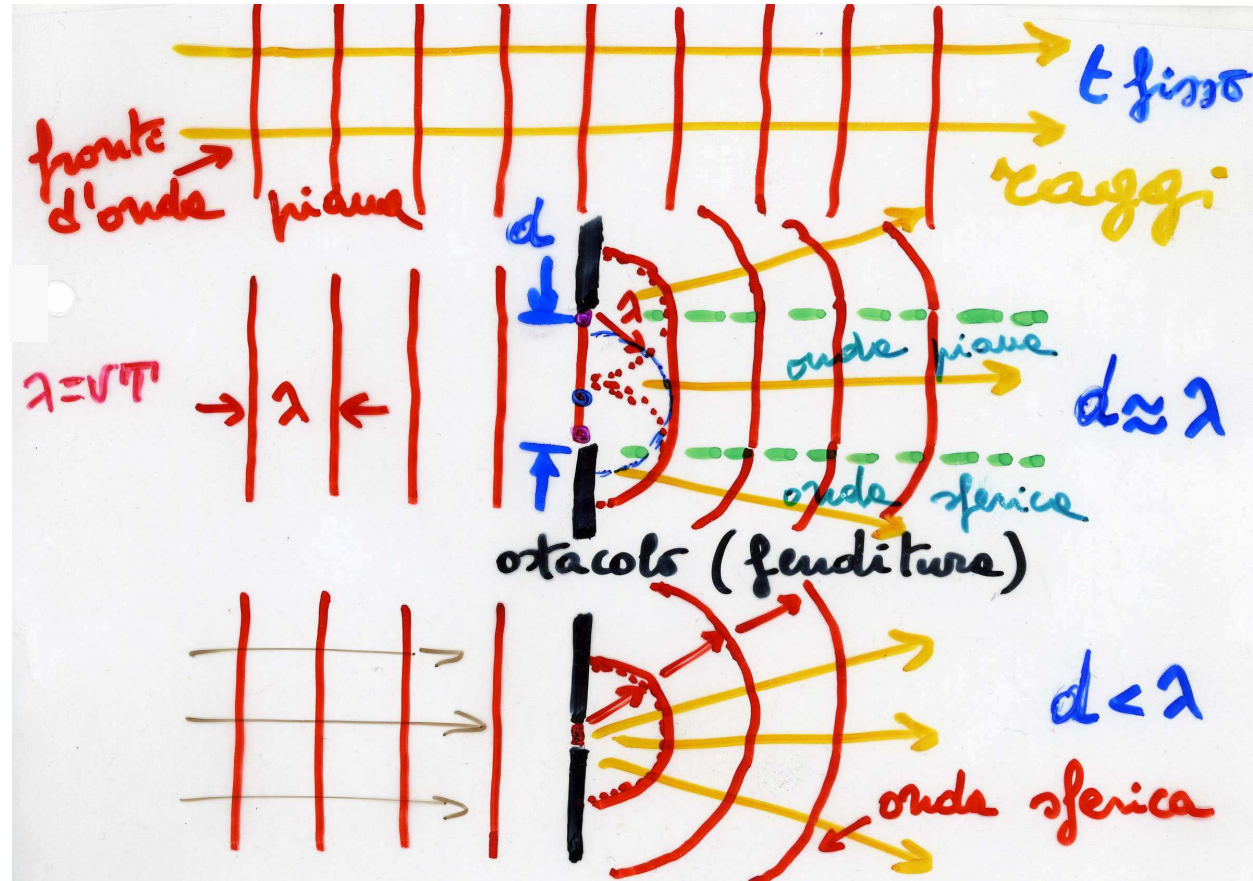
- propagazione di onde in mezzi omogenei e isotropi: l'involuppo delle onde sferiche elementari emesse dai punti di un fronte d'onda dà il nuovo fronte d'onda
- [ampiezza onde elem. max in avanti è = 0 per  $\theta \geq \pi/2$  (non ci sono onde regressive)]
- può essere esteso a mezzi anisotropi (birifrangenza) e alla propagazione in mezzi diversi (riflessione e rifrazione)





# Applicazione del principio di Huygens

- il principio di Huygens spiega naturalmente la **diffrazione delle onde**
- ad es. un fronte d'onda piano è trasmesso solo parzialm. da una fenditura, ai bordi si sviluppa un'onda sferica la cui ampiezza decresce come  $1/(\text{distanza dalla fenditura})$







# Diffrazione delle onde

---

- non si possono selezionare i raggi! quando un'onda incontra un ostacolo/fenditura di larghezza  $d$ 
  - $d \gg \lambda$ , si seleziona una larga parte del fronte d'onda, effetti di diffrazione solo ai bordi
  - $d \sim \lambda$ , diffrazione e trasmissione
  - $d < \lambda$ , dopo l'ostacolo l'onda è interamente diffratta ( $\sim$  onda sferica o cilindrica)

