

# Oscillazioni e onde



Corso di Fisica per Farmacia Rn  
AA 2013/14



- Oscillazioni
  - circuito LC, sistema massa-molla, pendolo semplice
  - oscillazioni smorzate; oscillazioni forzate, risonanza
- Ottica geometrica
  - riflessione, specchi
  - rifrazione, fibre ottiche, diottri, lenti sottili, strumenti ottici
- Onde e ottica fisica
  - generalità, frequenza, lunghezza d'onda, velocità, intensità e ampiezza, principio di sovrapposizione, onde stazionarie
  - onde acustiche, livello d'intensità
  - principio di Huygens, diffrazione
  - interferenza della luce, reticolo di diffrazione, polarizzazione

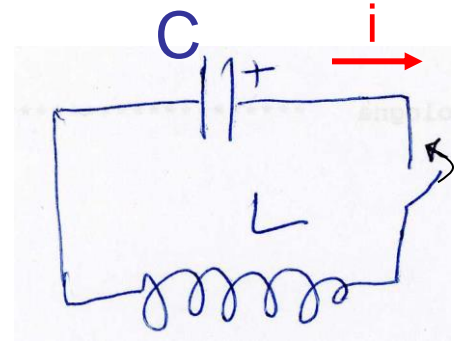


# Oscillazioni



# Circuito LC(\*)

- $t = 0$ , C carico,  $q = q_0$
- chiudo il tasto: comincia a circolare  $i$  (le cariche  $+$  migrano verso l'armatura sinistra) ed entra in azione L, l'energia presente in C (E) passa in L (B), il processo continua finchè  $i$  diventa max e C è scarico ( $q=0$ ), **a quel punto  $i$  continua a caricare + l'armatura sinistra (per inerzia) e l'energia presente in L (B) è trasferita a C (E) ... e così via sempre oscillando (non ci sono R!):** **somma dell'en. di C (E) e di L (B) = cost.**

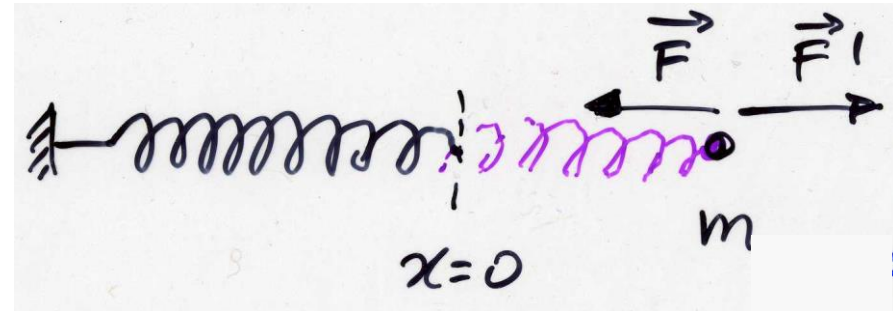


- Kirchhoff, a  $t$  generico:  $L di/dt + q/C = 0$   
ossia  $L d^2q/dt^2 + q/C = 0$   
cioè  $d^2q/dt^2 = -1/(LC)q = -\omega^2q$   
 $q(t) = q_0 \cos \omega t$  **soluzione del moto armonico**  
 $i(t) = dq/dt = -\omega q_0 \sin \omega t$   $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$



## (Cfr.) Sistema massa-molla

- una massa oscilla attaccata ad una molla (ad es. sopra un piano senza attriti)
- per spostare la massa (molla) di  $dx$  dalla posizione (allungamento)  $x$ :



$$d\mathcal{L} = Fdx = -kxdx$$

$$\mathcal{L} = \int_0^x -kxdx = -k \int_0^x xdx = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{dalla posiz. di equilibrio a } x)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}kx^2 = W(x) - W(0)$$

$$W(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{se pongo } W(0) = 0$$

$$A, \text{ spostamento massimo: } W(A) = \frac{1}{2} kA^2$$

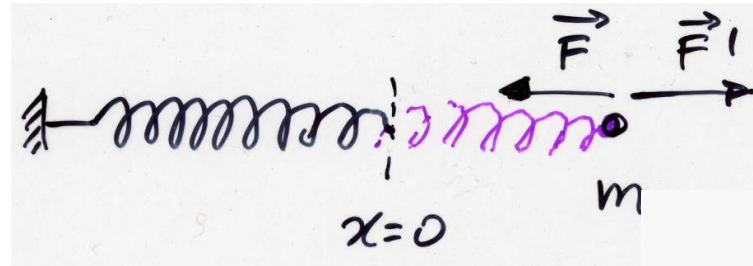
$$\text{en. cinetica della massa: } K = \frac{1}{2} mv^2$$

$$W(x) + K(x) = E_0 \quad \text{conserv. en. totale meccanica}$$

$$[ W(t) + K(t) = E_0 \quad \text{siccome } x = x(t), v = v(t) !]$$



# Energia nei sistemi meccanici



en. della molla (potenziale)

$$W = \frac{1}{2}kx^2 \quad [\text{cfr } q^2/(2C)]$$

ampiezza del moto  $A$

$$\text{en. totale: } E_0 = W(x) + K(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

pongo

$$\omega^2 = k/m = (v_{\max}/A)^2$$

eq. di moto

$$a = -(k/m)x = -\omega^2x \quad (\text{Il princ.: } ma = F = -kx)$$

soluzione con  $x=+A$  per  $t=0$ , matematicamente:

$$x(t) = A\cos\omega t$$

**moto armonico semplice**

$$v(t) = -\omega A\sin\omega t \quad (=dx/dt)$$

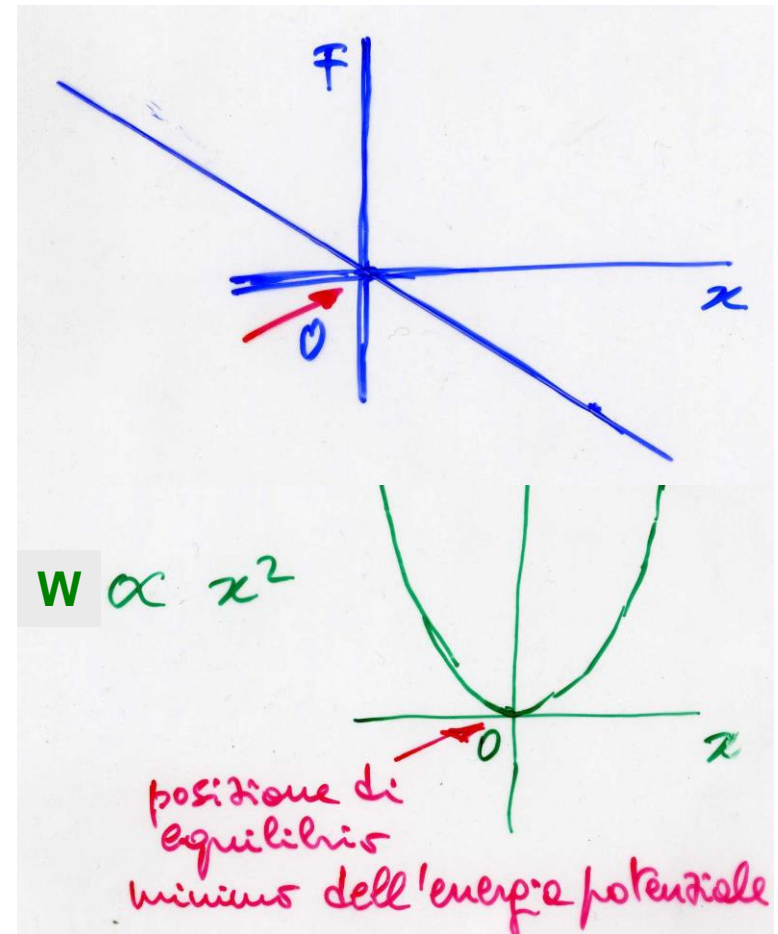
$$a(t) = -\omega^2 A\cos\omega t \quad (=dv/dt)$$



# Oscillazioni armoniche

- in generale: un sistema oscilla intorno ad una posizione di equilibrio stabile – con moto armonico semplice se la  $F$  di richiamo verso la posizione di eq. stabile è  $\propto -\text{spostamento}$  e c'è un'inerzia che fa superare la posiz. di equil. continuando il moto (piccole oscillazioni del pendolo, massa-molla, circuito LC, molecola  $H_2$ )

- $F(x) \propto -x$  k  $(a \propto -x)$
- $W(x) = -\mathcal{L}(x) \propto x^2/2$  m







# Oscillazione (passo passo)

- trasferimento: en. cinetica  $\longleftrightarrow$  en. potenziale

t	x	v	a	en.	$E_0$
0	+A	0	$-\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$
$t_1$	0	$-\omega A$	0	cin.	$\frac{1}{2}mv_{\max}^2$
$t_2$	-A	0	$+\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$
$t_3$	0	$+\omega A$	0	cin.	$\frac{1}{2}mv_{\max}^2$
$t_4$	+A	0	$-\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$

sposto il sistema dall'equilibrio e lo lascio andare

il moto si ripete uguale

- $t_4 = T$ ;  $t_2 = t_4/2 = T/2$  per simmetria
- $t_1 = t_2/2 = T/4$ ;  $t_3 = t_2 + (t_4 - t_2)/2 = 3T/4$  per simmetria
- $\omega = \sqrt{k/m} = v_{\max}/A \rightarrow v_{\max} = \omega A$





## Soluzione (senza derivate)

- uso la cons. dell'en. meccanica (e  $m=k/\omega^2$ )

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \cancel{\frac{1}{2}kA^2}(x/A)^2 + \cancel{\frac{1}{2}kA^2}(v/(\omega A))^2 = \cancel{\frac{1}{2}kA^2}$$

$$\rightarrow (x(t)/A)^2 + (v(t)/(\omega A))^2 = 1 \quad \text{cfr } \cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1 \quad \forall \Phi$$

- se voglio  $x$  e  $v$  periodiche con periodo  $T$  prendo

$$x(t)/A = \cos(2\pi t/T) \quad v(t)/(\omega A) = -\sin(2\pi t/T)$$

che soddisfano  $x=A$  per  $t=0$  e  $v(T/4) = -v_{\max} = -\omega A$

- $T$  è un tempo caratteristico del sistema

$$T = 1/\nu = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{(m/k)}$$

l'unico **dimensionalmente** possibile

$$[\omega^{-1}] = [(m/k)^{0.5}] = [(M/(MT^{-2}))^{0.5}] = [T]$$



## Oscillazioni (cont.)

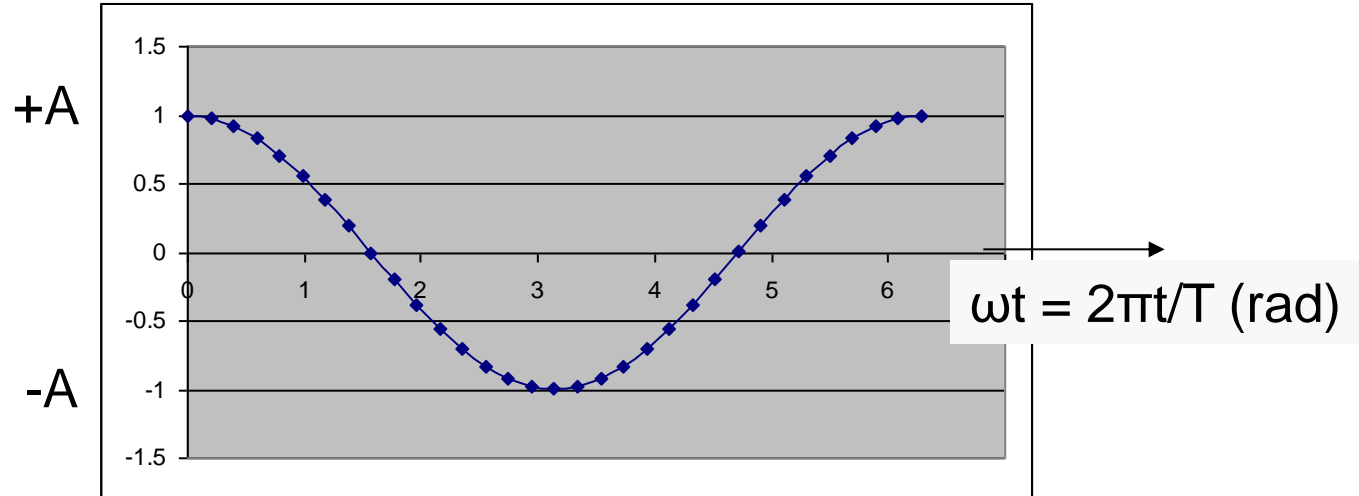
- tutte le oscillazioni si comporteranno allo stesso modo, cambia solo  $\omega$  ( $T$ ) a seconda del sistema e cambia lo spostamento dalla posiz. di equilibrio (distanza, angolo, carica)
- massa-molla  $\omega = \sqrt{k/m}$   $T = 2\pi\sqrt{m/k}$
- pendolo semplice  $\omega = \sqrt{g/L}$   $T = 2\pi\sqrt{L/g}$
- circuito LC  $\omega = 1/\sqrt{LC}$   $T = 2\pi\sqrt{LC}$
- etc.
- spostamenti, velocità (lineari, angolari, correnti), accelerazioni (lineari, angolari, deriv. della corrente) saranno dati da funzioni sinusoidali (moto armonico semplice di pulsazione  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ )

piccole  
oscillaz.

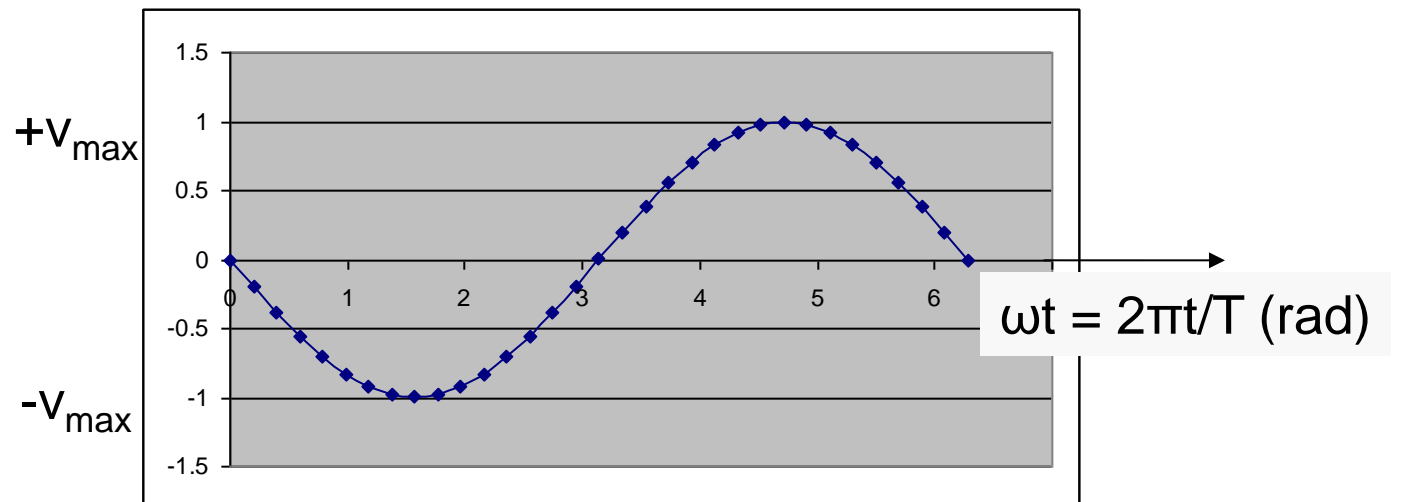


# Oscillazioni (cont)

$x(t)$



$v(t)$

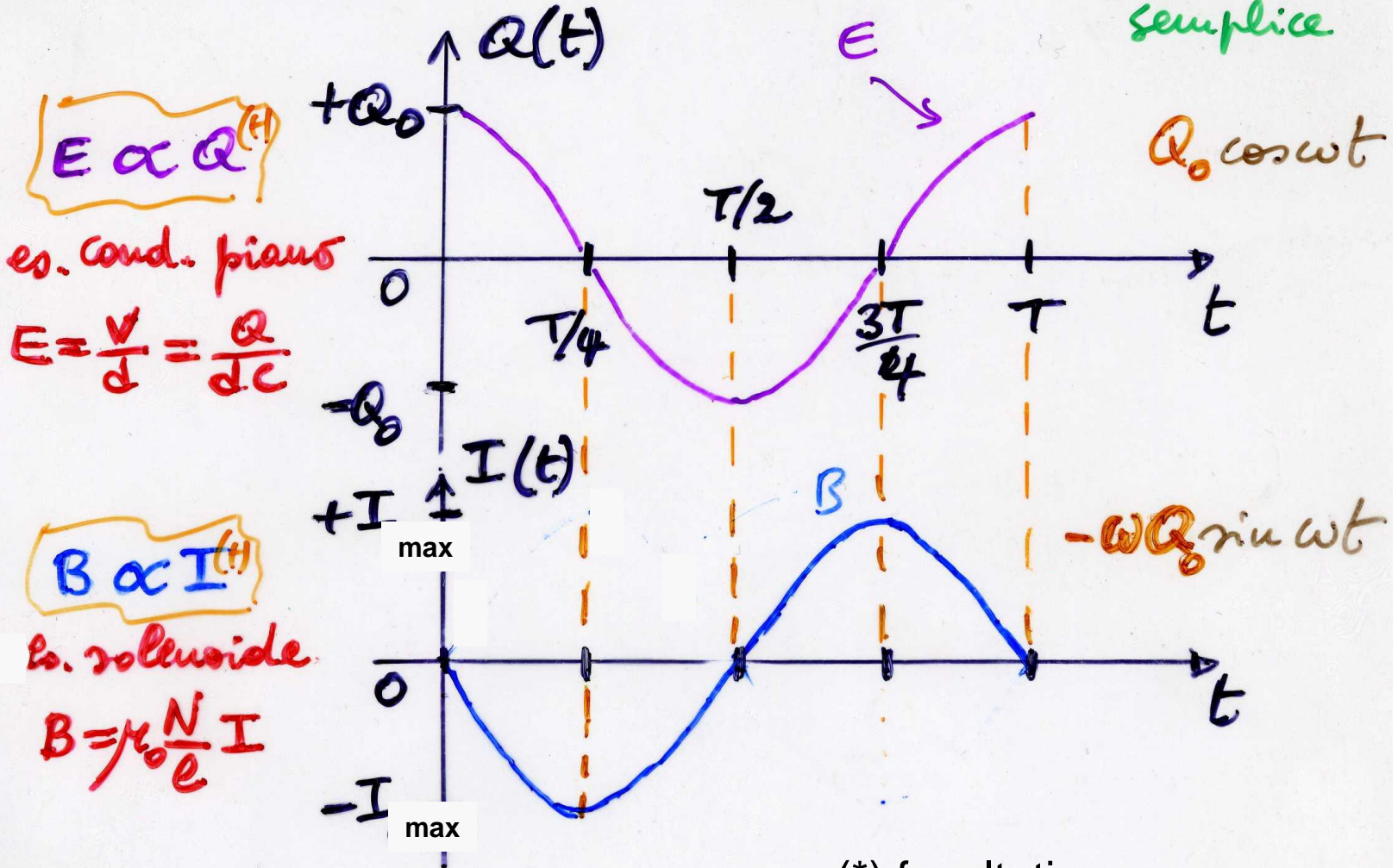




# Oscillazioni (cont.)(\* )

Circuiti LC - oscillazioni e.m.