- onde sonore  $\lambda$  fra (0.02, 10) m diffrazione importante

- onde luminose  $\lambda_{\text{vis}}$  fra  $(0.4, 0.7) \cdot 10^{-6}$  m ottica geometrica

- risoluzione di punti vicini/ potere di localizzazione degli strumenti ottici (ad es. microscopio)

→ risoluzione  $\approx \lambda$

$\lambda_{\text{blu}} = 4.5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \sim 10^4 r_0$ , raggio di Bohr (H)

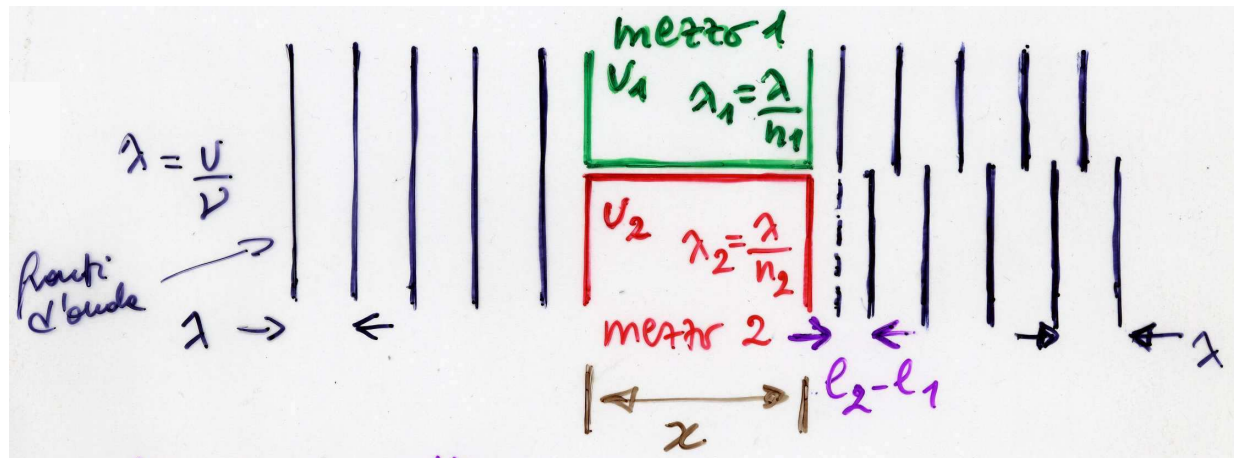
FLN mag 10

non si possono  
“vedere” gli atomi  
in senso stretto



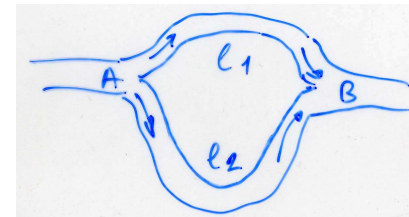
# Cammino ottico

- in un'onda piana varia solo la fase  
t fisso:  $y = A \sin(2\pi x/\lambda)$   $A = \text{cost}$
- onda che segue cammini diversi (passa in mezzi diversi)



- cammino ottico:  $l_{1,2} = n_{1,2}x$  ( $x/\lambda_{1,2} = n_{1,2}x/\lambda$ )
- differenza di fase:  $\delta = (2\pi/\lambda)(l_2 - l_1)$
- oppure si può variare il cammino geometrico