moti  
armonici  
semplice



(\* ) facoltativo



# Pendolo semplice

- $mg \cos\theta = F$  *tensione del filo*

- ~~$-mg \sin\theta = ma = mL\alpha$~~

- piccole oscill.:  $\theta_0$  piccolo

$\rightarrow \sin\theta \sim \theta$

- $-g\theta = L\alpha$  ( $= Ld^2\theta/dt^2$ )

$$\omega^2 = g/L$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

indipendenti da  $\theta_0$

$$g = 4\pi^2 L/T^2$$

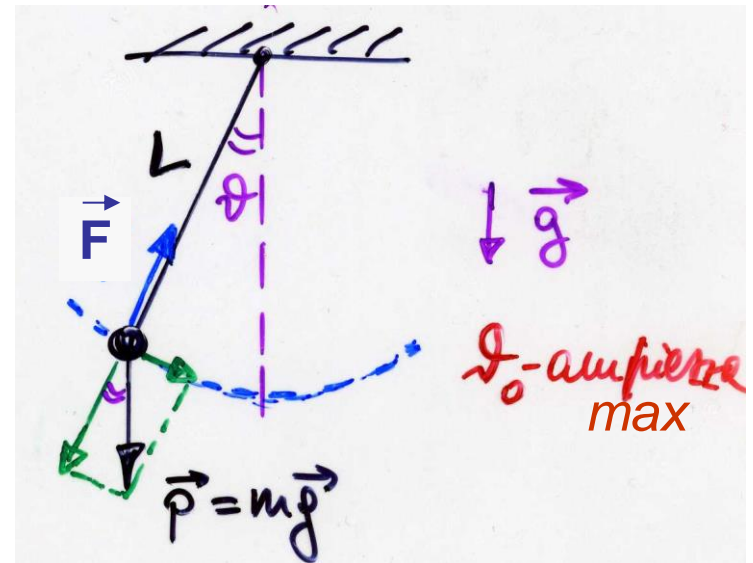
misurando  $L, T \rightarrow g$

- (\*) [pendolo fisico:  $m \rightarrow I$ ;  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{L} \wedge \mathbf{p}(mg)$

$$-mgL \sin\theta = I\alpha; \quad -mgL\theta = I\alpha; \quad T = 2\pi\sqrt{mgL/I}$$

con  $L$  distanza del baricentro dal centro di sospensione]

(\*) paragrafo facoltativo





# Angoli piccoli (\*)

$$\theta = 90^\circ = 1.5708 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 1$$

$$(\sin \theta - \theta) / \sin \theta = -0.57$$

$$\theta = 30^\circ = 0.5236 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 0.5$$

$$(\sin \theta - \theta) / \sin \theta = -0.047$$

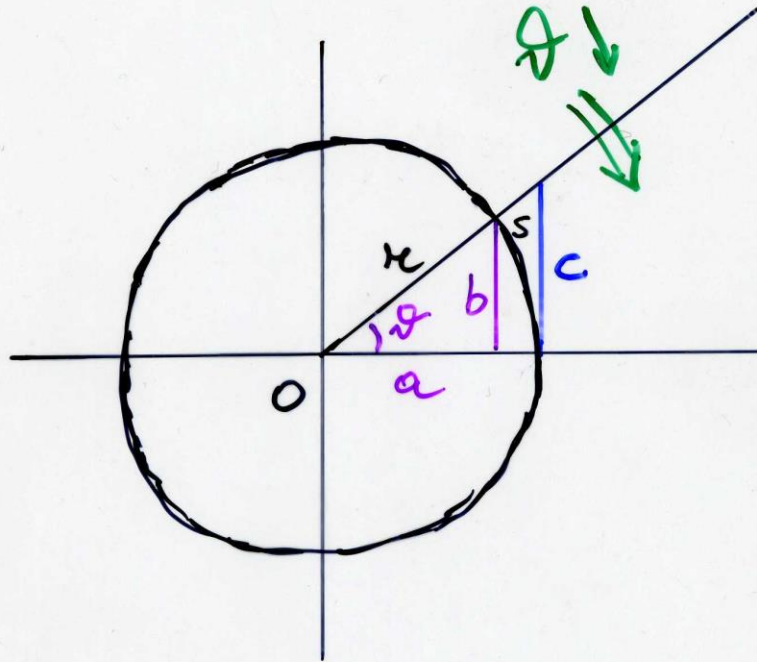
$$\theta = 3^\circ = 0.05236 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 0.05234$$

$$\text{tg} \theta = 0.05241$$

$$(\sin \theta - \theta) / \sin \theta =$$
$$= -0.00046$$

$$(\text{tg} \theta - \theta) / \text{tg} \theta =$$
$$= +0.00091$$



$$\sin \vartheta = \frac{b}{r}$$
$$\cos \vartheta = \frac{a}{r}$$
$$\text{tg} \vartheta = \frac{b}{a} = \frac{c}{r}$$
$$\vartheta = \frac{s}{r}$$

$$\frac{b}{r} < \frac{s}{r} < \frac{c}{r} (= \frac{b}{a})$$

$$\sin \vartheta < \vartheta < \text{tg} \vartheta$$

(I Quadrante)

$$\vartheta \text{ piccoli: } \sin \vartheta \sim \vartheta \sim \text{tg} \vartheta$$



# Oscillazione e.m., applicazione

- oscillazioni del circuito LC: **energia di  $\mathbf{E}$  confinata in C**  
 $\leftrightarrow$  **energia di  $\mathbf{B}$  confinata in L**
- supponiamo di avere una regione dello spazio vuota in cui è presente un campo  $\mathbf{E}$  (o  $\mathbf{B}$ ) oscillante, per le leggi dell'e.m. sarà indotto un campo  $\mathbf{B}$  (o  $\mathbf{E}$ ) oscillante
- qualitativamente, questi campi oscillanti generano onde e.m. che si propagano nello spazio con velocità  $c = 1/\sqrt{(\epsilon_0\mu_0)}$ , con la frequenza  $\nu$  dell'oscillazione, con lunghezza d'onda  $\lambda = c/\nu$  e con densità di energia (vedi p. 55-58)

$$\eta_e + \eta_m = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}B^2/\mu_0 = \text{cost}$$

(mentre le oscillazioni sono confinate in una regione dello spazio, quindi hanno solo frequenza  $\nu$ )





# Oscillazioni smorzate (\*)

- sistema massa-molla **con attrito**

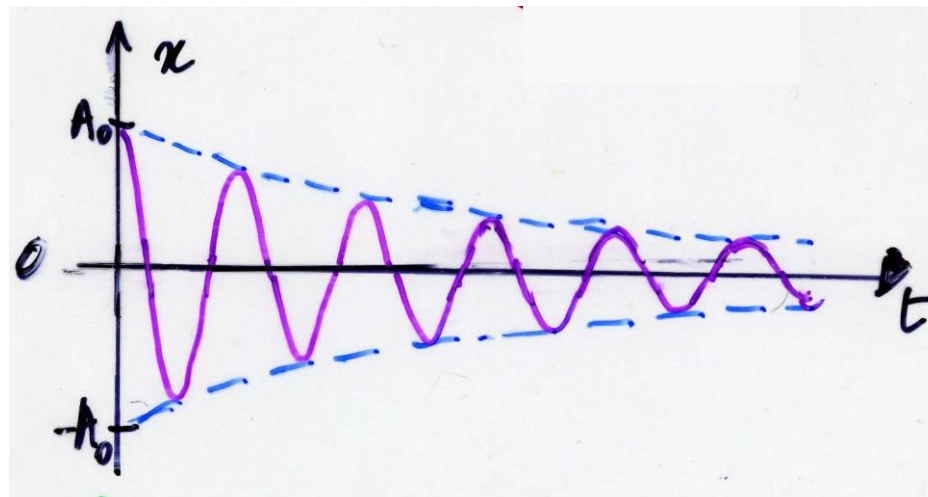
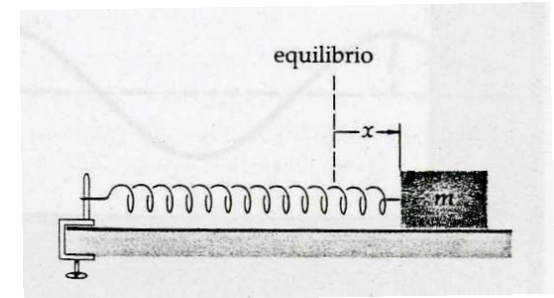
$$ma + \gamma v + kx = 0 \quad \text{termine } \propto v, \text{ attrito, smorzamento}$$

- $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2(t) < \frac{1}{2}kA_0^2$

ad es.  $A(t) = A_0 \exp(-\gamma t / (2m))$

- se  $\gamma \geq 2\sqrt{km}$  il moto è aperiodico

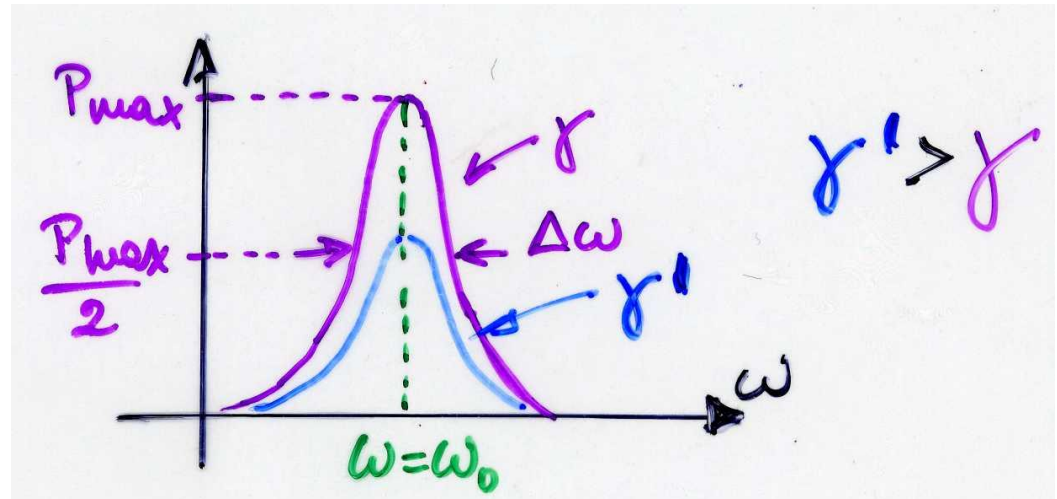
se  $\gamma < 2\sqrt{km}$  oscillazione con  $A$  decrescente





# Oscillazioni forzate, risonanza (\*)

- sistema sottoposto ad una  $F$  esterna sinusoidale  
ma + ( $\gamma v$ ) +  $kx = F(t) = F_e \cos \omega t$   
 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$     $\nu_0 = \omega_0/2\pi$    **frequenza propria del sistema**
- se  $\gamma=0$  il trasferimento di energia diventa  $\infty$  per  $\omega=\omega_0$   
(in pratica si avrà una 'rottura')
- se  $\gamma \neq 0$  il trasferimento di energia (potenza) è max per  $\omega=\omega_0$  : es. assorb. di radiazione e.m. da parte di atomi e molecole

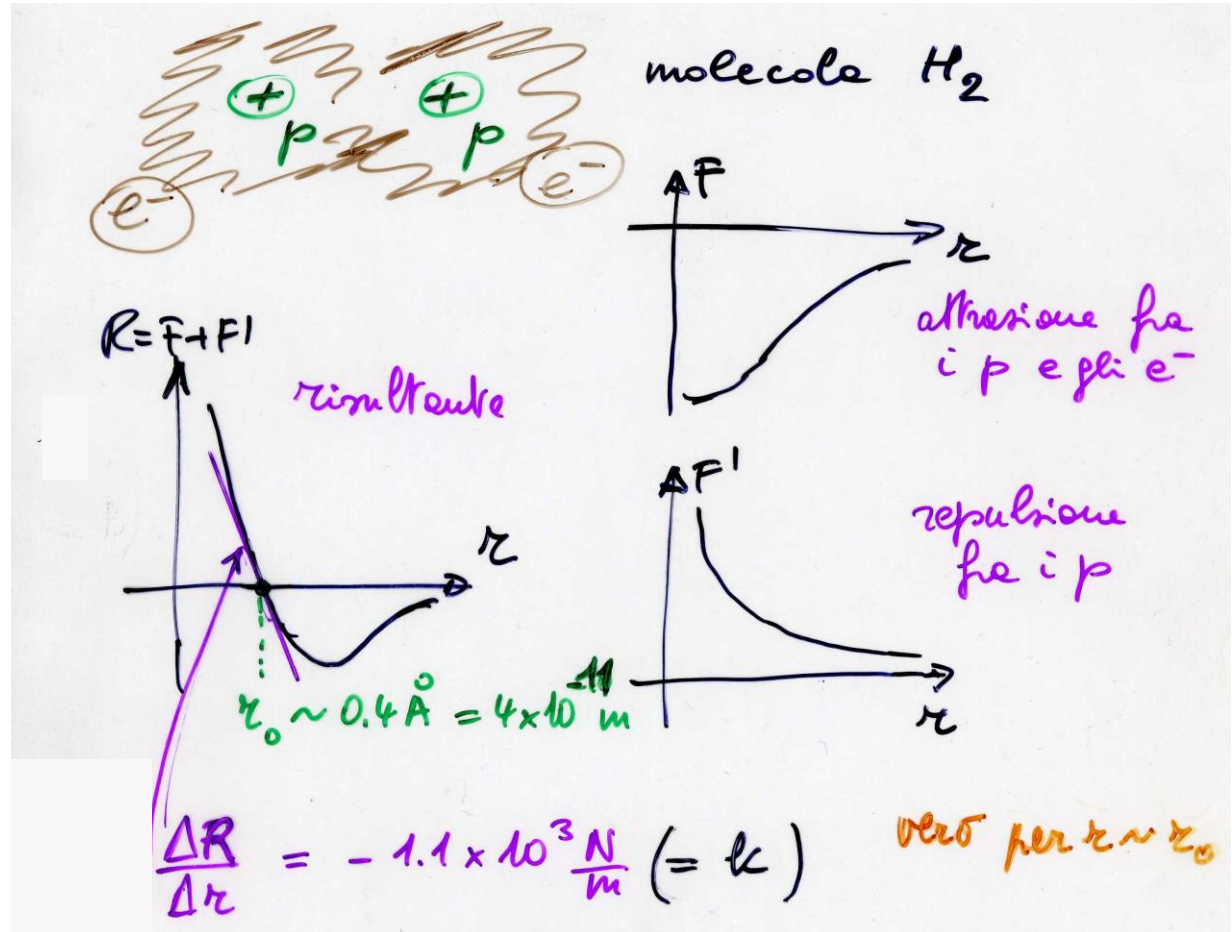




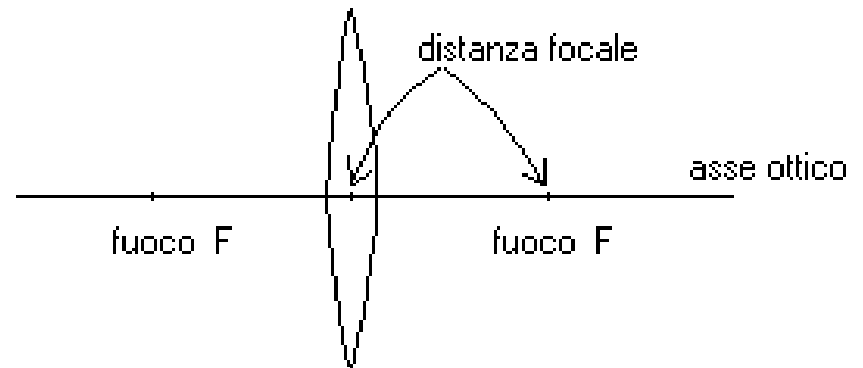
# Oscillazioni, applicazione (\*)

- molecola  $H_2$   $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{1.1 \cdot 10^{-3} / 1.67 \cdot 10^{-27}} \sim 0.8 \cdot 10^{15}$  rad/s  
 $\nu = 1.3 \cdot 10^{14}$  Hz  
 $\lambda = c/\nu = 2.5 \mu\text{m}$

→ se si eccita  $H_2$  con luce IR, si metterà ad oscill., assorbirà energia e posso 'vederlo'



(\*) facoltativo



## Ottica geometrica



# La luce

- onda e.m.  $v = \lambda \nu$
- ampiezza:  $\vec{E}$
- intensità:  $I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E^2$  \*
- velocità:  $c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  \*
- spettro e.m.
  - $\lambda \in (\sim 10^{-18} \div \sim 10^5) \text{ m}$  \*
  - $\nu \in (\sim 10^3 \div \sim 10^{26}) \text{ Hz}$
- visibile
  - $\lambda \in (0.4 \div 0.7) \times 10^{-6} \text{ m}$  \*
  - $\nu \in (4.3 \div 7.5) \times 10^{14} \text{ Hz}$

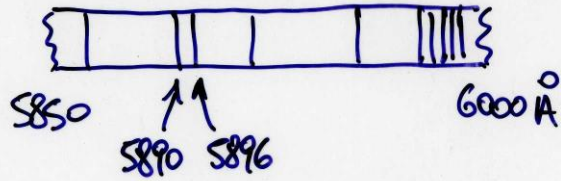
energia/(m<sup>2</sup>s)

\* nel vuoto

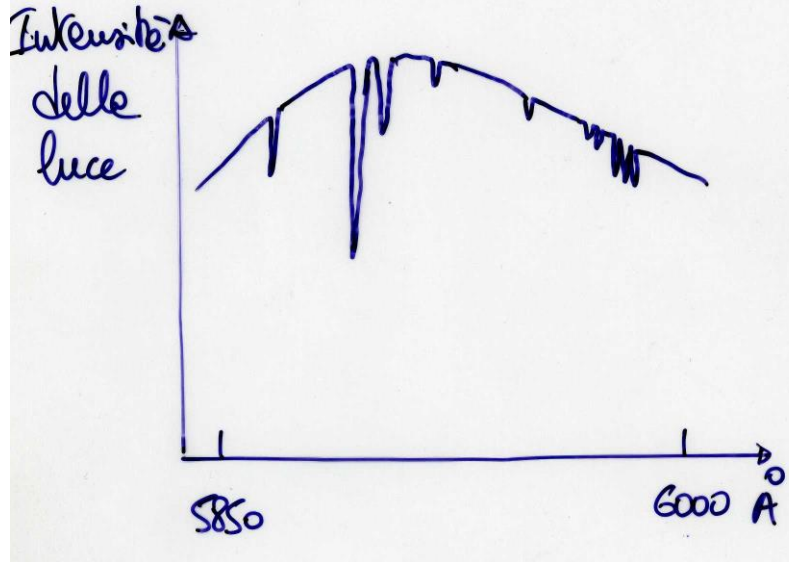




# Luce visibile



linee scure  
assorbimenti



Spettro  
Solare

legge di Wien  
 $\lambda = 2.898 \text{ mm}/T(K)$

$T_{\text{sup. sole}} \approx 5800 \text{ K}$

$\lambda$ (nm)	colore
400-450	violetto
450-500	blu
500-550	verde
550-600	giallo
600-650	arancione
650-700	rosso



## Visione UV (renne)

---

- Reindeer are thought to be the only mammals that can see ultraviolet light. A study conducted by researchers from the University College London in 2011 revealed that reindeer can see light with wavelengths as low as 320 nm, considerably below the human threshold of 400 nm. It is thought that this ability helps them to survive in the Arctic, because many objects that blend into the landscape in normally visible light, such as urine and fur, produce sharp contrasts in ultraviolet.[22]