**sfasamento: effetto del mezzo sull'onda**





# Interferenza di onde armoniche (\*)

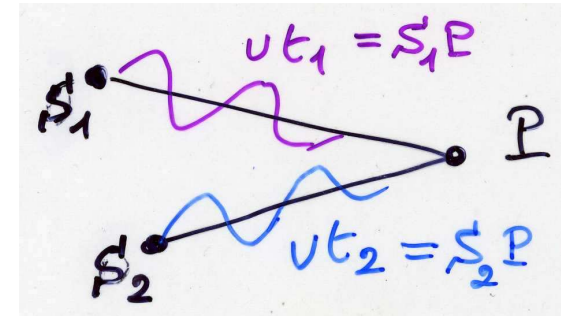
- x fisso (P), onde monocrom., stessa A

$$y_1 = A \cos \omega t$$

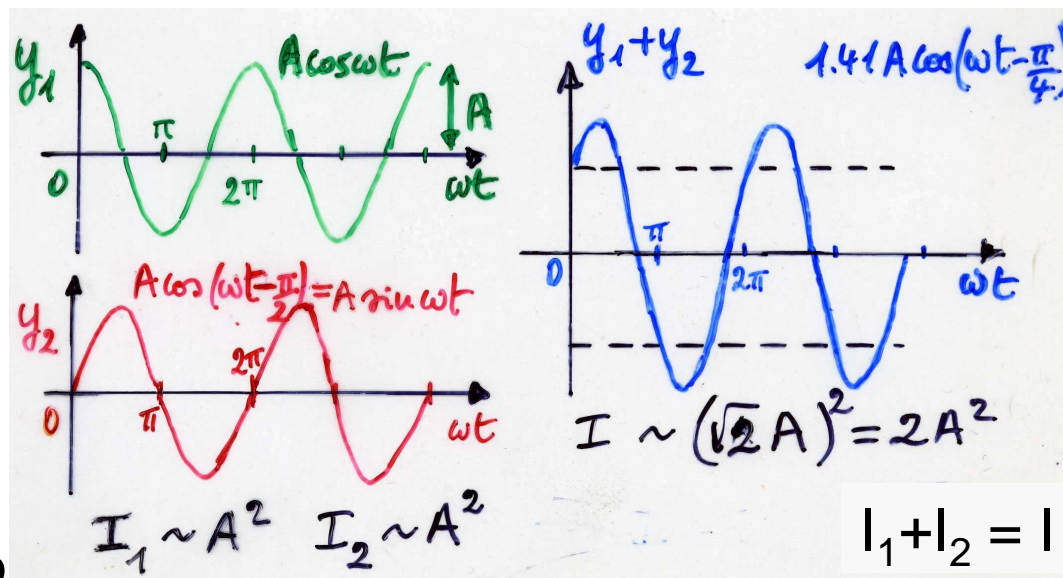
$$y_2 = A \cos(\omega t + \delta)$$

differenza di fase

$$\delta = 2\pi\nu(t_2 - t_1)/\lambda$$



- si ha sempre interferenza (ma con la luce normale, emissioni atomiche scorrelate e brevi, non si evidenzia)
- c'è interferenza sia con onde longitudinali che trasversali
- ad es.



(\*) facoltativo



## Interferenza (2) (\*)

---

- se  $\delta = 2m\pi$   $m = 0, 1, 2 \dots$   
[ $\Delta x = m\lambda$ ]

si ha **interferenza costruttiva**: le ampiezze si sommano

$$I \propto (A+A)^2 = (2A)^2 = 4A^2$$

- se  $\delta = (2m+1)\pi$   $m = 0, 1, 2 \dots$   
[ $\Delta x = (2m+1)\lambda/2$ ]

si ha **interferenza distruttiva**, le ampiezze si sottraggono

$$I \propto (A-A)^2 = 0$$

NB per evidenziare l'interferenza  $\delta$  deve essere fisso

( $\rightarrow$  sorgenti coerenti, relazione di fase fissa, il che non è vero per la luce normale)



## Interferenza della luce – esperienza di Young

---

- da una sorgente monocromatica (ad es. linea D del Na,  $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) se ne ottengono due coerenti, relazione di fase fissa, con artifici: due fenditure (Young) [o due specchi (Fresnel)]
- la luce prodotta dalle fenditure  $S_1$  e  $S_2$  è raccolta su uno schermo lontano (oppure si inserisce una lente) dove si osservano le frange d'interferenza
- in O, equidistante da  $S_1$  e  $S_2$ , le due onde arrivano sempre in fase  $\rightarrow$  interferenza costruttiva, max d'intensità, frangia chiara
- muovendosi sullo schermo, la diff. di cammino aumenta fino all'opposizione di fase, 0 di intensità, frangia scura; poi le onde ritornano in fase, frangia chiara etc.





# Interferenza della luce (2)

*frange chiare e scure ad es.*

*schermo*

*in fase*

*in oppos. di fase*

*in fase*

*in fase*

*in oppos. di fase*

*di cammino ottico*

*in osceole*

*differente*

*di cammino ottico*

$2\pi \frac{S_2 X}{\lambda}$  *diff. di fase*

$S_1 \hat{\times} S_2 \sim \perp, 90^\circ$

$S_2 \hat{\times} S_1 \sim \vartheta$

$S_2 X \sim d \sin \vartheta \sim d \tan \vartheta = \frac{dy}{L}$



## Interferenza della luce (3)

- in P generico, le onde difratte da  $S_1$  e  $S_2$  sono in fase se la diff. di cammino ottico è un numero intero di  $\lambda$  (in opposizione se numero dispari di  $\lambda/2$ )

in fase  $dy/L = m\lambda$   $m = 0, 1, 2, \dots$

in opposiz.  $dy/L = (2m+1)\lambda/2$  ”