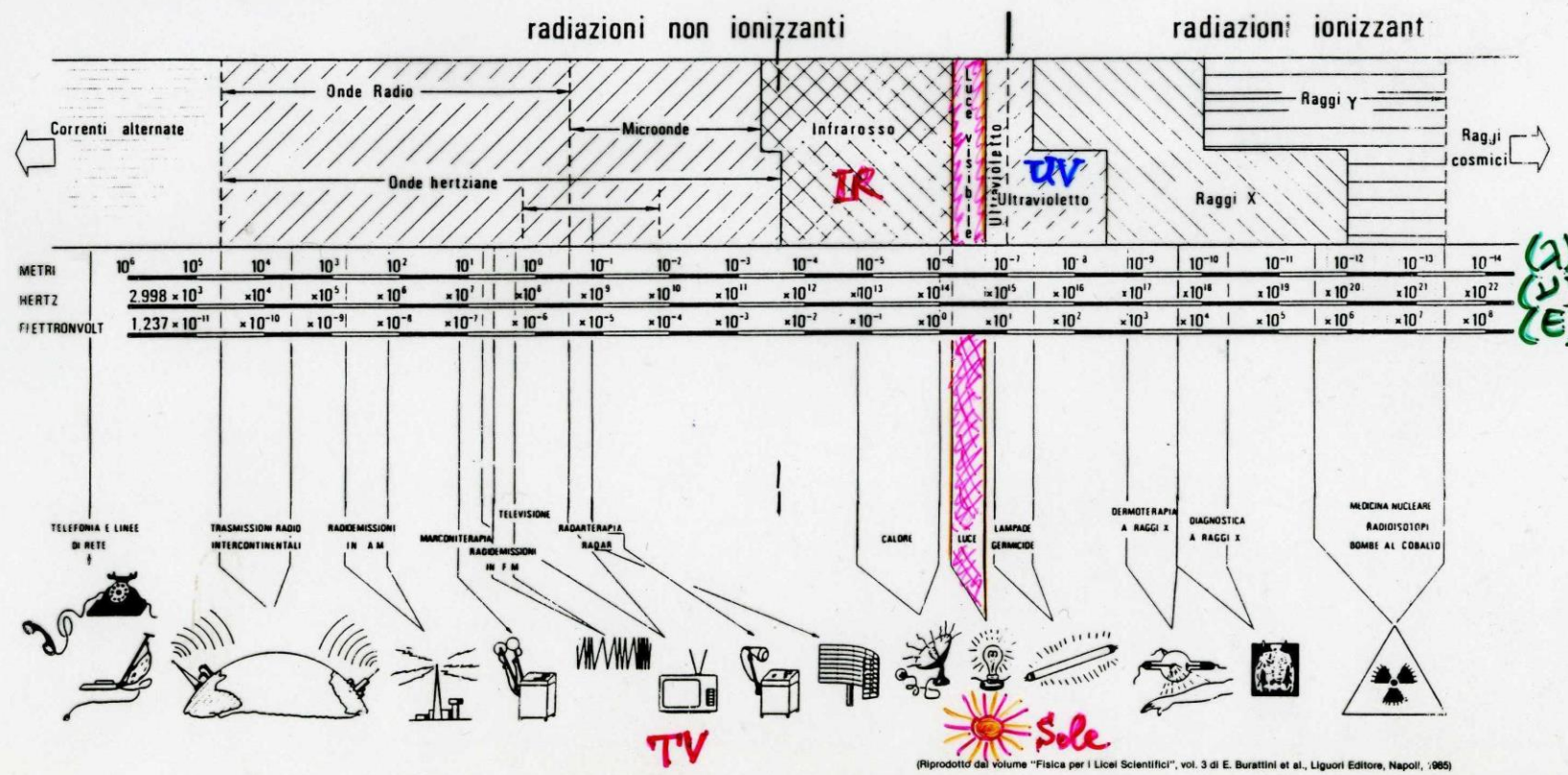


# Spettro delle onde e.m. (\*)

**La luce**  
Spettro delle onde elettromagnetiche

$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$  (esatte)  
 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

luce di sincrotrone



(Riprodotta dal volume "Fisica per i Licei Scientifici", vol. 3 di E. Burattini et al., Liguori Editore, Napoli, 1985)



# Propagazione della luce

- nel vuoto (dalle eq. di Maxwell, e.m.), velocità dell'onda

$$c = 1/\sqrt{(\epsilon_0\mu_0)} = 299792458 \text{ m/s}$$

massima velocità di un segnale

- mezzi trasparenti omogenei e isotropi

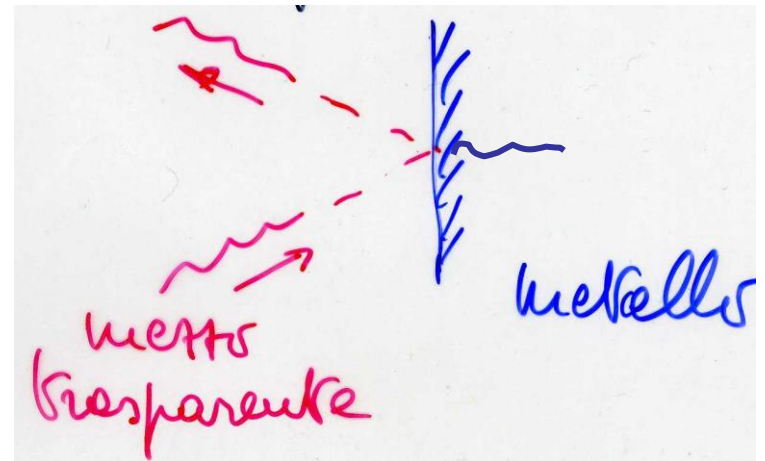
$$\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0 \quad \epsilon_r > 1; \quad \mu \sim \mu_0$$

$$v = 1/\sqrt{(\epsilon_r\epsilon_0\mu_0)} = c/n \quad \rightarrow \quad n = \sqrt{\epsilon_r}$$

indice di rifrazione

$$n = c/v \quad n \geq 1$$

- mezzi assorbenti, metalli:  
sono parzialmente riflettenti  
(mentre parte dell'energia è  
assorbita entro  $1-2 \lambda$ )





# Condizioni dell'ottica geometrica

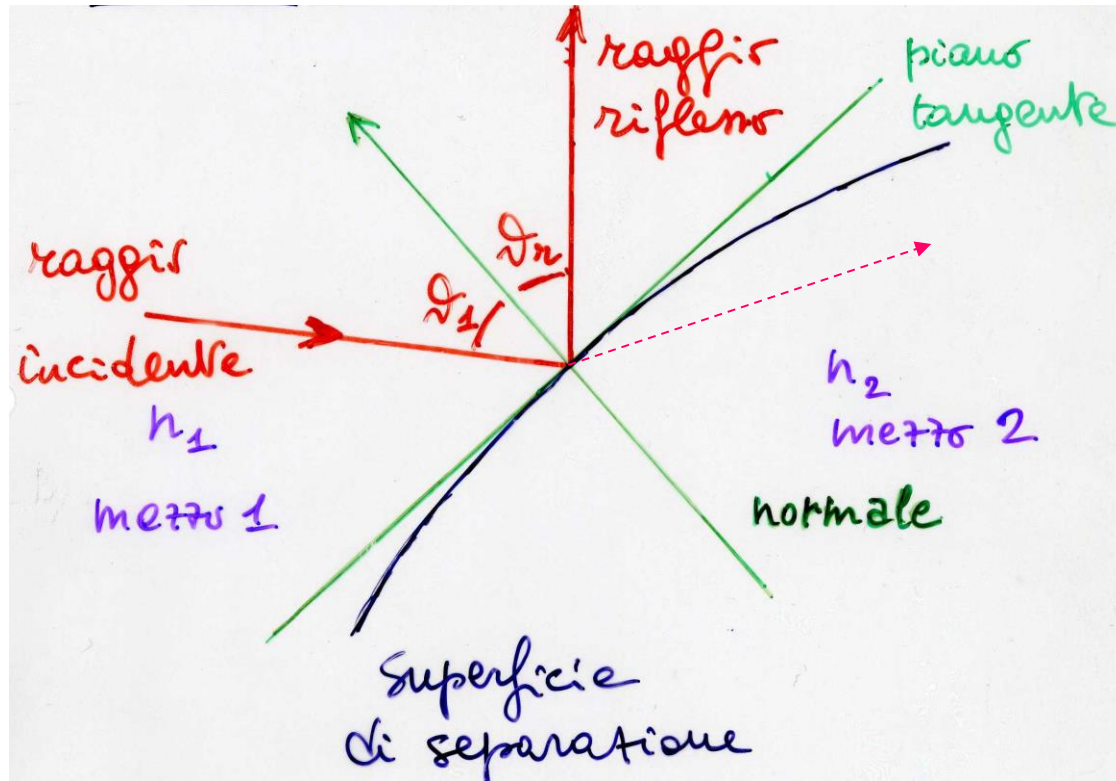
---

- limite per  $\lambda \rightarrow 0$  (dimensioni di ostacoli, disomogeneità etc.,  $d \gg \lambda$ )
- si considera la propagazione dei raggi luminosi
- nei mezzi trasparenti omogenei e isotropi la luce si propaga in linea retta
- i raggi luminosi sono deviati da ostacoli, disomogeneità etc.
  - riflessione (nello stesso mezzo) al confine fra mezzi diversi
  - rifrazione (nel secondo mezzo) al passaggio fra mezzi diversi





# Riflessione



- leggi della riflessione

- r. incidente, normale, r. rifleso  $\in$  stesso piano

- $\theta_r = \theta_i$

- $I_{\text{inc.}} = I_{\text{rifl.}} + I_{\text{trasm.}}$

(cons. dell'energia)



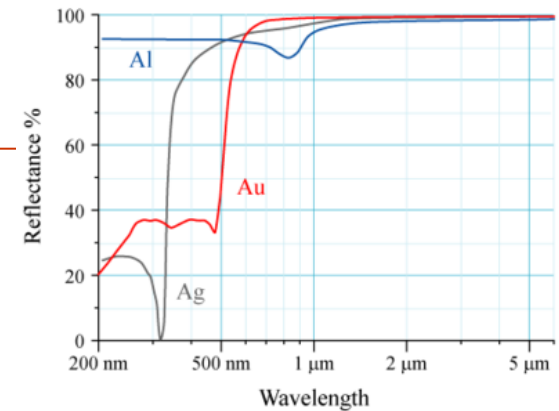
# Riflessione, potere riflettente

- $R = I_r/I_i \leq 1$     potere riflettente
- incidenza normale ( $\theta_1 = 0$ )
  - aria-metallo, specchi,  $R(550 \text{ nm})$ :  $\sim 0.93(\text{Ag})$ ,  $\sim 0.92(\text{Al})$ ,  $\sim 0.85(\text{Au})$ ,  $\sim 0.56(\text{Fe})$  (da un mezzo trasparente ad uno assorbente)
  - mezzo trasparente 1 – mezzo trasparente 2

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left( \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2$$

ad es. aria-vetro, lenti:  $n_1 \sim 1$ ,  $n_2 \sim 1.5$ ,  $R \sim 0.04$  ( $\rightarrow$  la riflessione **non** è il fenomeno dominante)

- incidenza rasente ( $\theta_1 = 90^\circ$ )
  - $R = 1$





# Sistema ottico

---

- fa corrispondere un'immagine ad un oggetto oppure viceversa: si propagano i raggi luminosi, reversibili
- stigmatico: ad un punto *oggetto* corrisponde un solo punto *immagine* (punti coniugati)
- se il sistema è stigmatico, basta conoscere due raggi per trovare la corrispondenza (altri r. possono servire per verificare che la corrispondenza trovata è corretta)
- ad es. riflessione: specchio piano, specchio sferico etc.; rifrazione: lenti, microscopi etc.



# Specchio piano

costruzione dell'immagine:  
l'immagine è virtuale dritta,  
non vi passa energia

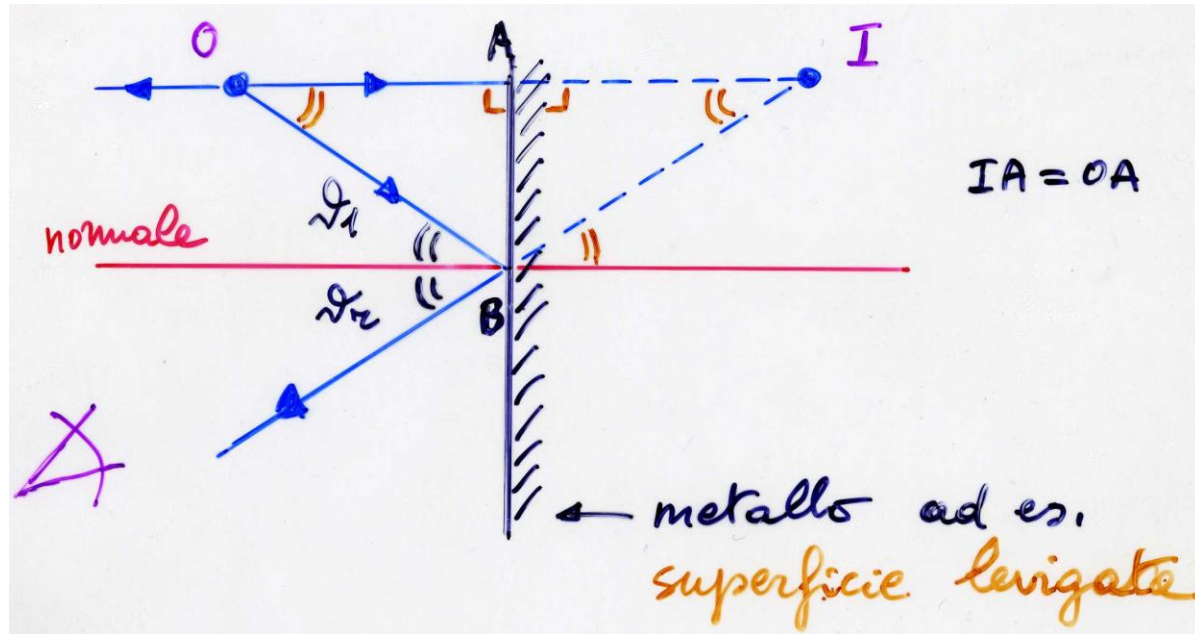
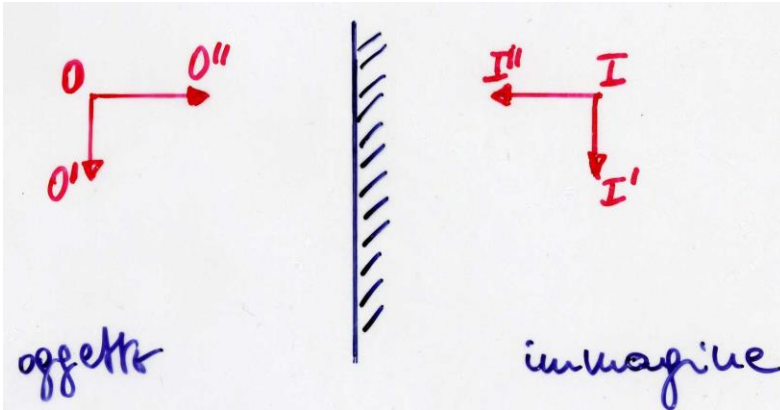
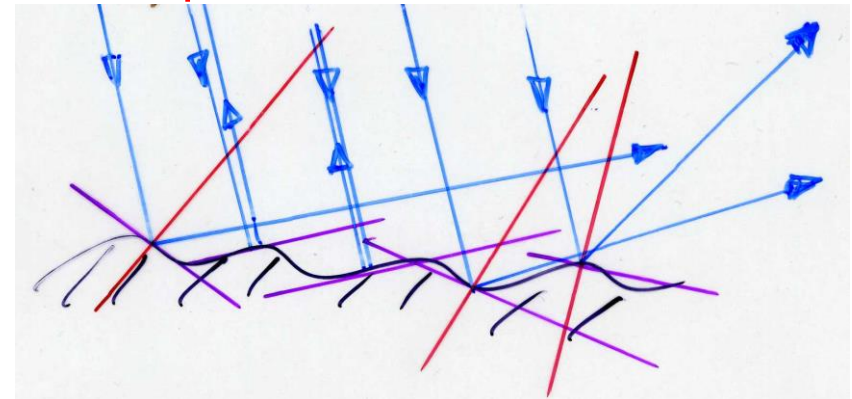


immagine trasversa e longitudinale



superficie ruvida, diffusione



ingrandimento:  $+1(t)$ ,  $-1(l)$



# Specchi sferici, fuoco (\*)

- C centro di curvatura, r raggio, V vertice
- CV asse ottico
- lo sp.sf. è stigmatico se la calotta in V è piccola,  $\theta$  piccolo
- $AD = CD$ ;  $AC = r$
- $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos\theta$

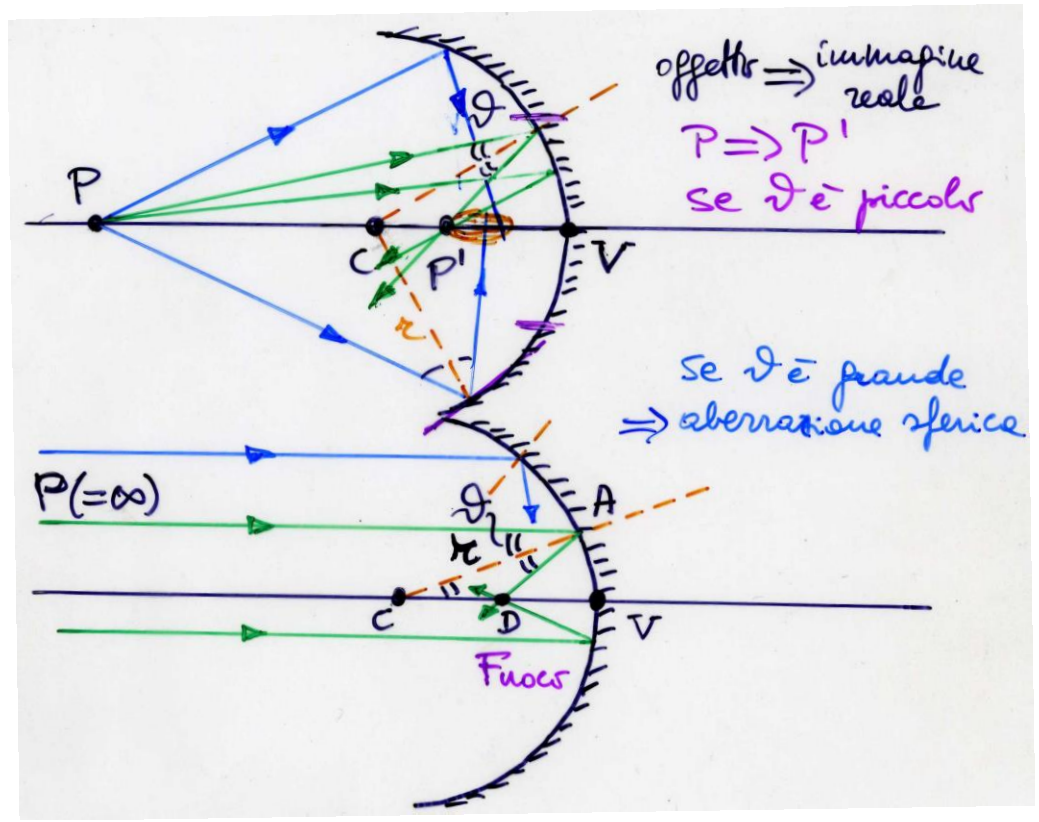
$$\cancel{CD}^2 = r^2 + \cancel{CD}^2 - 2r \cdot CD \cos\theta$$

$$CD = r / (2 \cos\theta)$$

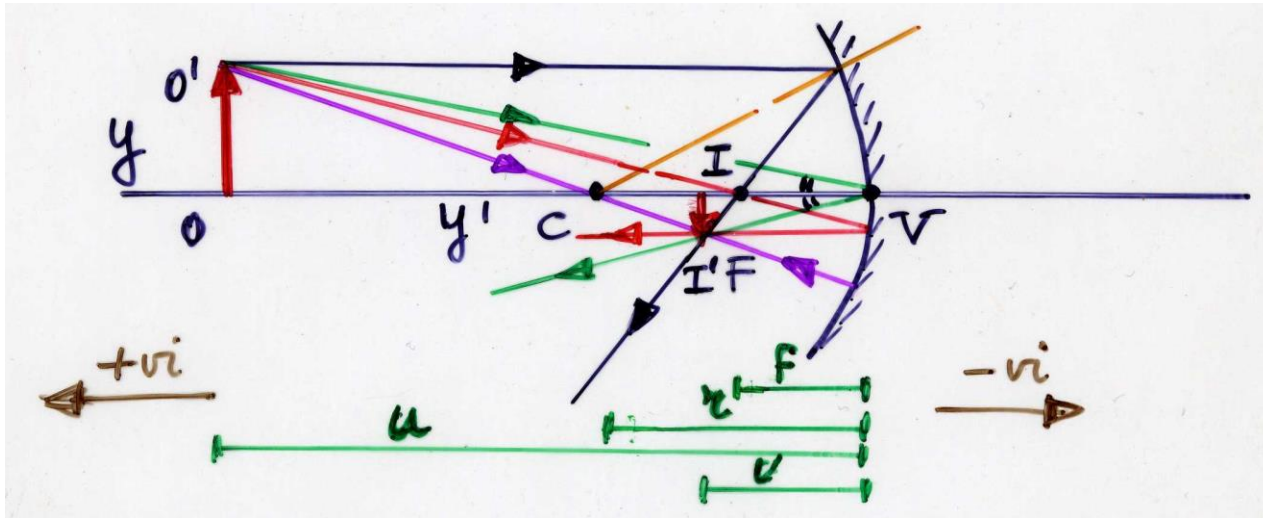
se  $\theta \sim 0$ ,  $CD = DV = r/2 \Rightarrow$   $f = r/2$