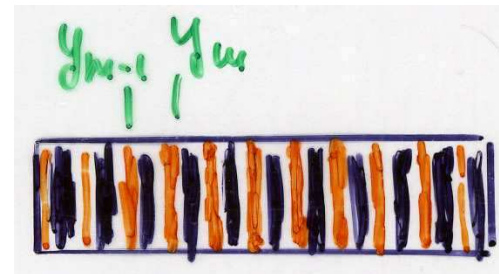
diff. di fase  $2\pi dy/(\lambda L)$

- distanza fra massimi / righe gialle (o minimi / righe scure) sullo schermo

$$y_m - y_{m-1} = L\lambda/d$$

$$\rightarrow \lambda = (d/L)\Delta y$$

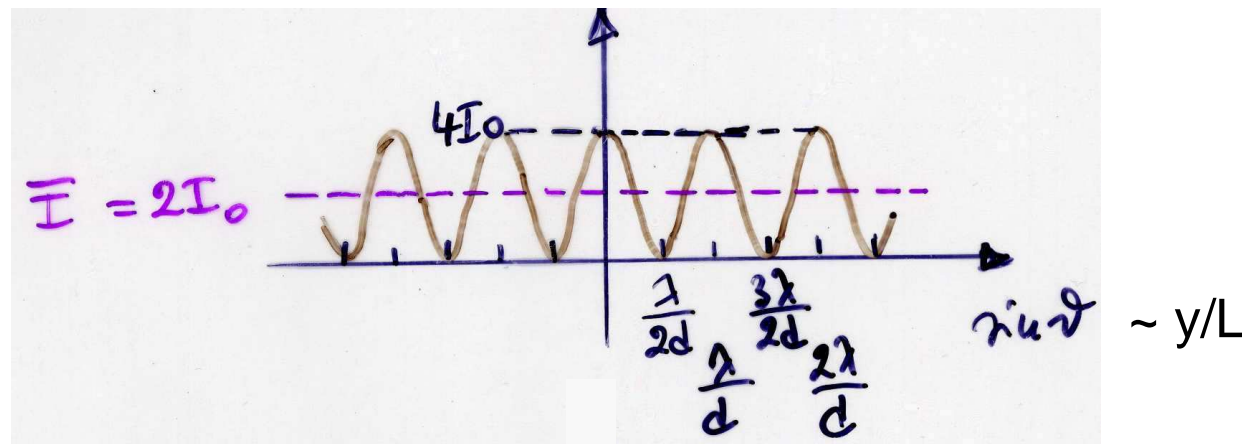
con  $\lambda \sim 0.6 \mu\text{m}$ ,  $d = 1 \text{ mm}$ ,  
 $L = 2 \text{ m} \rightarrow \Delta y = 1.2 \text{ mm}$





## Interferenza della luce (4)

- l'interferenza della luce prova che la luce è un fenomeno ondulatorio (ma non se è trasversale o longitudinale, per distinguere bisogna studiare la polarizzazione)
- se non si usa una sorgente monocromatica → max e min sovrapposti (a parte il primo) e non si osservano le frange
- intensità sullo schermo con 2 fenditure