( $\theta \neq 0$ ,  $\cos\theta \neq 1$ :  $5^\circ$ , 0.9962;  $\Delta \sim 4\%$ )

fuoco, coniugato di  $P = \infty$



# Costruzione dell'immagine con lo specchio sferico(\*)



- ↔ raggio || all'asse, si riflette passando per F
- passante per F, si riflette || all'asse
- passante per C ( $\theta_1=0$ ), si riflette nella direz. d'incidenza
- passante per V:  $OO'V$  e  $II'V$  simili  $\rightarrow OO'/u = II'/v$

$$m = y'/y = -v/u$$

ingrandimento lineare trasversale



# Formula dei punti coniugati(\*)

- O e I, O' e I' p. coniugati

- OO'V e II'V simili:

$$OO'/II' = u/v$$

- OO'C e II'C simili

$$OO'/II' = (u-r)/(r-v)$$

$$\rightarrow u/v = (u-r)/(r-v)$$

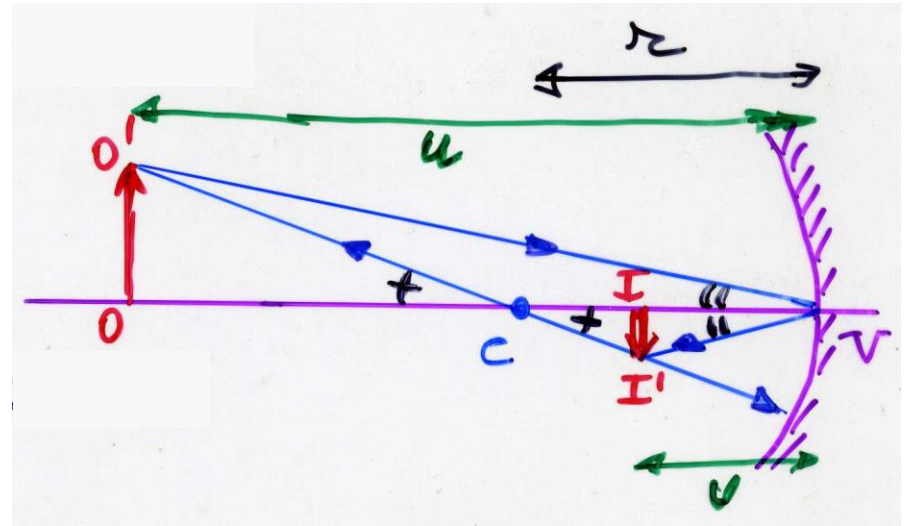
$$ru - uv = uv - rv$$

(moltiplico per  $1/(ruv)$  a dx e sx)

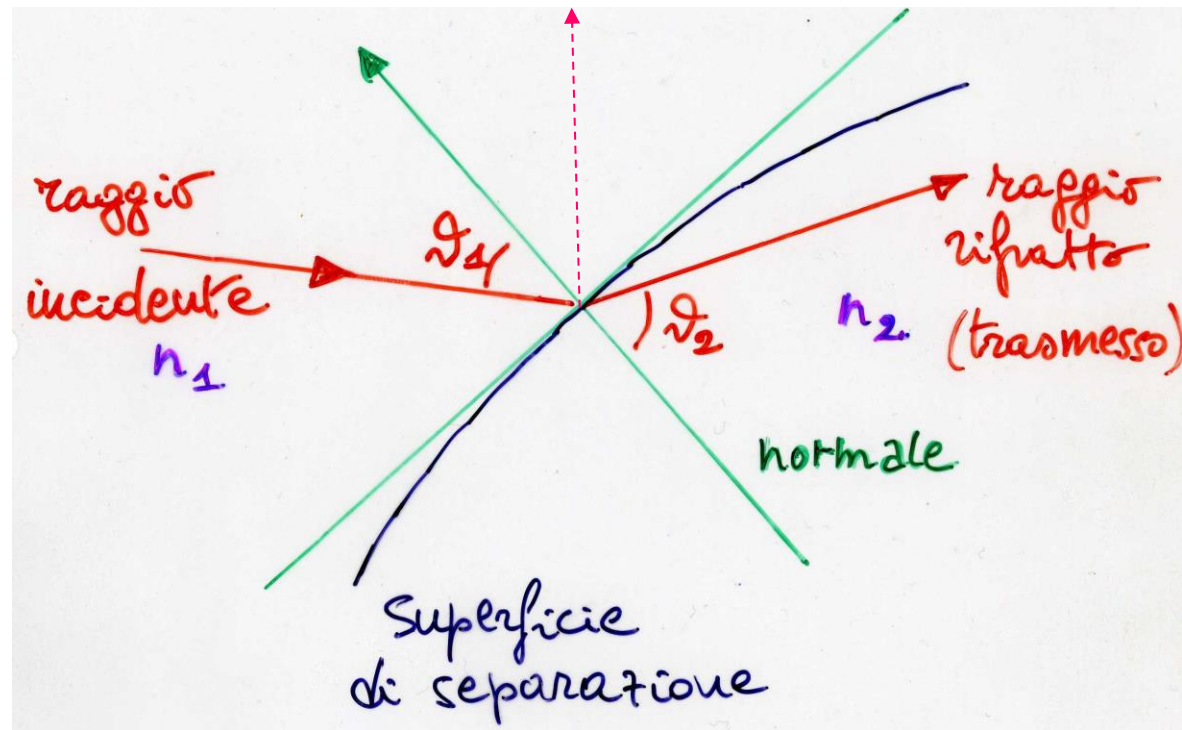
$$1/v - 1/r = 1/r - 1/u$$

$$1/u + 1/v = 2/r = 1/f$$

formula dei punti coniugati (degli specchi)



# Rifrazione



- leggi della rifrazione (trasmissione)
  - r. incidente, normale, r. rifratto (trasmesso)  $\in$  stesso piano
  - $\sin\theta_2 = (n_1/n_2)\sin\theta_1$  (legge di Snell)
  - $I_{\text{inc.}} = I_{\text{rifl.}} + I_{\text{trasm.}}$  (cons. dell'energia)





# Legge di Snell

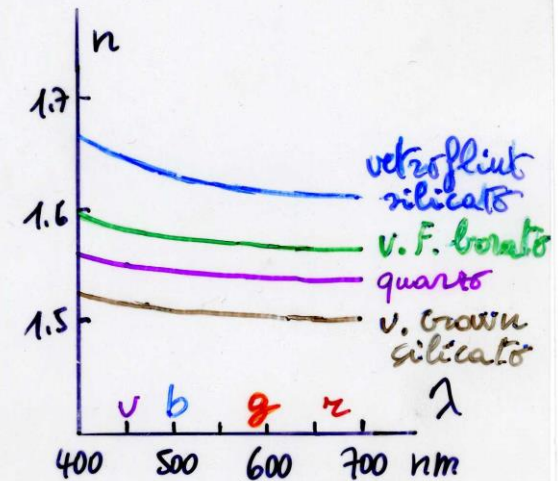
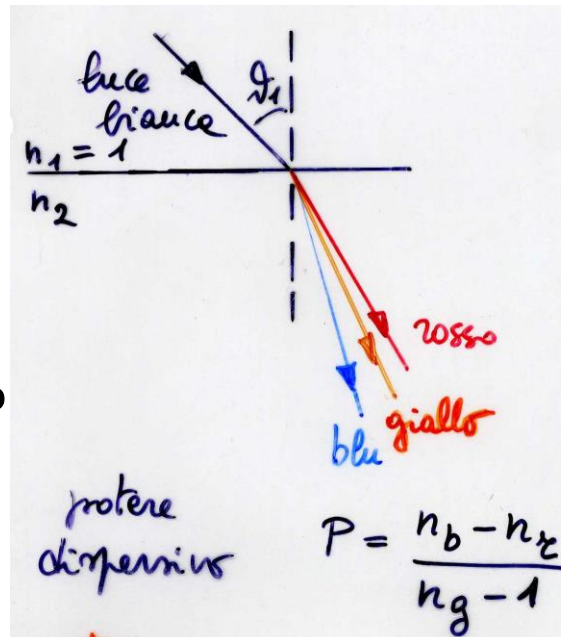


- $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$
- per angoli piccoli,  $\sin \theta \sim \theta \rightarrow n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$   
**es. aria-vetro**  $\theta_1 = 15^\circ$ ,  $n_{\text{aria}} = 1$ ,  $n_{\text{vetro}} = 1.52$   
 $\sin \theta_1 / \sin \theta_2 = 1.52$ ;  $\theta_1 / \theta_2 = 1.53$ ;  $\Delta = 7\%$
- anche  $\sin \theta_1 / v_1 = \sin \theta_2 / v_2$  oppure  $\sin \theta_1 / \lambda_1 = \sin \theta_2 / \lambda_2$
- dispersione,  $n = n(\lambda)$

potere dispersivo

$$P \sim 0.009 / 0.5 = 1.8\%$$

(vedi pag. 51)





## Legge di Snell (2)

---

- $n_1 < n_2$  (da un mezzo otticamente meno denso ad uno più denso)

$$\sin\theta_2 = (n_1/n_2)\sin\theta_1 < \sin\theta_1 \rightarrow \theta_2 < \theta_1$$

il raggio rifratto si avvicina alla normale

es. H<sub>2</sub>O-vetro  $n_1 = 1.33$   $n_2 = 1.52$ ,  $\sin\theta_2 = 0.875 \sin\theta_1$   
→ se  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 25.9^\circ$

- $n_2 < n_1$  (da un mezzo otticamente più denso ad uno meno denso)

$$\sin\theta_2 = (n_1/n_2)\sin\theta_1 > \sin\theta_1 \rightarrow \theta_2 > \theta_1$$

il raggio rifratto si allontana dalla normale

es. vetro-H<sub>2</sub>O  $n_1 = 1.52$   $n_2 = 1.33$ ,  $\sin\theta_2 = 1.14 \sin\theta_1$   
→ se  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 34.8^\circ$





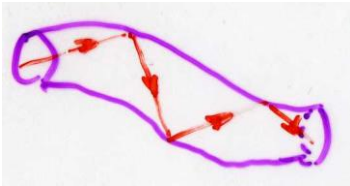
# Riflessione totale

- $n_1 > n_2$ : se aumento  $\theta_1$  aumenta anche  $\theta_2$  ... fino a che è possibile, si arriva a  $\theta_2 = \pi/2$  e allora non ci sarà più rifrazione, ma solo riflessione (riflessione totale); l'angolo  $\theta_1$  corrispondente si chiama angolo limite

$$\sin\theta_{1\text{lim}} = (n_2/n_1)\sin(\pi/2)$$

$$\theta_{1\text{lim}} = \arcsin(n_2/n_1)$$

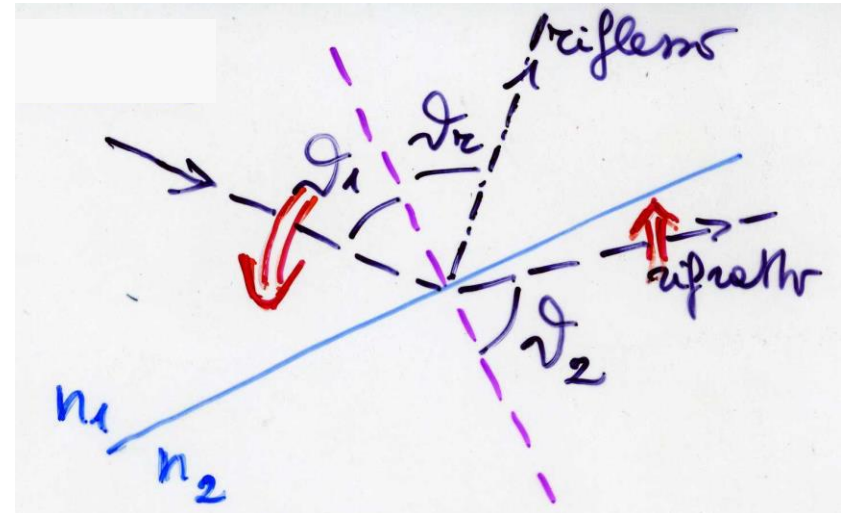
- per  $\theta_1 > \theta_{1\text{lim}}$  si ha riflessione totale, potere riflettente  $R=1$  (guide di luce, fibre ottiche: comunicazioni, endoscopia)



- es. vetro-aria

$$n_1 = 1.52; \quad n_2 = 1$$

$$\theta_{1\text{lim}} = \arcsin(1/1.52) = 41.1^\circ$$

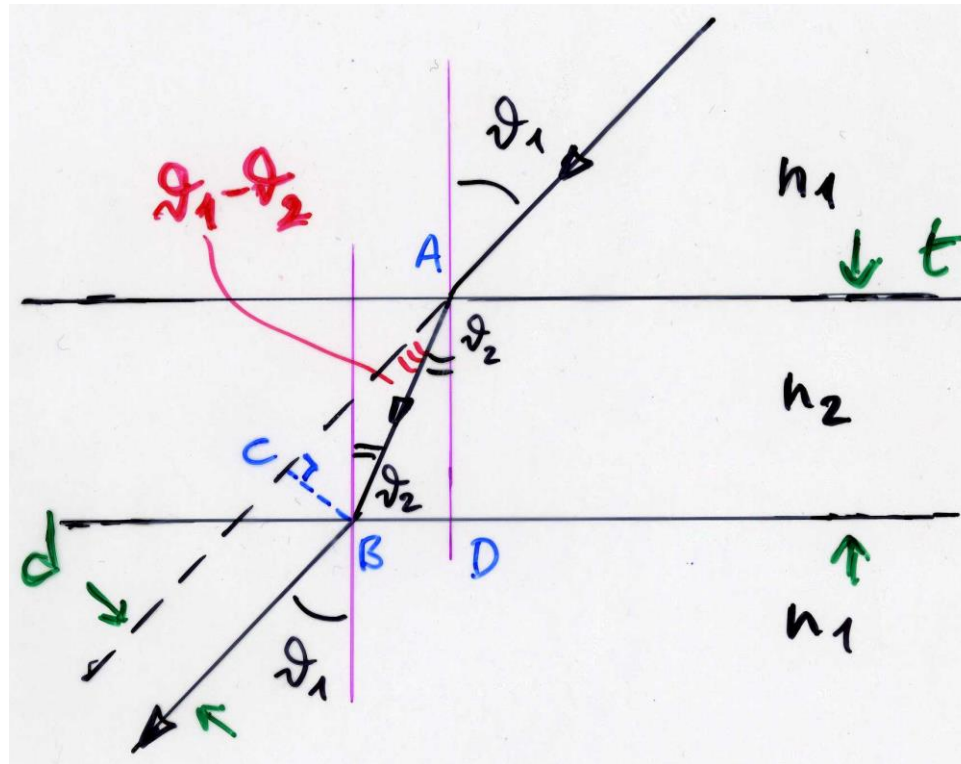




# Passaggio attraverso una lastra piano-parallela (\*)

$$AB = t / \cos\theta_2$$

$$CB = AB \sin\widehat{CAB}$$

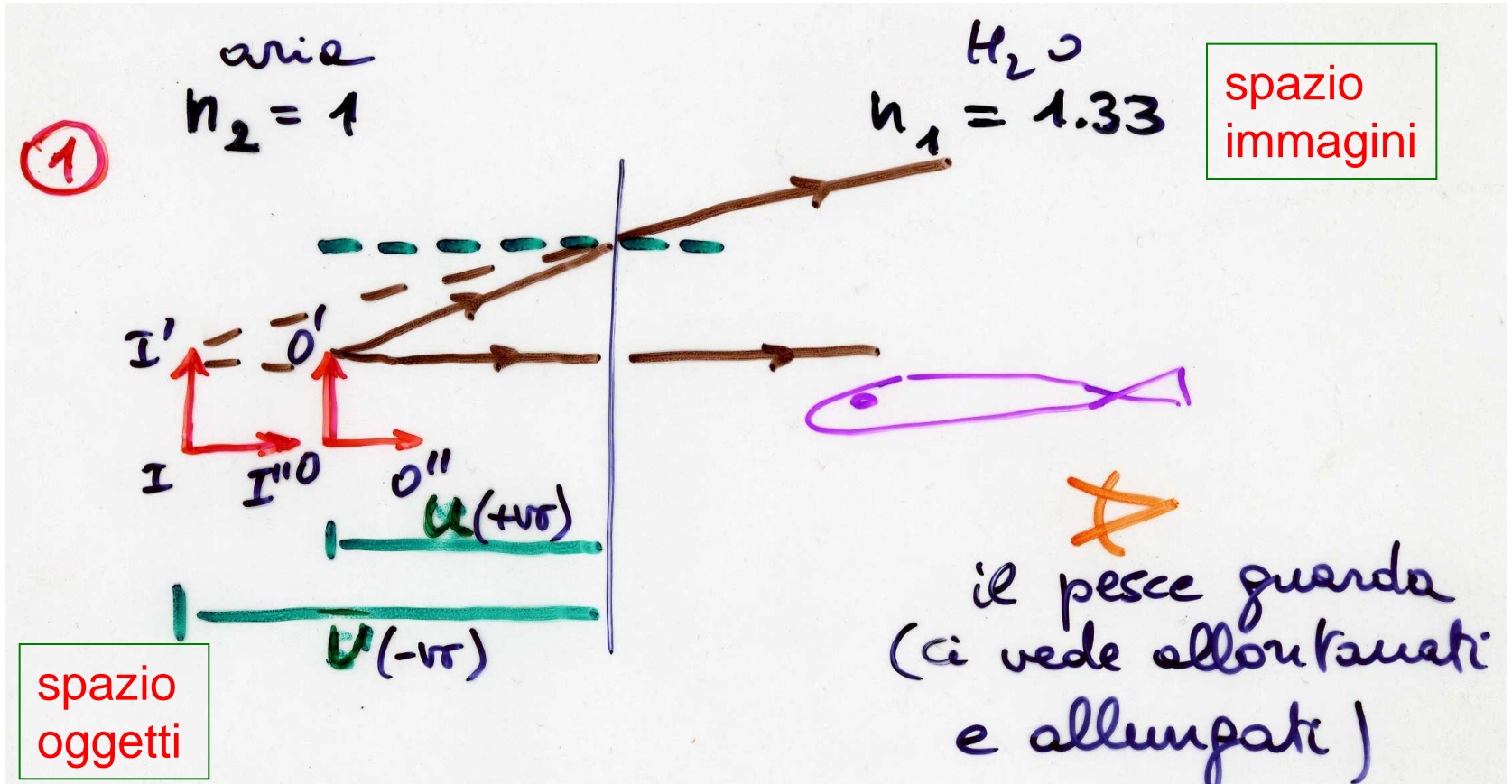


- lastra trasparente di spessore  $t = AD$ , spostamento  $d = CB$ 
  - 1a rifrazione  $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$
  - 2a rifrazione  $n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$
- $d = t \sin(\theta_1 - \theta_2) / \cos\theta_2$

(\*) facoltativo

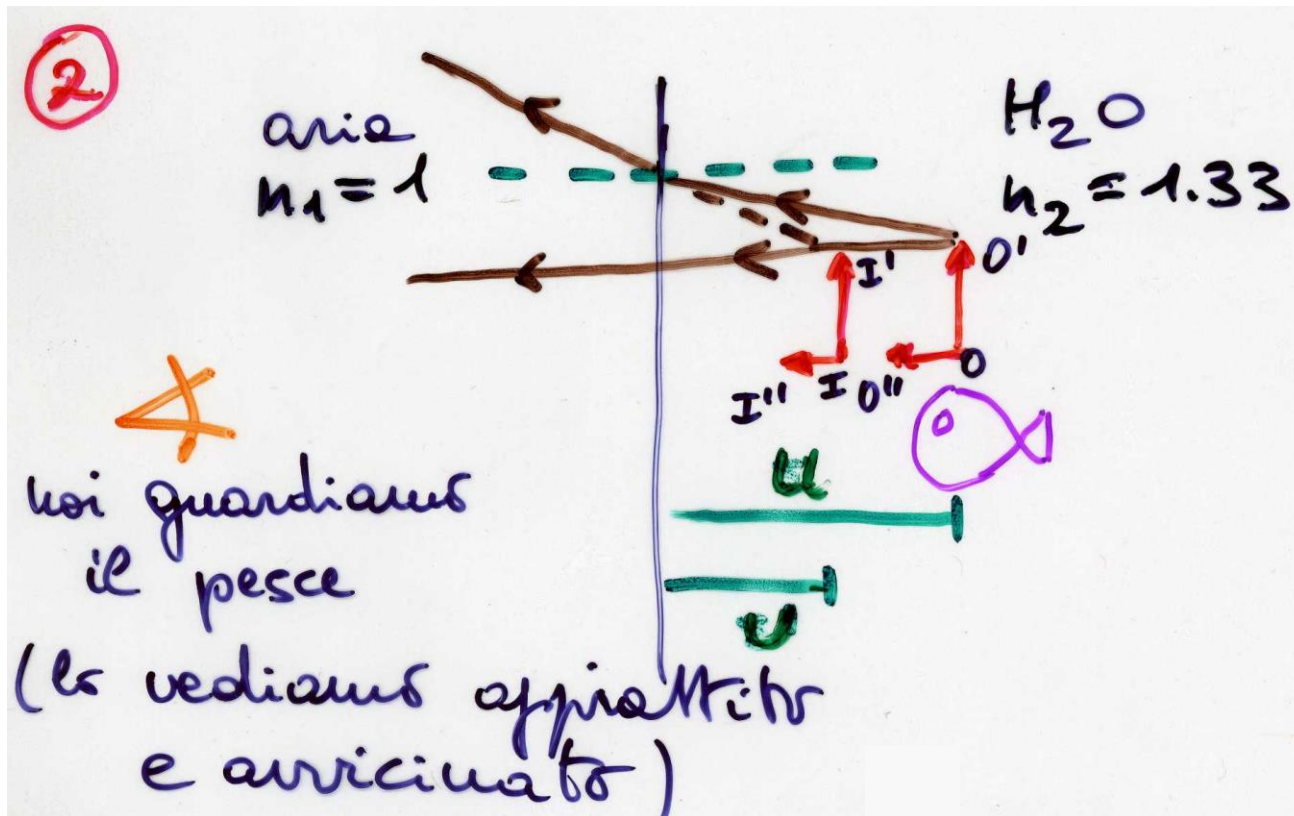
# Diottri piani(\*)

- un diottro piano è formato da due mezzi trasparenti separati da una superficie piana (u e v sono +vi nei rispettivi spazi)



- $m_{\text{trasv}} = +1$ , **immagine virtuale diritta**;  $m_{\text{longit}} = -v/u = +n_1/n_2$   
 (\*) facoltativo fln mag 14

# Diottri piani (2)(\*)



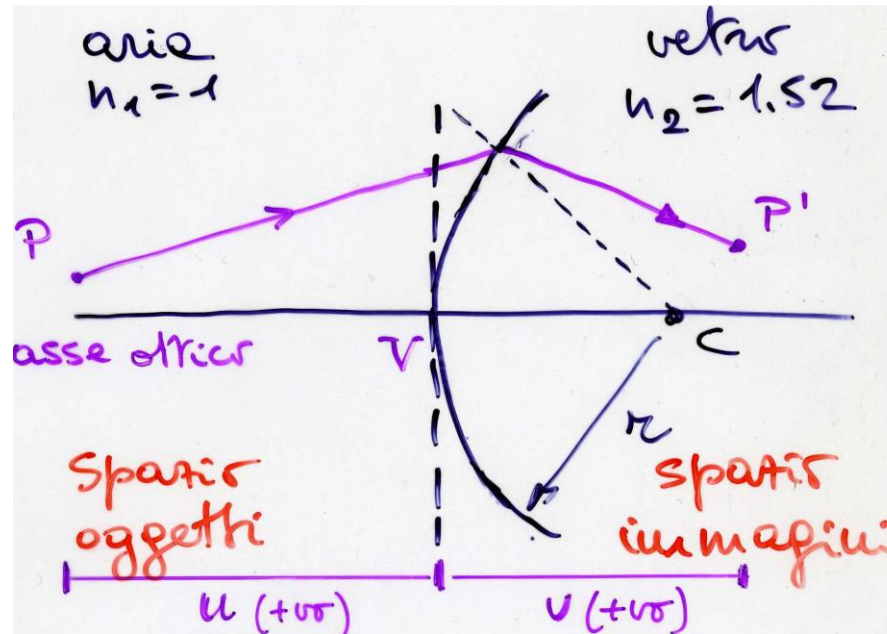
- $m_{\text{trasv}} = +1$ , **immagine virtuale diritta**;  $m_{\text{longit}} = -v/u = +n_1/n_2$

①  $n_2/u + n_1/v = 0$ ;

②  $n_2/u + n_1/v = 0$

# Diottri sferici e lenti

diottro  
sferico



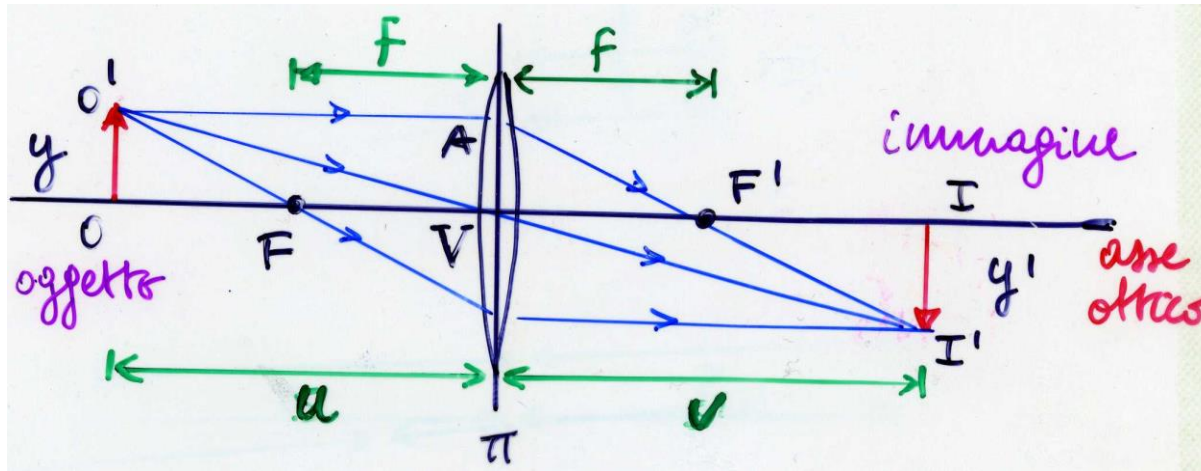
o altro materiale  
trasparente

- **diottro**: due mater. traspar. separati da una superf. sferica
- **lente**: due diottri, di cui almeno uno sferico; i raggi che la attraversano subiscono una doppia rifrazione
- (i diottri e) le lenti, se valgono le approssimazioni (di Gauss)
  - 1) onde monocromatiche
  - 2) piccola apertura
  - 3) raggi parassiali,
 sono un sistema stigmatico (punto oggetto  $\longleftrightarrow$  punto immagine) – altrimenti: aberrazioni



# Lenti sottili

- **lente sottile**: spessore trascurabile, al limite un piano ( $\pi$ ), due fuochi,  $F$  e  $F'$  (coniugati di  $P, P' = \infty$ )



$u$  ( $v$ ) – posizione dell'oggetto (immagine)

l'asse ottico congiunge  $FF'$  (o i centri di curvatura)

- $OO'V$  e  $II'V$  simili:  $OO'/II' = u/v$
- $AVF'$  e  $II'F'$  simili:  $OO'/II' = f/(v-f)$
- $u/v = f/(v-f) \rightarrow uv - uf = fv$  [moltiplico per  $1/(uvf)$  a dx e sx]
- $1/u + 1/v = 1/f$

**formula dei punti coniugati** (delle lenti),  $f$  distanza focale





## Lenti sottili (2)

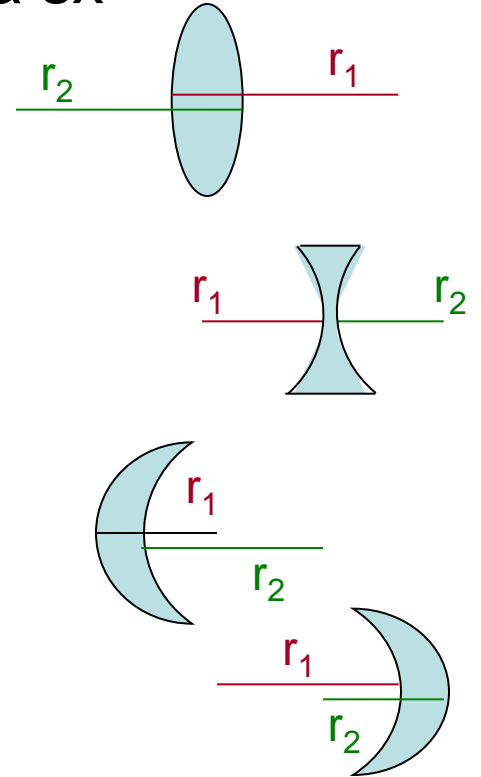
---

- una lente ha due fuochi,  $F$  e  $F'$ , equidistanti da  $V$ , **punti coniugati dei punti all' $\infty$**  ( $1/v = 1/f - 1/\infty = 1/f$  etc.)
- considerando la lente costituita da due diottri sferici, di raggio di curvatura  $r_1$  e  $r_2$ , si può mostrare che  
$$1/f = (n-1)(1/r_1 + 1/r_2)$$
con  $n$  indice di rifrazione del materiale della lente (immersa in aria), tipicamente  $\sim 1.5$  (vetro, plastica); [cfr con lo specchio sferico:  $1/f = 2/r$ ]
- **lente convergente**: più spessa al centro,  $f$  +va  
**lente divergente**: più spessa ai bordi,  $f$  -va
- l'inverso di  $f$  (in m) si chiama potere diottrico  $P = 1/f$  della lente e si misura in diottrie (D)

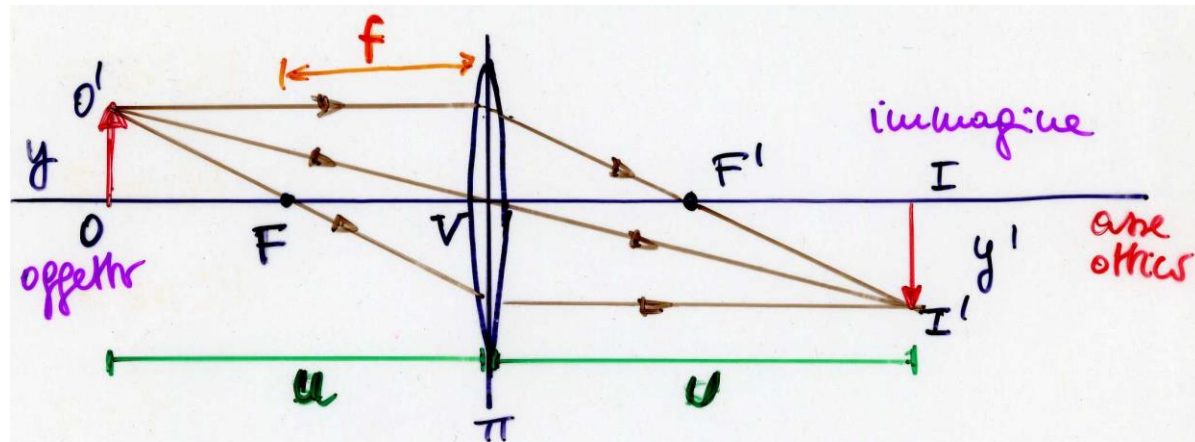


## Lenti sottili (3) (\*)

- risolviamo per  $f$  la formula dei costruttori di lenti (col mcm)  
 $1/f = (n-1) [r_2+r_1]/(r_1r_2) \Rightarrow (n-1)f = r_1r_2/(r_2+r_1)$
- **lente di vetro in aria:  $n-1 \approx 0.5$  +vo; oggetto a sx**
- **lente convessa-convessa  $r_1$  +vo  $r_2$  +vo**  
 $\Rightarrow f$  +vo sempre; lente convergente
- **lente concava-concava  $r_1$  -vo  $r_2$  -vo**  
 $\Rightarrow f$  -vo sempre: numer. +vo, denom. -vo;  
**lente divergente**
- **lente convessa-concava  $r_1$  +vo  $r_2$  -vo**  
 $\Rightarrow f$  +vo (-vo) se  $|r_2| > |r_1|$  ( $< |r_1|$ )
- **lente concava-convessa  $r_1$  +vo  $r_2$  -vo**  
 $\Rightarrow f$  -vo (+vo) se  $|r_2| > |r_1|$  ( $< |r_1|$ )
- **lente di aria in vetro:  $1-n \approx -0.5$  -vo ... e cambiano i segni!**



# Costruzione dell'immagine



rapp. utili

(verifica: analitica, eq. punti coniugati)

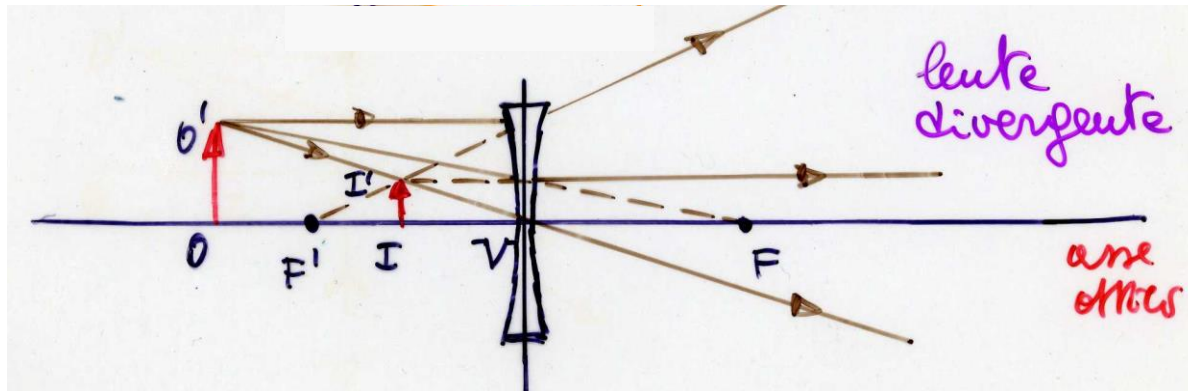
- // all'asse, passa per  $F'$
- per il vertice, continua (quasi) diritto [comunque // , vedi pag. 38]
- per  $F$ , esce // all'asse

- ingrandimento lineare trasverso

$OO'V$  simile a  $II'V$

$$m = y'/y = -v/u = - (v-f)/f = -f/(u-f)$$

# Lente divergente



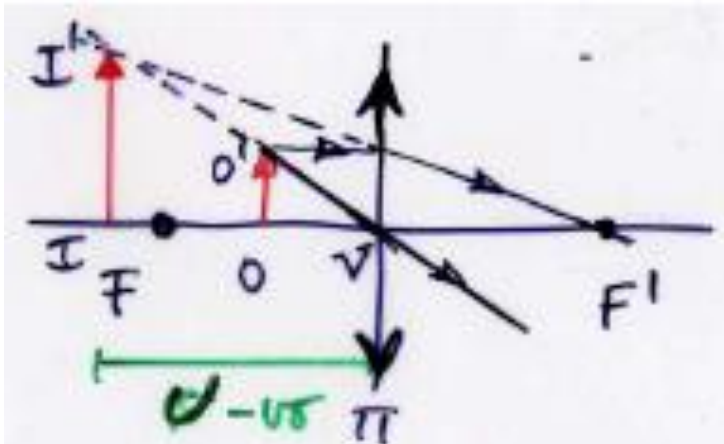
- **lente divergente, più spessa ai bordi** (ad es. se i due diottri sono concavi): raggi da  $P=\infty$ , dopo la doppia rifrazione, provengono da  $F'$  (quelli da  $P'=\infty$ , da  $F$ ); se si usa la formula di pag. 43,  **$f$  risulta  $-va$  (sia  $r_1$  che  $r_2$  sono  $-vi$ )**
- il terzo raggio utile passa per  $V$  ed esce parallelo a se stesso (estrapolato all'indietro è sempre nella stessa direzione)
- l'immagine è sempre virtuale, diritta, rimpicciolita: **risolvendo per  $v$  l'eq. dei punti coniugati  $1/v = 1/f - 1/u = (u-f)/(uf)$  si ha  $v = uf / (u-f)$  **sempre  $-va$** , visto che  $u$  è  $+va$  e  $f$   $-va$**



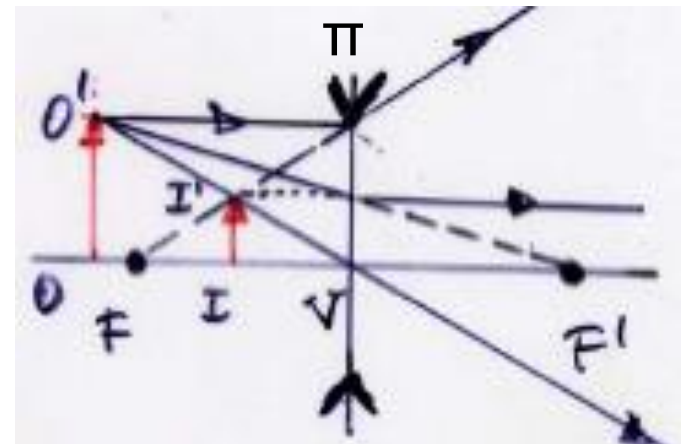
# Lenti sottili, posizione e tipi di immagine

- eq. dei punti coniugati:  $v = uf/(u-f)$ ;  $m = -v/u$
- |                 |              |                                 |
|-----------------|--------------|---------------------------------|
| 1. $u > 2f$     | $f < v < 2f$ | reale, invertita, rimpicciolita |
| 2. $u = 2f$     | $v = 2f$     | “ “ unitaria                    |
| 3. $f < u < 2f$ | $v > 2f$     | “ “ ingrandita                  |
| 4. $u = f$      | $v = \infty$ | “ “ “                           |
| 5. $u < f$      | $v -va$      | virtuale, diritta “             |
| 6. diverg.      | $v -va$      | “ “ rimpicciolita               |

5.



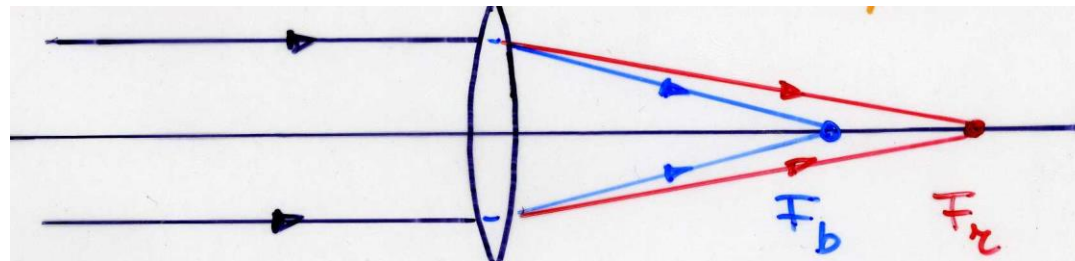
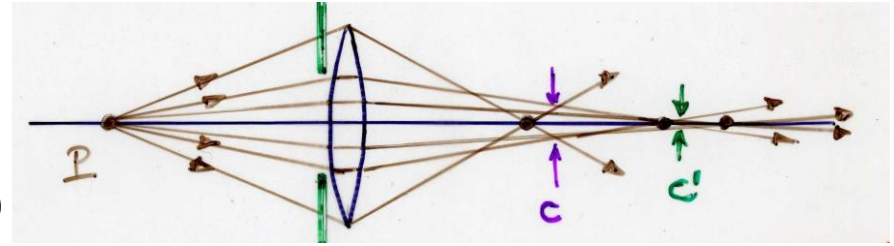
6.