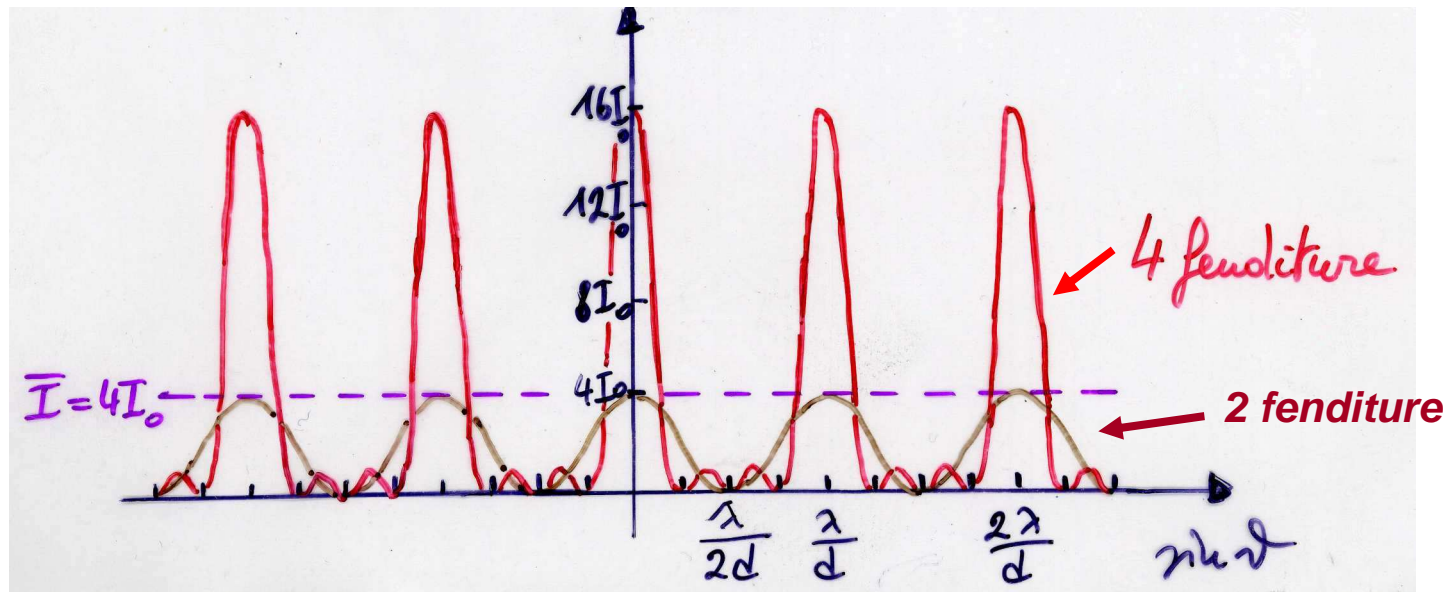






## Interferenza della luce (5) (\*)

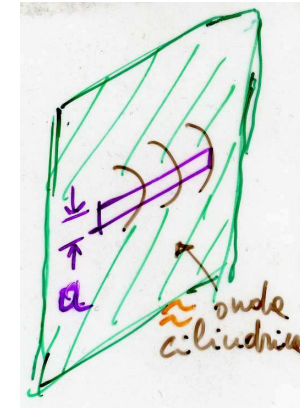
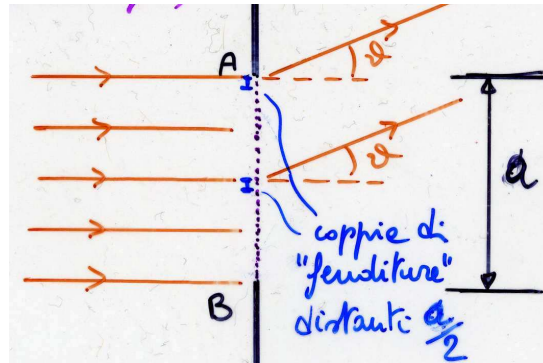
- se si ripete l'esperimento con un numero maggiore di fenditure si ottengono massimi più separati (e si sviluppano max secondari → è più facile misurare  $\lambda$ ); ad es. con 4 fenditure l'intensità è



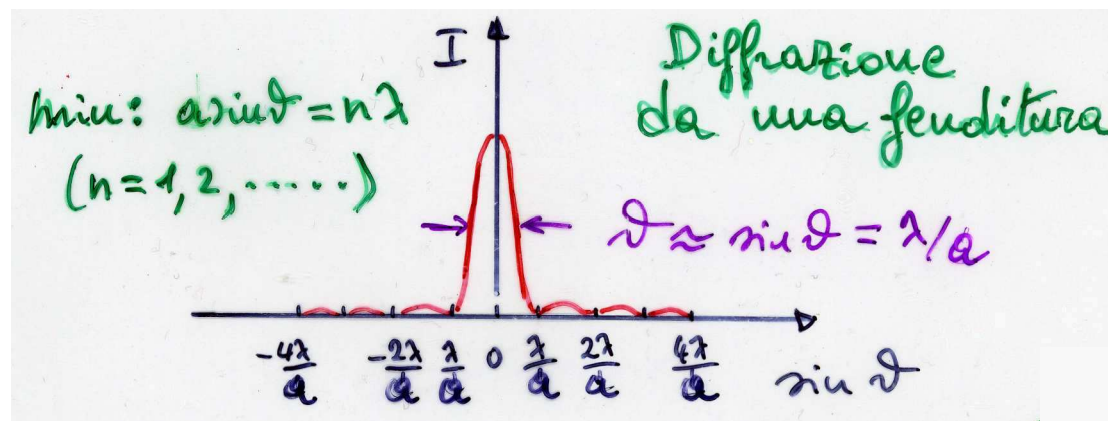
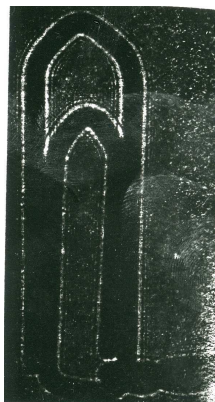


# Diffrazione da una fenditura

- diffrazione à la Fraunhofer (schermo a grande distanza o nel piano focale di una lente)



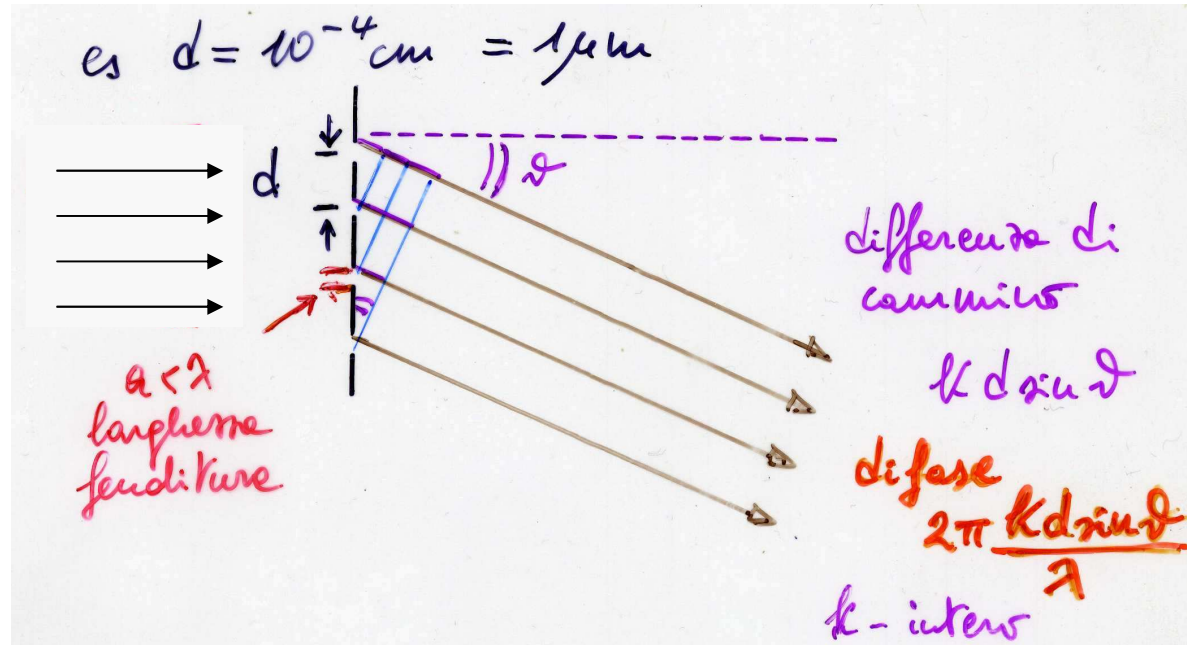
- scomponendo la fenditura in coppie di fenditure distanti  $a/2$  si può vedere che c'è un max di  $I$  per  $\theta = 0$  e max secondari molto deboli





# Reticolo di diffrazione

- realizzato con incisioni // su vetro o plastica
- se c'è un max per una coppia di fenditure, tutte le altre sono in fase



$$\sin \theta = m \lambda / d$$

$$m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

ora  $\theta$  è grande, es.  $\lambda = 0.589 \mu\text{m}$ ,  $\theta_1 = 36.1^\circ \rightarrow$  misura di  $\lambda$  più precisa

- se  $\sin \theta \neq m \lambda / d$  si ha interferenza distruttiva  $\rightarrow$  max ben separati



## Limitazioni dei microscopi

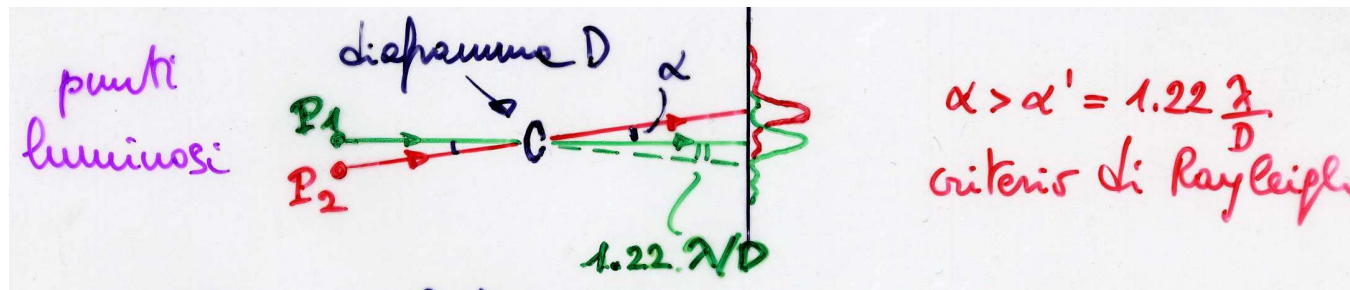
---

- l'ingrandimento del microscopio ottico è dato approx da
$$M = -(16 \text{ cm}/f_{ob})(25 \text{ cm}/f_{oc})$$
- limitazioni
  - aberrazioni geometriche → diaframmi, sistemi di lenti (perdita di luce)
  - aberrazioni cromatiche → lenti composte (perdita di luce, ogni rifrazione aria-vetro implica 4% di luce persa in riflessione, 4 lenti, 8 riflessioni, 32% di luce persa etc.)
  - $f_{ob,min} \sim 4 \text{ mm}$ ,  $f_{oc,min} \sim 10 \text{ mm}$   
→  $M \sim -1000$
  - limite intrinseco: dato dalla natura ondulatoria della luce, due punti luminosi appariranno in effetti come figure di diffrazione di larghezza  $\propto \lambda$



## Limitazioni dei microscopi (2)

- diffrazione da un'apertura / ostacolo di diametro  $D$ ,  
**larghezza della macchia**  $\sim 1.22\lambda/D$  – due punti saranno separabili solo se le macchie non si sovrappongono