# Aberrazioni delle lenti

- aberrazione sferica (simile agli specchi): oggetto sull'asse
  - diaframma, però si riduce la luce
  - C, C' cerchi di minima confusione
  - oppure sup. non sferiche (parabol.)
- altri effetti geometrici
  - coma/astigmatismo: oggetto poco/molto fuori asse
  - distorsione: l'ingrandimento varia con la distanza dall'asse
- aberrazione cromatica, dispersione (assente negli specchi)
  - combinazioni di lenti con dispersione diversa



vetro crown K3:

$$n_{\text{blu}} = 1.525$$

$$n_{\text{rosso}} = 1.516$$

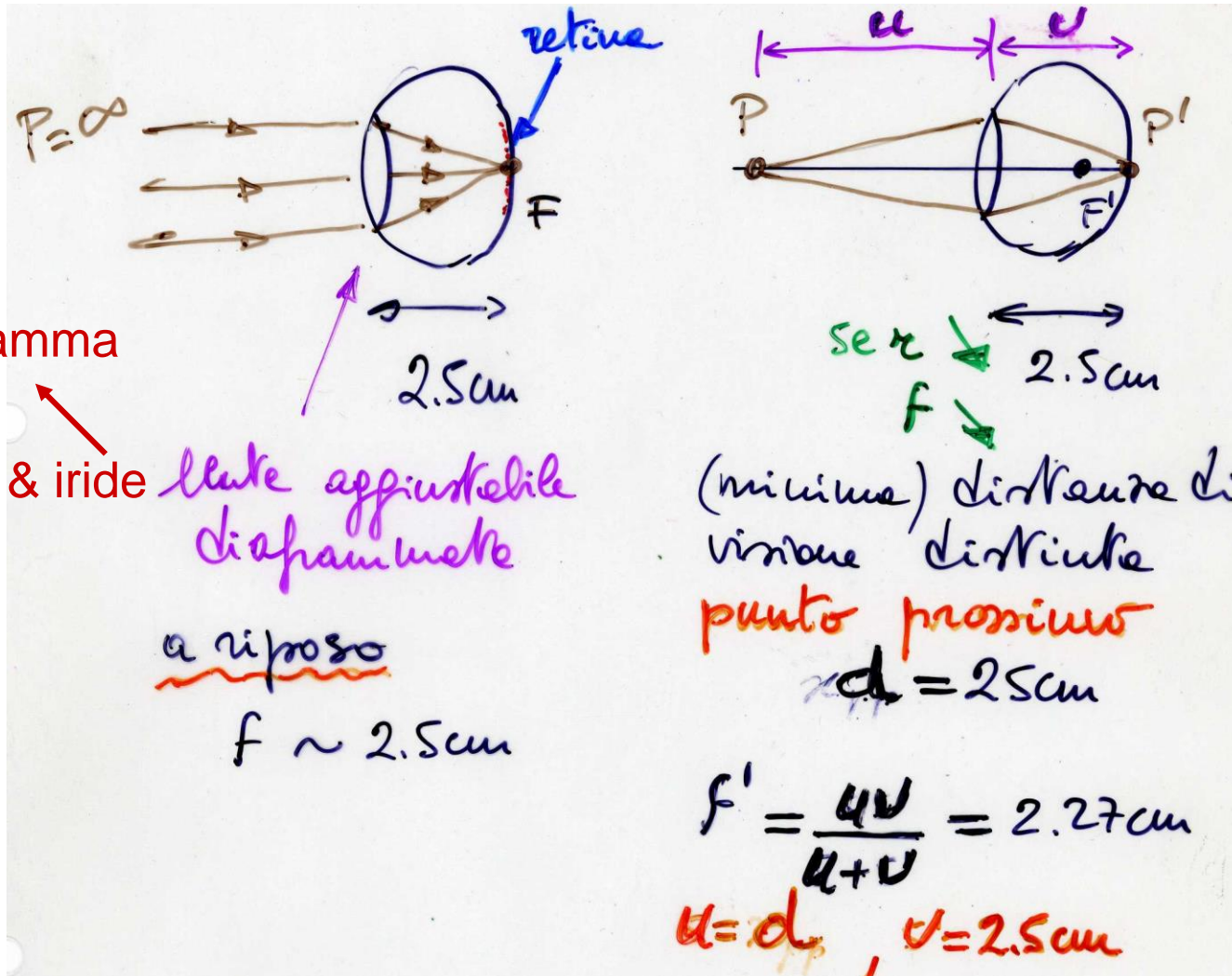
fln mag 14





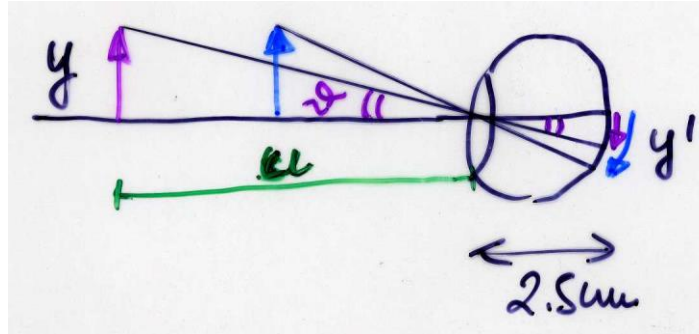
# L'occhio

- retina - visione b/n, bastoncelli: pixel  $1 \times 1 \mu\text{m}^2$  (a colori, coni  $4 \times 4 \mu\text{m}^2$ )



## L'occhio (2)

- grandezza apparente di un oggetto



- $y'$  lunghezza dell'immagine sulla retina, l'angolo sotto cui vedo l'oggetto di lunghezza  $y$  è  

$$\theta = y'/2.5\text{cm}$$
 d'altra parte  $\text{tg}\theta = y/u \sim \theta$  (angoli piccoli)  

$$y' = 2.5 \text{ cm } y/u$$
 $y'$  cresce se  $y \uparrow$  e se  $u \downarrow$
- la risoluzione angolare dei pixel è  $4\mu\text{m}/2.5\text{cm} \sim 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$

# La lente d'ingrandimento

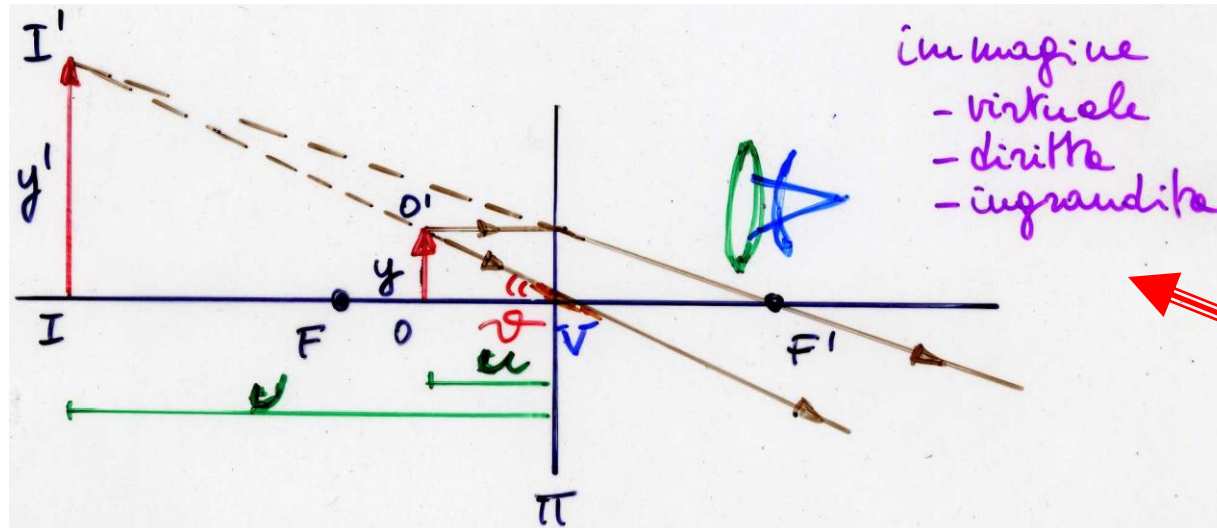


immagine  
all' $\infty$

immagine  
al p.p.

- a occhio nudo:  $\text{tg}\theta_0 = y/d = y/25\text{cm} \sim \theta_0$  **oggetto avvicinato alla distanza di visione distinta**
- con la lente (**convergente**):  $\text{tg}\theta = y/u \sim \theta (= y'/v)$  **vicino all'occhio**
- ingrandimento angolare o visuale

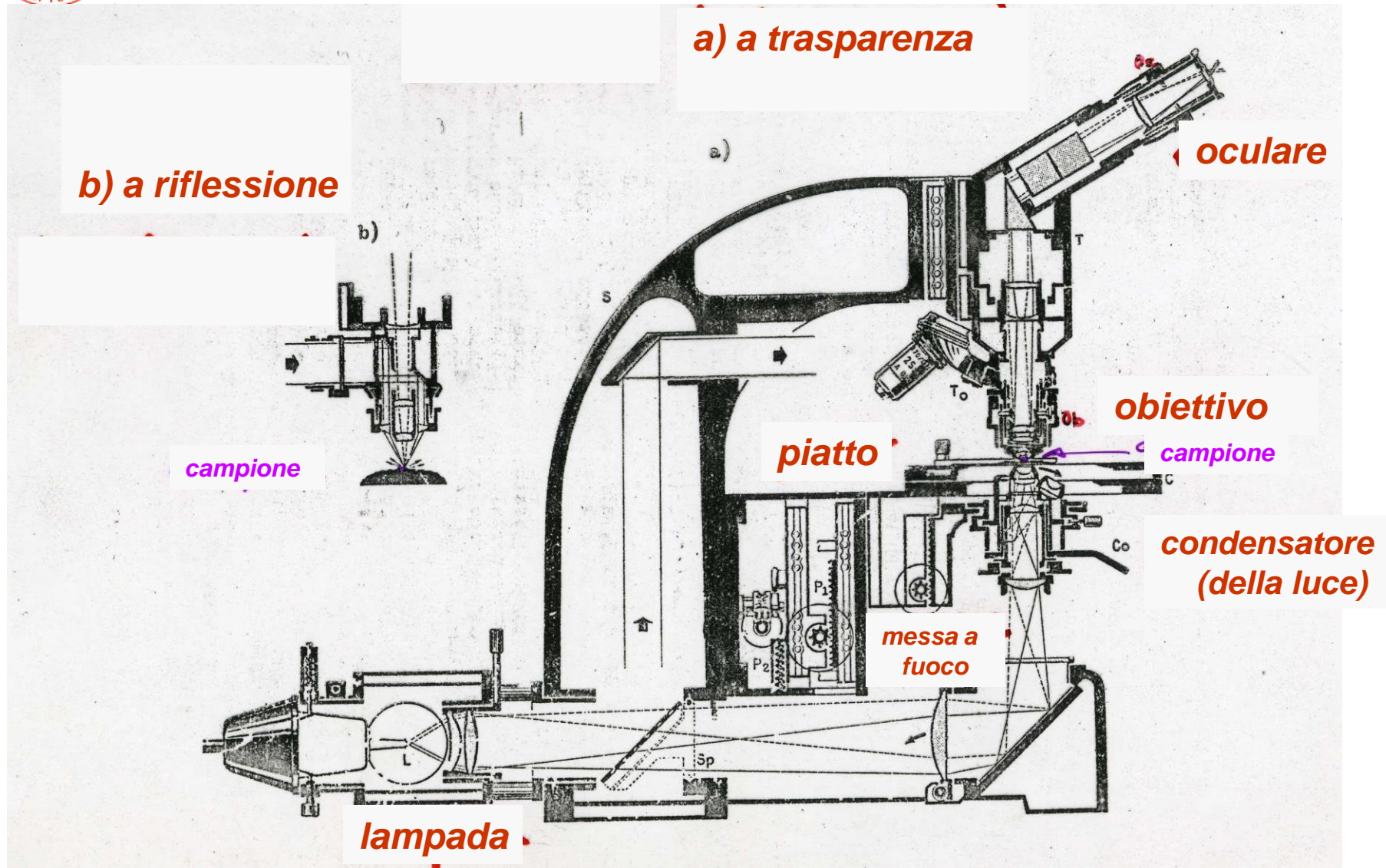
$$\beta = \theta/\theta_0 = d/u \approx 25\text{cm}/f$$

$$(\beta = m = -v/u = 1 + 25\text{cm}/f)$$

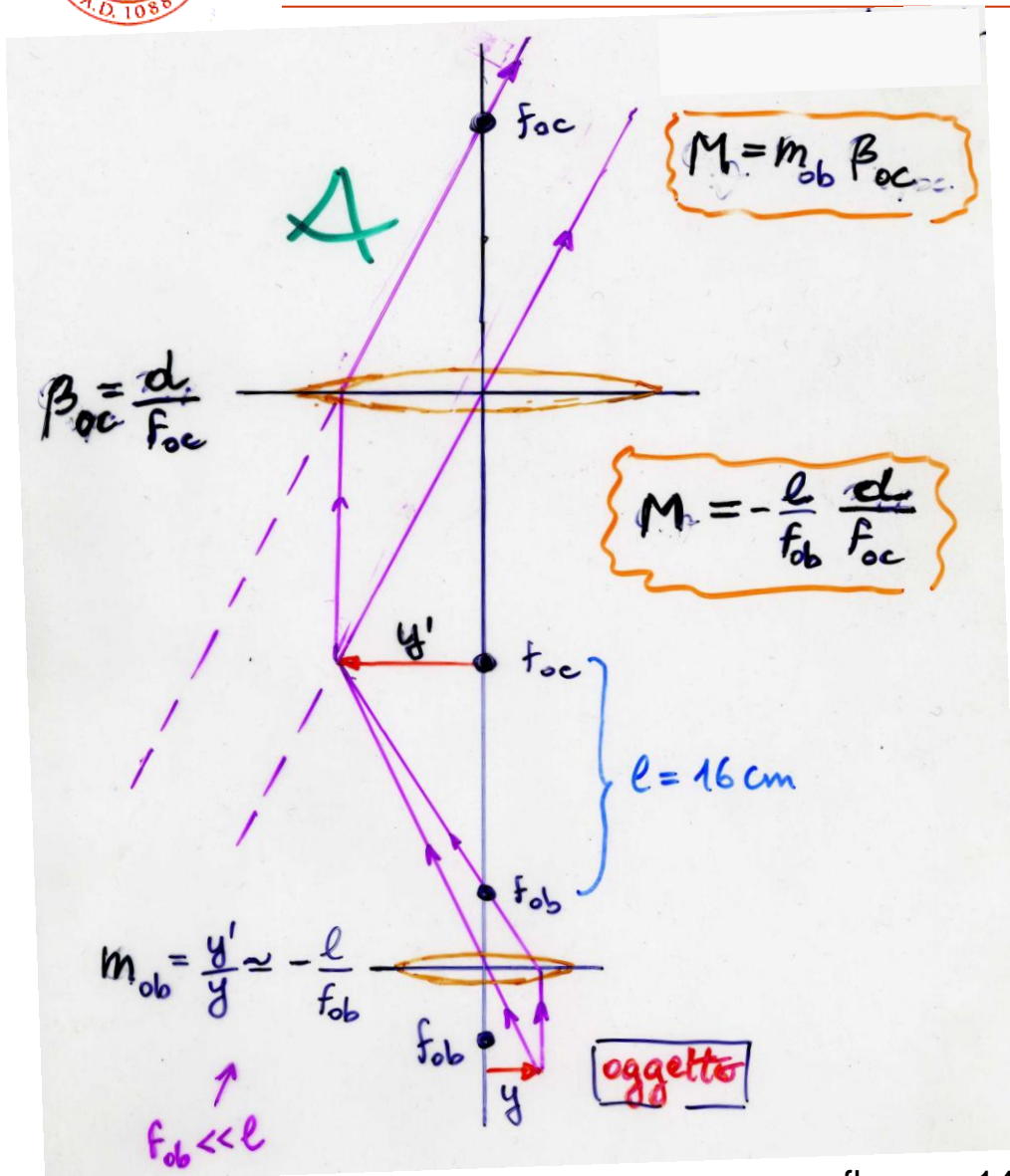
in pratica  $f_{\min} \sim 2.5\text{cm}$  (40 D)  $\rightarrow \beta_{\max} \sim 10$  (compensando le aberrazioni si arriva a 40, microscopio semplice)



# Microscopio ottico composto



# Microscopio ottico (2)



- l'immagine finale è invertita
- l'oggetto è posto vicino a  $F_{ob}$ , l'immag. reale si forma in  $F_{oc}$  ed è vista dall'oculare:  $\rightarrow$  l'ingrandim. è il prodotto dell'ingr. lineare dell'obiettivo per quello visuale dell'oculare (lente d'ingr.)
- con  $f_{ob} \sim 4 \text{ mm}$ ,  $f_{oc} \sim 10 \text{ mm}$  si ha, per costruzione,  $M \sim -(16 \text{ cm}/f_{ob})(25 \text{ cm}/f_{oc}) = -1000$
- in pratica la limitazione è data dalla  $\lambda$  della luce (vedi oltre, pag. 102-103)



# Prisma(\*)

- deflessione

$$\delta = (i-r) + (i'-r') = (i+i') - (r+r')$$

$$\alpha + (90^\circ - r) + (90^\circ - r') = 180^\circ$$

$$\rightarrow \alpha = r+r'$$

- rifrazioni/Snell

$$- \sin i = n \sin r \quad \text{angoli}$$

$$- n \sin r' = \sin i' \quad \text{piccoli}$$



$$\underline{i+i' = n(r+r')}$$

$$i = nr$$

$$i' = nr'$$

es.  
 $\alpha = 60^\circ$   
 $n = 1.52$

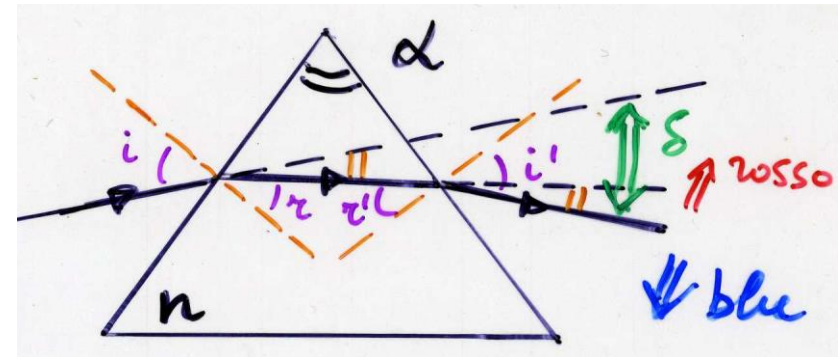
- $\delta \approx (n-1)(r+r') = (n-1)\alpha$       es.  $\delta = 31.2^\circ$

- dispersione e potere dispersivo

$$n = n(\lambda) \quad \Delta\delta/\Delta\lambda = \alpha\Delta n/\Delta\lambda$$

$$n_b = 1.525 \quad n_r = 1.516 \quad \Delta\delta = 0.54^\circ \text{ rosso-blu}$$

$$\Delta\delta/\delta = \Delta n/(n-1) = 1.7\% \text{ vetro crown K3} \quad \forall \alpha$$







# Onde



# Richiamo: oscillazioni e oscillazioni armoniche

---

ripetendo e riassumendo:

- $y$ : “spostamento dalla posizione di equilibrio,  $y=0$ ”  
(spostamento generalizzato: lineare, angolo, carica etc.);  
forza di richiamo “elastica”; inerzia che fa superare  $y=0$

- oscillazione in genere

$$y = y(t) \quad \text{con } y \text{ fra } (-A, +A)$$

- fenomeno temporale periodico
- regione spaziale fissata e limitata
- energia  $E \propto A^2$ , confinata

- oscillazione armonica,  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ ,

$$y = A\sin(\omega t + \delta) = A\sin[\omega(t + t_0)]$$

dove  $(\omega t + \delta) = \omega(t + t_0)$  è la fase



# Proprietà fondamentali delle onde

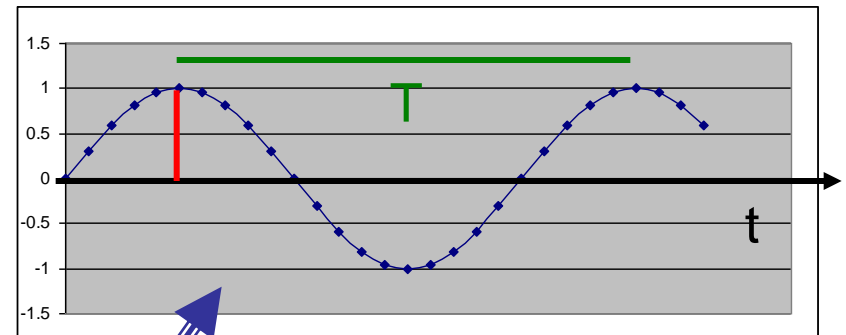
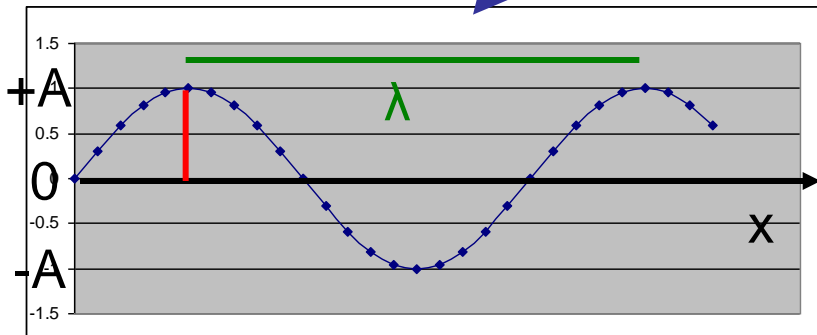
---

- Moto ondoso: trasferimento di energia da un punto P ad un altro Q senza trasferimento di materia
  - onde meccaniche (onde d'acqua, su corde tese, suono) hanno bisogno di un mezzo per propagarsi
  - onde e.m. (luce, onde radio, raggi X) possono viaggiare nel vuoto e la loro propagazione è modificata dalla presenza di materia
- Un'o. meccan. viaggia da P a Q perchè una perturbazione ha causato lo spostamento di una particella in P. Questa trascina una p. vicina che è spostata a sua volta e così via, fino a che la perturbazione raggiunge Q dopo un certo tempo (ritardo). Se il materiale è elastico, le particelle oscillano intorno alla loro posizione di equilibrio.