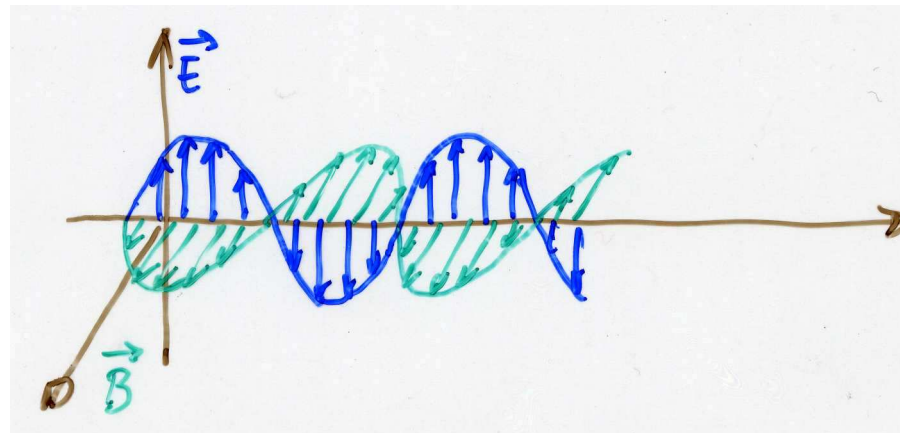
- si può mostrare che  $d_{\min} = 0.61\lambda/(n\sin\theta)$  dove  $n$  è l'ind. di rifraz. del mezzo intorno all'obietto. e  $\theta$  l'angolo sotto cui è visto l'obiettivo  $\rightarrow$  ingrand. utile  
 $M_{\text{utile}} \sim d/d_{\min} \sim 0.1 \text{ mm}/0.2 \mu\text{m} \sim 500$
- $\rightarrow$  obiettivi a immersione (olio  $n = 1.55$ ,  $\lambda' = \lambda/n$ ); UV, però lenti di  $\text{SiO}_2$  e fotografia  $\rightarrow$  microscopio elettronico,  $\lambda \propto 1/(mv)$  (vedi microfisica)



# Polarizzazione della luce

---

- le onde e.m. sono trasversali: si dimostra osservando la polarizzazione della luce, ad es. se  $\mathbf{E}$  oscilla // direzione fissa si ha polarizzazione lineare



- polarizzazione: si ottiene con polaroids (catene allungate conduttrici in una direzione, assorbono una componente di  $\mathbf{E}$ ), riflessione, dicroismo, birifrangenza



## Polarizzazione (2)

- ad es. polarizz. per riflessione

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 ; \quad \theta_r = \theta_1$$

$$\text{se } \alpha = 90^\circ, \quad \theta_2 = 90^\circ - \theta_r$$

$$\sin \theta_2 = \cos \theta_1$$

d'altra parte se le onde e.m.

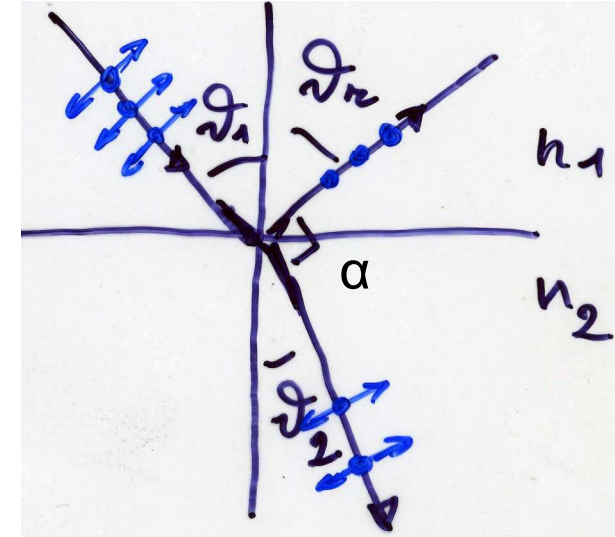
sono trasversali, l'onda riflessa,

dovuta all'oscillazione nel mezzo 2, non può avere una componente nella direzione di propagazione →

risulta polarizzata  $\perp$  al piano del disegno per un angolo  $\theta_1 = \theta_p$

$$\text{tg} \theta_p = \sin \theta_p / \cos \theta_p = \sin \theta_1 / \sin \theta_2 = n_2 / n_1$$

**legge di Brewster**





## Polarizzazione (3)

- se un fascio di luce traversa un (o più) polaroid, solo una componente di  $\mathbf{E}$  può passare, l'altra sarà assorbita → riduzione di ampiezza e di intensità
- legge di Malus, luce polarizzata linearmente in ingresso di ampiezza  $E_0$ , intensità  $I_0$

$$E_1 = E_0 \cos \theta_1 \quad I_1 = I_0 \cos^2 \theta_1$$

dove  $\theta_1$  è l'angolo fra  $\mathbf{E}$  e l'asse di trasmissione del polaroid, secondo cui la luce è polarizzata in uscita;

se la luce non è polarizzata,  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  
valor medio sul 1° quadrante,

$$E_1 = E_0 / \sqrt{2} \quad I_1 = I_0 / 2$$

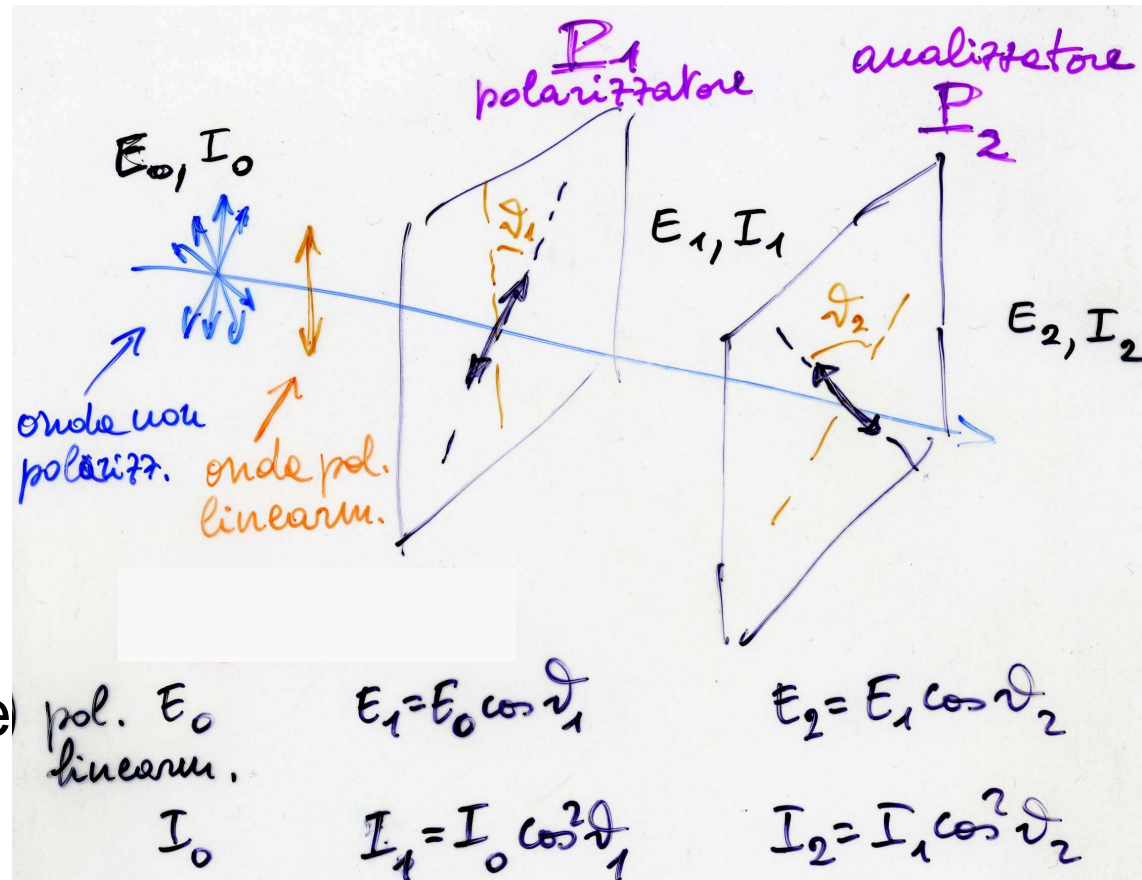




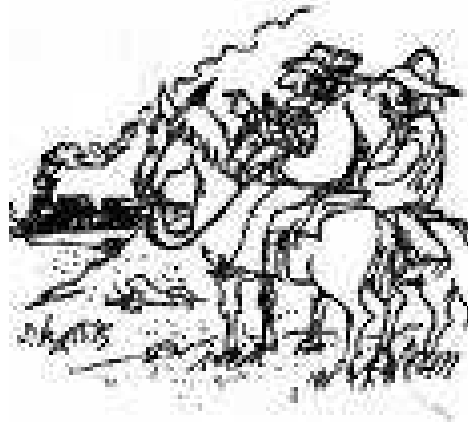


## Polarizzazione (4)

- con due polaroid in serie, il 2° vede la luce passata dal 1° e basterà applicare due volte la legge di Malus
- con questo sistema è possibile studiare ad es. una soluzione otticamente attiva posta fra  $P_1$  e  $P_2$  e misurarne la concentrazione  $\propto E$  angolo di cui ruota  $E$



non pol.	$E_0$ $I_0$	$E_1 = E_0/\sqrt{2}$ $I_1 = I_0/2$	$E_2 = E_0 \cos \theta_2 / \sqrt{2}$ $I_2 = I_0 \cos^2 \theta_2 / 2$
----------	----------------	---------------------------------------	---



Two cowboys marvelling at the  
Doppler effect in a train whistle

Fine di oscillazioni e onde