## Proprietà fondamentali delle onde (2)

- Se la perturbazione è ripetitiva si propaga un'onda, altrimenti si ha un impulso.
- Se la perturbazione alla sorgente è armonica semplice, il grafico degli spostamenti delle particelle a  $t$  fisso è una sinusoide.



- Se consideriamo il movimento di una singola particella nel tempo (a  $x$  fisso,  $x$  direzione di propagazione) si ha un moto armonico semplice.



## Proprietà fondamentali delle onde (3)

---

- La perturbazione (spostamento generalizzato) può essere  $\perp$  alla direz. di propagazione (o. **trasversali, polarizzabili**) oppure  $//$  (**onde longitudinali, non polarizzabili**)
- **Ampiezza (A)** : il più grande spostamento di  $\forall$  partic. rispetto alla posiz. di equilibrio (ad es.).
- **Lunghezza d'onda ( $\lambda$ )** : distanza fra due particelle con lo stesso moto (fase) ad es. fra due creste (o due valli).
- **Periodo ( $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$ )** : tempo impiegato da ogni particella per una oscillazione completa, tempo impiegato da un'onda per percorrere una  $\lambda$ .
- Quindi la velocità dell'onda (**spazio percorso/tempo impiegato**) è

$$v = \lambda/T = \lambda\nu$$

valida per  $\forall$  onda.



# Principio di sovrapposizione

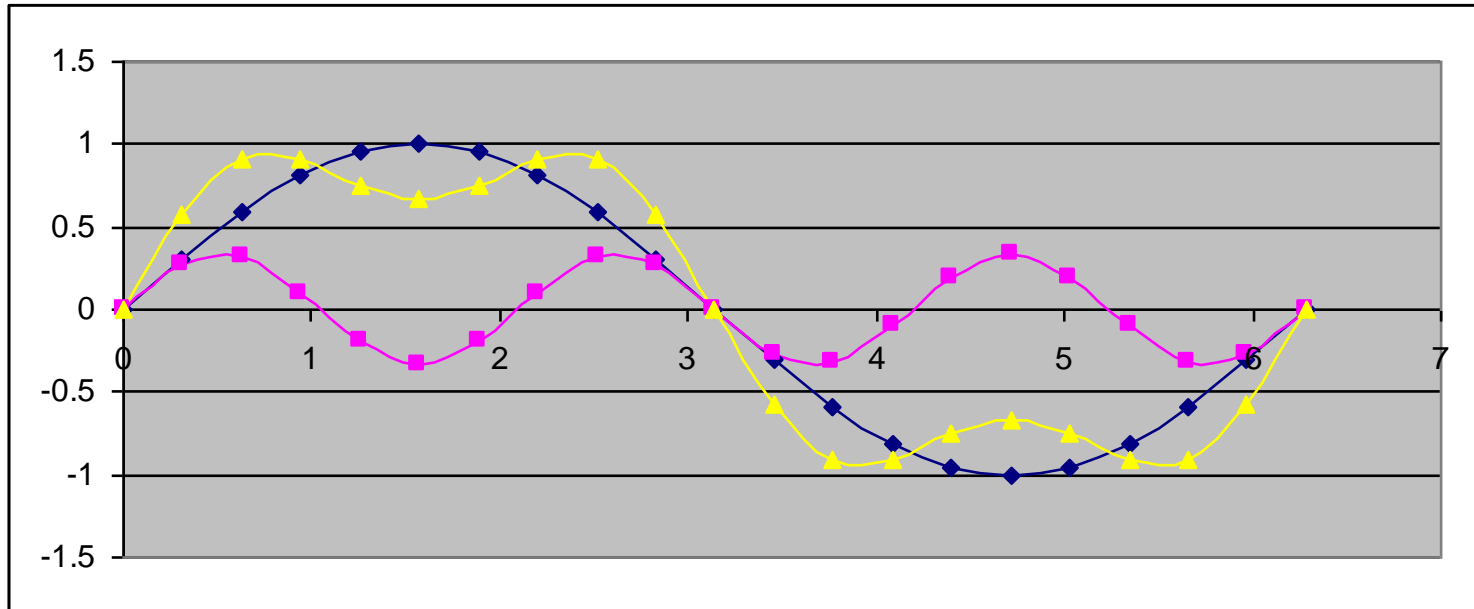
---

- $v$  e  $\lambda$  dipendono dal mezzo in cui l'onda si propaga,  $v$  (o  $T$ ) dipende esclusivamente dalla sorgente
- Un'onda e.m. consiste di un  $\mathbf{E}(x,t)$  accompagnato da un  $\mathbf{B}(x,t)$  [come visto in e.m.  $\mathbf{E}$  produce  $\mathbf{B}$  che produce  $\mathbf{E}$  etc.]: come ampiezza si prende di solito  $\mathbf{E}$ .
- **Principio di sovrapposizione** : se ci sono due o più onde dello stesso tipo che viaggiano nella stessa direzione, lo spostamento totale è la somma algebrica degli spostamenti nel punto. Sommando onde di  $v$  ed  $A$  diverse, opportunamente scelte, si può riprodurre  $\forall$  forma d'onda (teorema di Fourier) nella stessa direzione.





## Principio di sovrapposizione (2)



Se le onde non viaggiano nella stessa direzione, ma si incontrano solo in qualche punto, esse emergono dopo l'incrocio nella stessa forma che avevano prima dell'incontro.



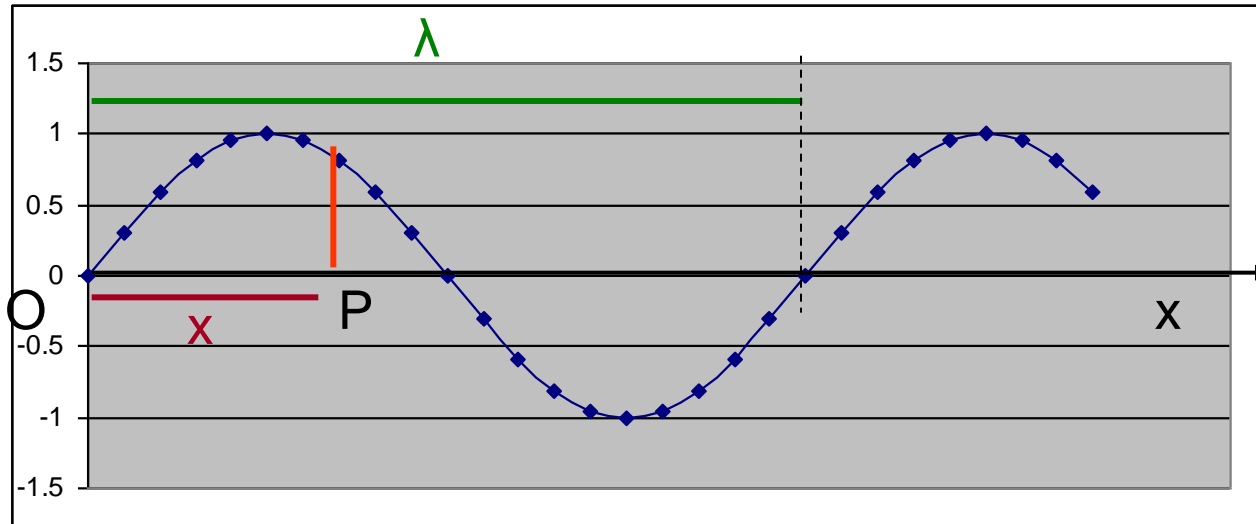
## Principio di sovrapposizione (3)

---

- Se hanno  $\lambda$  uguale e arrivano insieme con creste coincidenti sono in fase, se sono sfasate di  $\pi$  sono in opposizione di fase.
- I fenomeni dell'interferenza, diffrazione, battimenti ed onde stazionarie sono tutti conseguenza del principio di sovrapposizione
- (Assumendo  $y = 0$  per  $t = 0$ ), lo spostamento  $y$  a  $t$  generico di una particella che oscilla di m.a.s. di frequenza  $\nu$  (periodo  $T$ ) può essere rappresentato come  
$$y = A \sin 2\pi t/T = A \sin 2\pi \nu t$$



# Forma matematica di un'onda sinusoidale



- In un'onda sinusoidale ( $\lambda = 2\pi/k$  e  $T$  o  $v = \omega/2\pi$ ), tutte le particelle oscillano sinusoidalmente: il moto delle particelle in P ritarderà di  $(x/\lambda)T$  rispetto ad O, ossia dovrò sostituire a  $t \rightarrow t - (x/\lambda)T \rightarrow y = A \sin 2\pi/T [t - (x/\lambda)T]$

$$y = A \sin 2\pi [t/T - x/\lambda] = A \sin 2\pi v [t - x/v] = A \sin(\omega t - kx)$$



## Dalle oscillazioni alle onde (\*)

- trasferimento di E (ad es. serie di pendoli accoppiati: un pendolo oscillante trasferisce E al pendolo vicino inizialmente fermo e così via – ritardo, sfasamento)
- mezzo elastico (atomi oscillanti trasferiscono E agli atomi adiacenti – ritardo, sfasamento)

$(d \text{ di trasferimento}) / (t \text{ impiegato}) = \text{velocità}$

di propagazione della perturbazione (onda)

- $\lambda$ , lunghezza d'onda, minima distanza fra punti in concordanza di fase (dopo un periodo T)

$$v = \lambda / T = \lambda \nu$$

(T periodo del moto armonico semplice)



## Onde (\*)

---

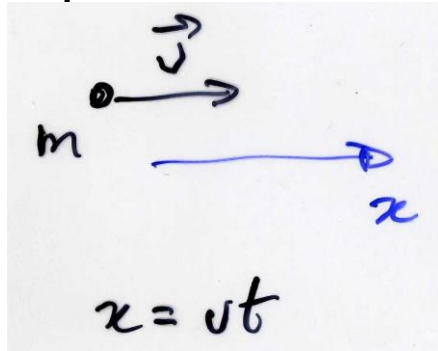
- $f(x,t)$  – propagazione nello spazio (con velocità  $v$ ) di una perturbazione oscillatoria (in  $t$ ), ossia di energia
- es. onde liquide, serie di pendoli uguali, corda lunga/ $\infty$  tesa, onde sonore, onde e.m., tsunami
- la sorgente fissa la frequenza  
 $\nu = 1/T$  (parte temporale)
- il mezzo 'elastico' è perturbato (messo in oscillazione) al passaggio dell'onda, ma mediamente fermo – non si muove secondo  $v$  – serve da “sostegno” (un punto oscillante mette in agitazione oscillatoria il vicino, con un certo ritardo)
- l'energia si muove senza trasporto di materia





# Movimento di onde e particelle (\*)

particella

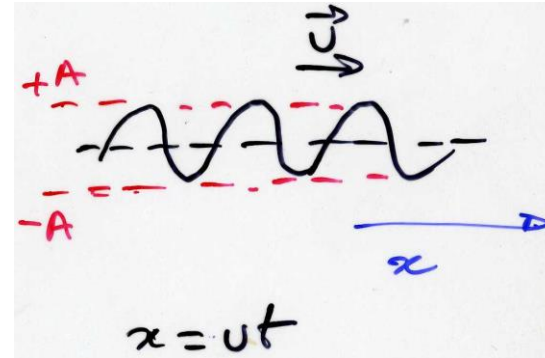


m.r.u.

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

ci vuole una **F**  
per accelerare  
ad es.  $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$   
 $= m(\mathbf{v}-0)/\Delta t$

onda



m.r.u.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (+)$$

ci vuole una sorgente/**F**  
per accelerare/mettere  
in oscillazione il mezzo  
(sasso sul liquido,  
pendolo etc.)

superf.  $\perp$  alla  
propagazione

(+) si usa  $I = E/(tS)$

(\*) in alternativa a pagg. 54-61





# Rappresentazione matematica dell'onda (\*)

- si può mostrare che la **perturbazione  $y$**  in un'onda progressiva (si muove nel verso +vo dell'asse  $x$ ) è una funzione sia di  $x$  che di  $t$  ed è data da
- es.1 onda impulsiva/impulso: corda tesa vibrante lunga  $l$

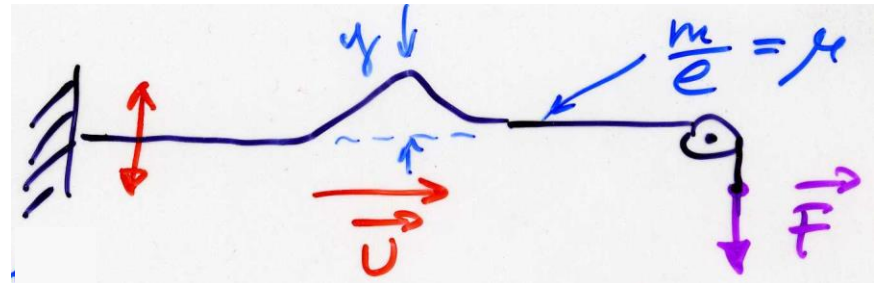
$$y = y(x,t) = y(x-vt)$$

dove  $v$  è la velocità di fase

$$y = y(x-vt)$$

è l'allontanamento dalla posizione di equilibrio, con

$v^2 = F/\mu$  che dipende dall'elasticità ( $F$ ) e dall'inerzia ( $\mu = m/l$ ) del mezzo (vero in generale)



(\*) in alternativ a pagg. 54-61

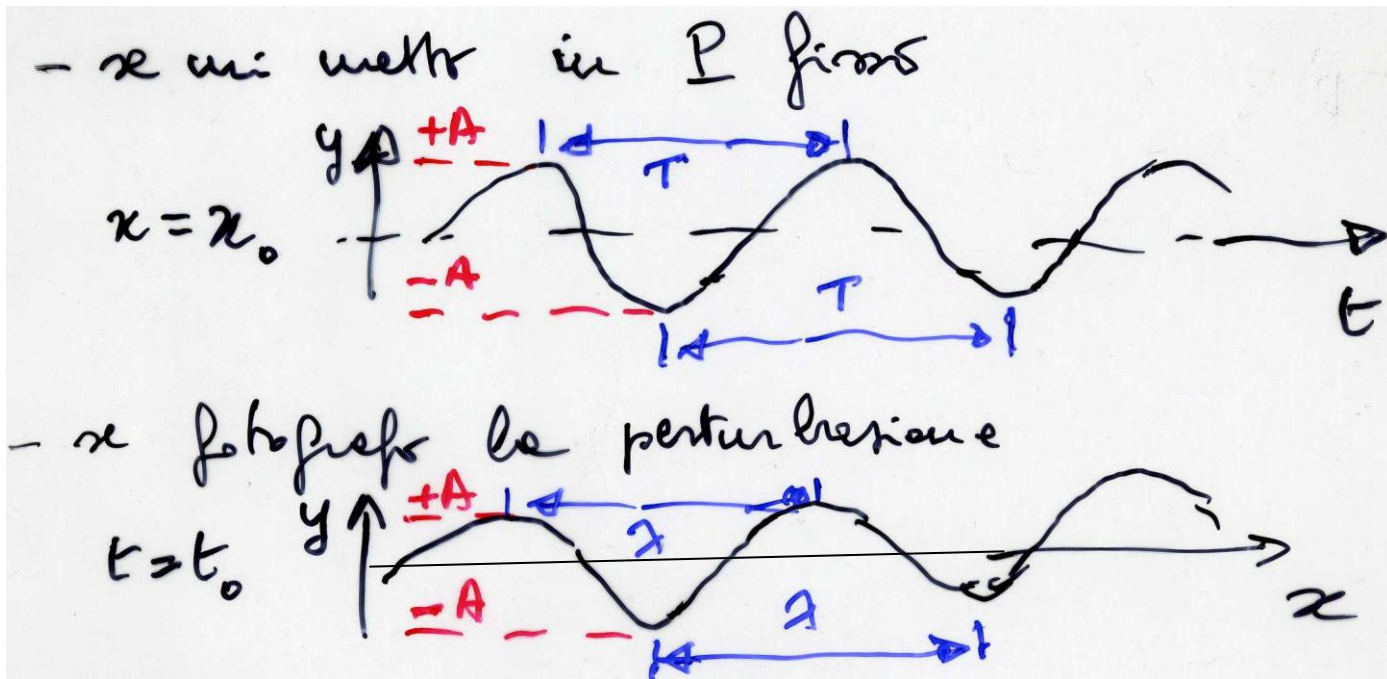


# Rappresentazione matematica dell'onda (2) (\*)

- es.2 onda armonica / periodica: l'eq. di un'onda piana monocromatica progressiva è

$$y = A \sin\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x-vt)\right]$$

dove l'espressione in [ ] è la **fase** dell'onda



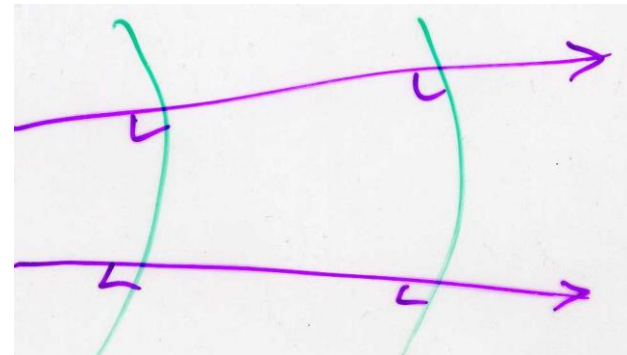
(\*) in alternativa a pagg. 54-61  
fln mag 14



## Rappresentazione matematica dell'onda (3)

- $v = \omega/2\pi$  dipende dalla sorgente
- $v$  e  $\lambda$  dipendono dal mezzo
- fase: descrive lo stato di oscillazione
- fronte d'onda / superficie d'onda: luogo dei punti con la stessa fase; ad es. onda piana, i fronti d'onda sono piani equidistanti  $\lambda$ ; onda sferica, i fronti d'onda sono superfici sferiche equidistanti  $\lambda$  etc.
- raggi:  $\perp$  ai fronti d'onda, direzioni in cui si muove l'onda (cioè l'energia, la qdm) – li abbiamo usati in ottica geometrica

$$\lambda v = \lambda/T = v$$





# Energia e intensità, ampiezza

- l'intensità  $I$  è definita come la potenza media (nel  $t$ ) divisa l'area della superficie  $\perp$  direz. di propagazione

$$I = E/(tS) = P_{\text{media}}/S \quad \text{in W/m}^2$$

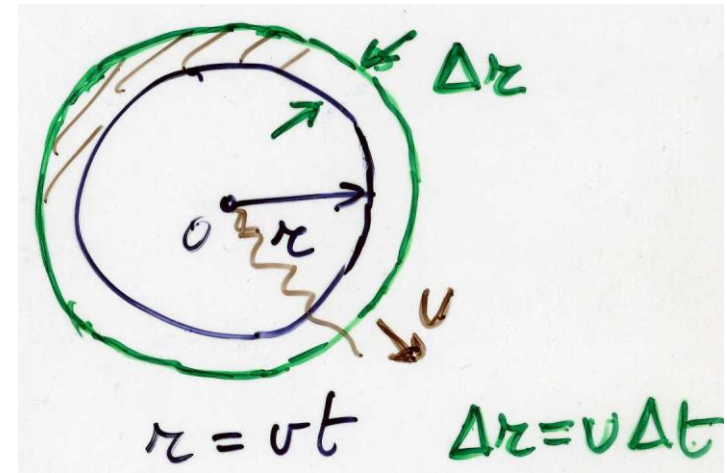
- es. onda sferica  $I = P_{\text{media}}/4\pi r^2$   
al tempo  $t$  l'energia è nulla fuori di una sfera di raggio  $r = vt$

- l'en. che traversa  $S$  in  $\Delta t$  è  
 $\Delta E = \eta \Delta V = \eta S \Delta r = \eta S v \Delta t$   
ossia  $P_{\text{media}} = \Delta E/\Delta t = \eta S v$

$$\rightarrow I = P_{\text{media}}/S = \eta v$$

ma  $\eta \propto A^2$  (vedi moto armon. sempl.)  $\rightarrow I \propto A^2$

- onda sferica:**  $I \propto 1/r^2$ ;  $A \propto 1/r$  (costanti per un'onda piana)



( $\eta$  – densità di energia)

valida per  $\forall$  onda



# Velocità di propagazione dell'onda

---

si può mostrare che

- corda tesa vibrante

$$v^2 = F/\mu$$

F tensione della corda,  $\mu = m/\text{lunghezza}$

- onde elastiche nei solidi

$$v^2 = Y/\rho$$

Y modulo di Young,  $\rho$  densità del mezzo

- onde sonore nei gas

$$v^2 = B/\rho = \gamma RT/M$$

B modulo di volume,  $\gamma = c_p/c_v$

- onde e.m. nel vuoto

$$v^2 = c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$$

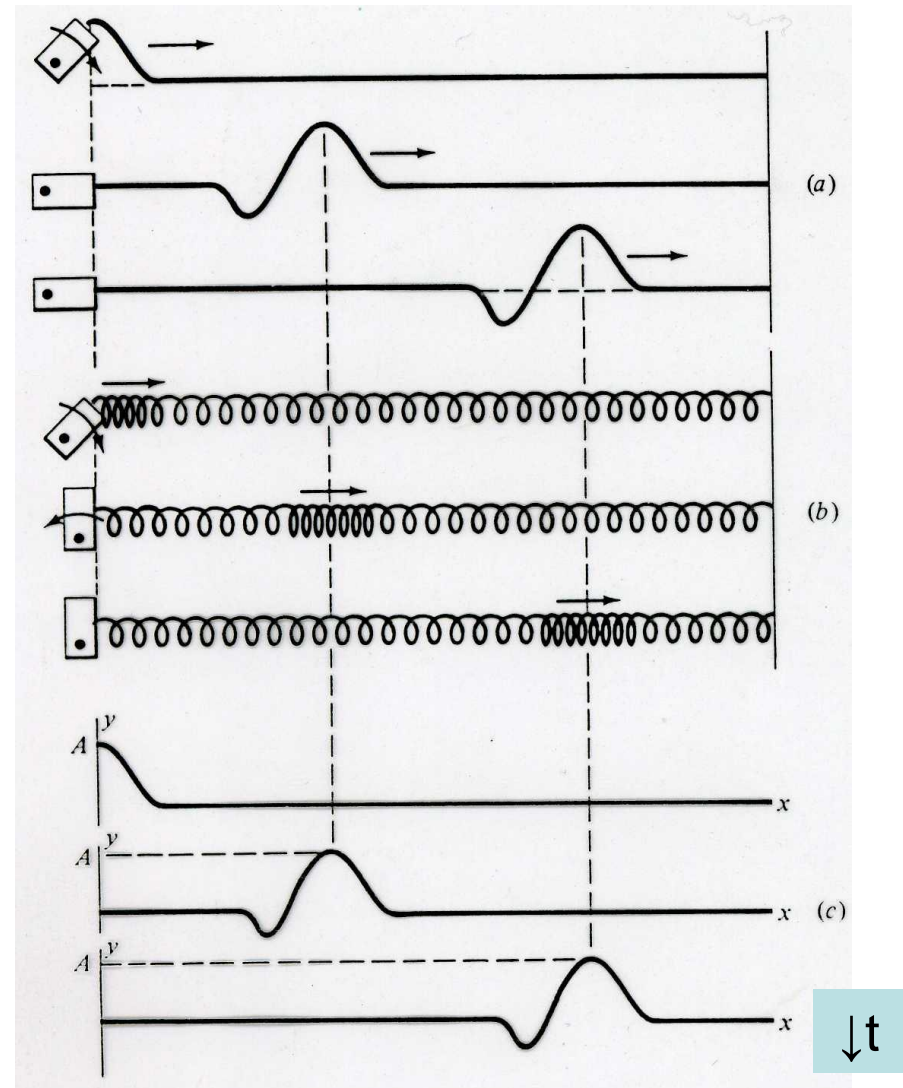
- etc. quindi in generale

$$v^2 \propto \frac{\text{(modulo di) elasticità del mezzo}}{\text{inerzia (o densità di massa) del mezzo}}$$



# Esempi di impulsi

- (a) impulso (corda sotto tensione) - trasversale
  - (b) impulso (molla o slinky) - longitudinale
  - (c) rappresentazione grafica di (a) e (b)
- 
- corda:  $y$  misura lo spostamento dalla posizione di equilibrio
  - molla:  $y$  misura la compress./allungamento

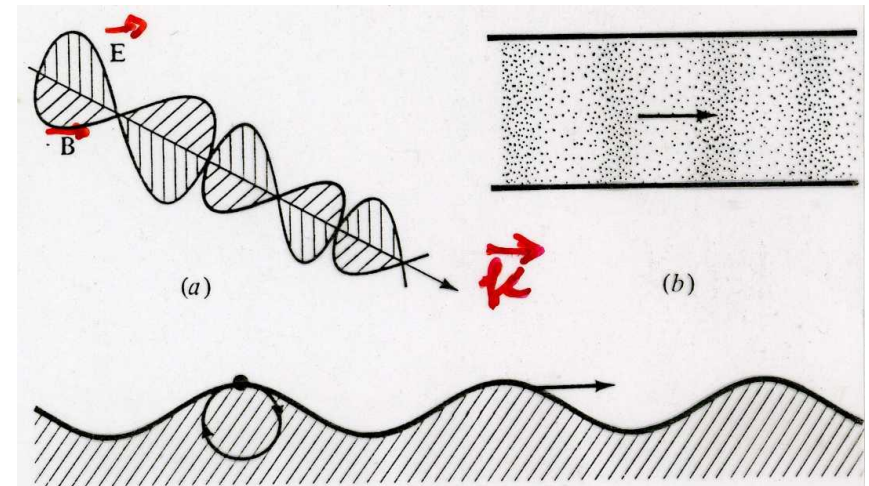
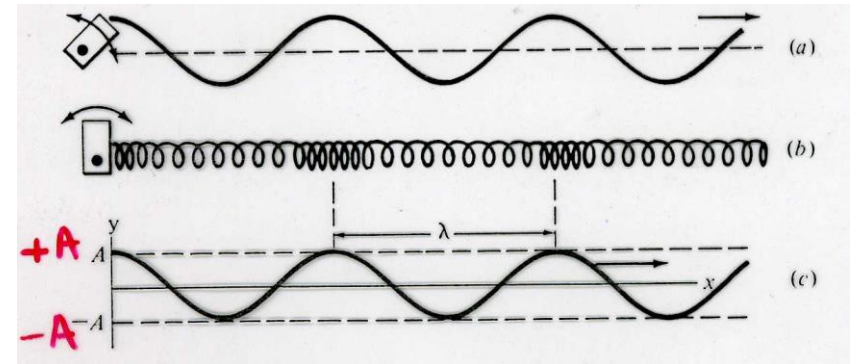






# Esempi di onde periodiche

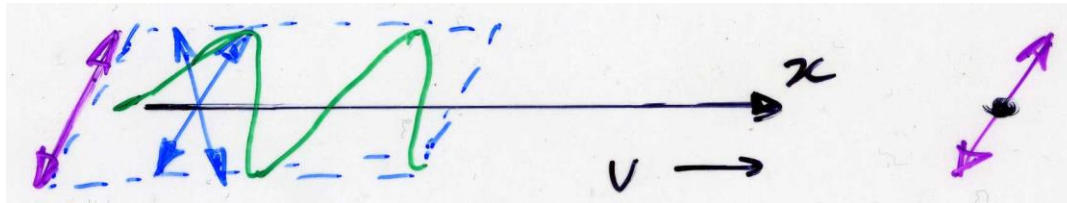
- (a) onda periodica (corda)
- (b) onda periodica (molla)
- (c) rappresentazione grafica di (a) e (b)
  
- (a) onda e.m.
- (b) onda sonora (pressione)
- onde d'acqua





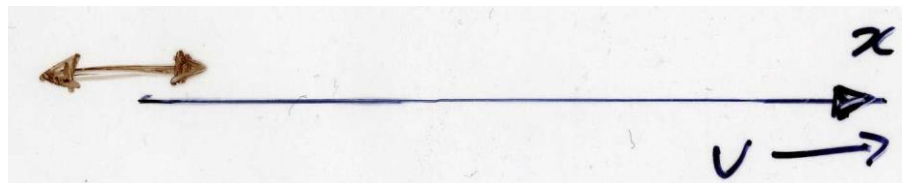
# Onde trasversali e longitudinali

- **onda trasversale: perturbazione  $\perp$  direzione di propagazione** (onde e.m., onde su una corda vibrante, onde dovute all'elasticità di taglio nei solidi)



**polarizzabile:** ad es. piano definito dalla perturb. e dalla direz. di propagazione fisso, polariz. lineare

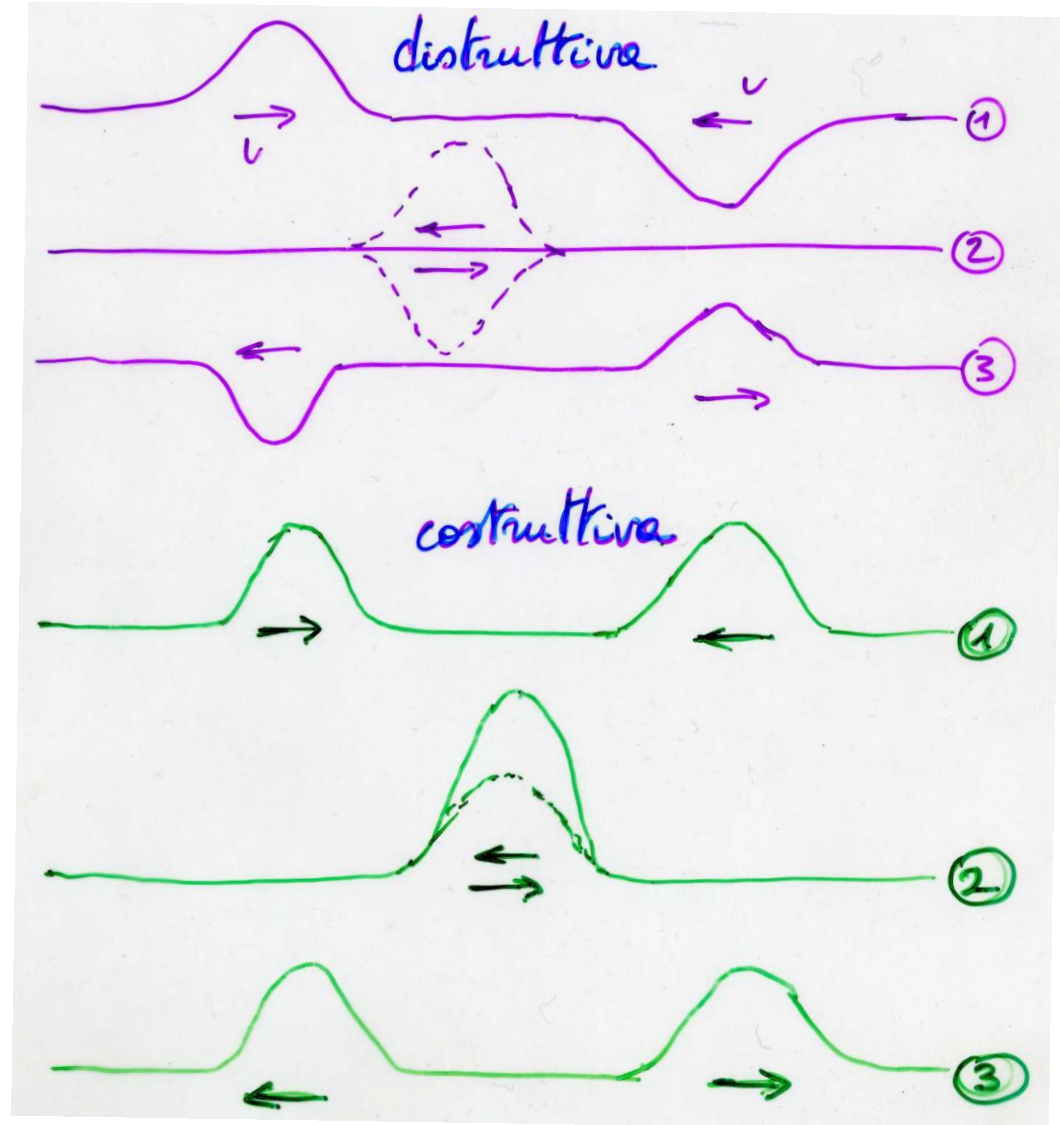
- **onda longitudinale: perturbazione  $//$  direzione di propagazione**



**non polarizzabile** (non si può individuare alcun piano)

# Principio di sovrapposizione (\*)

- le eq. sono lineari: in ogni punto in cui arrivano 2 (o più) onde / impulsi si devono sommare algebricamente le perturbazioni (sovrapposizione)
- ➡ interferenza
- costruttiva** / **distruttiva**  
(dove si ha **somma** / **differenza** di ampiezze uguali)



(\*) in alternativa



# Onde che si propagano in verso opposto – onde stazionarie

- ad es. in una corda tesa vibrante di lunghezza  $L$ : la riflessione dell'onda ad un estremo si somma con l'onda con l'onda incidente (riflessione con inversione di polarità agli estremi fissi)

- interferenza, in gen. distruttiva

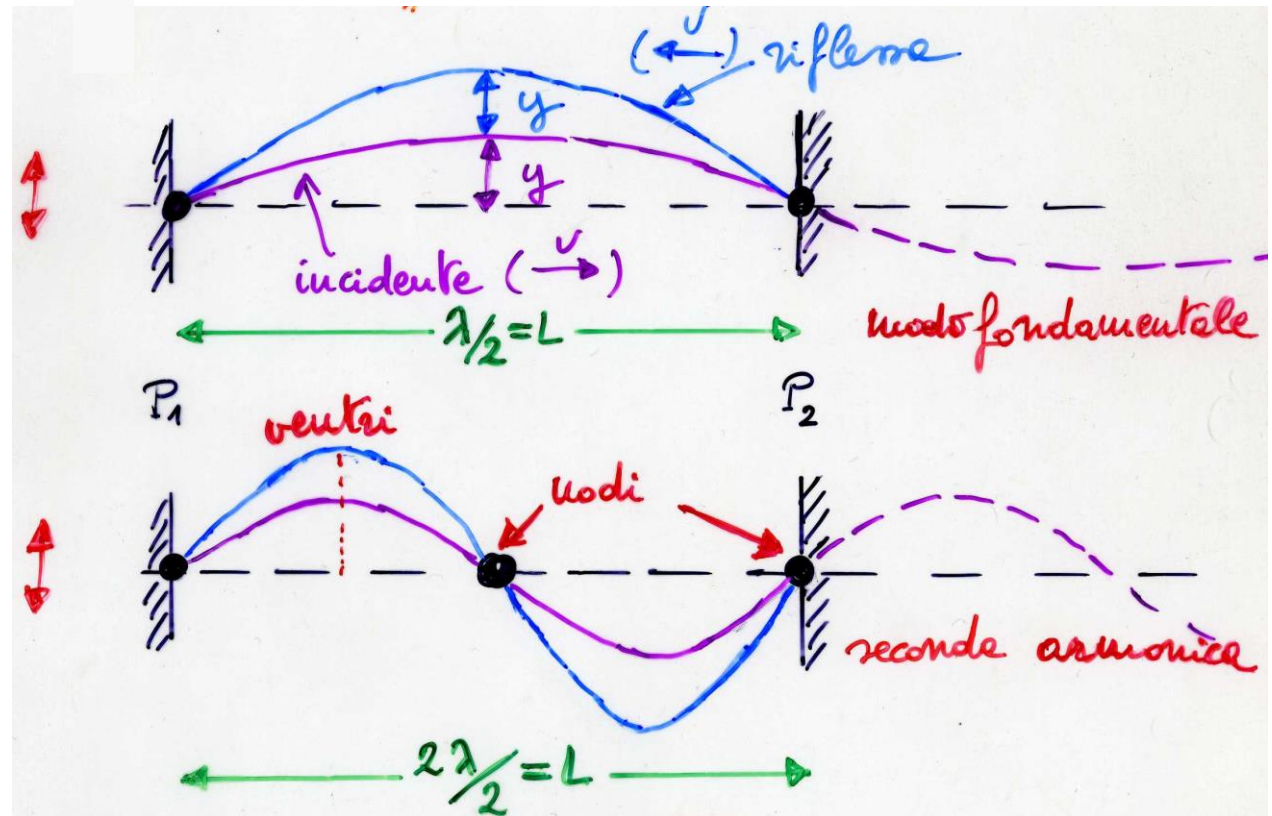
- relazione fra  $\lambda = v/\nu$  e  $L$  per avere interferenza costruttiva

- risonanza:

$$L = n(\lambda_n/2)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

intero





## Onde stazionarie (2)

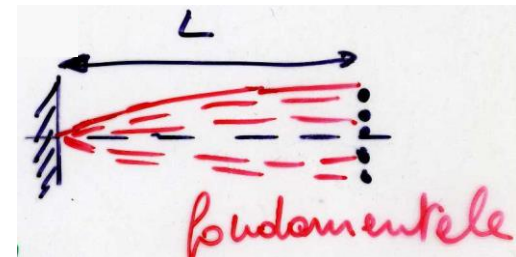
- per ottenere la risonanza tutte le onde devono essere in fase  
 $v_n = v/\lambda_n = nv/(2L) = nv_1 \quad n = 1, 2, 3 \dots$   
dove  $v_1 = v/(2L) = 1/(2L)\sqrt{(F/\mu)}$  è la frequenza fondamentale
- i nodi sono i punti dove l'ampiezza dell'onda è sempre = 0,  
i ventri quelli dove l'ampiezza è massima
- non c'è propagazione di energia fuori della corda, l'onda non viaggia (onda stazionaria)
- (\*) si può mostrare che la dipendenza da x e t si separa  
 $y = 2A\sin(2\pi x/\lambda)\cos(2\pi vt)$   
la condizione dei nodi  $\sin(2\pi x/\lambda) = 0$  dà  $2L/\lambda_n = n$  con n intero
- (\*) se invece un estremo è fisso (nodo) e l'altro mobile (ventre)  
– ad es. canna d'organo

$$n\lambda_n/4 = L \quad \text{con } n = 1, 3, 5 \dots \text{ dispari}$$

$$v_1 = v/(4L)$$

(\*) paragrafi facoltativi

fln mag 14

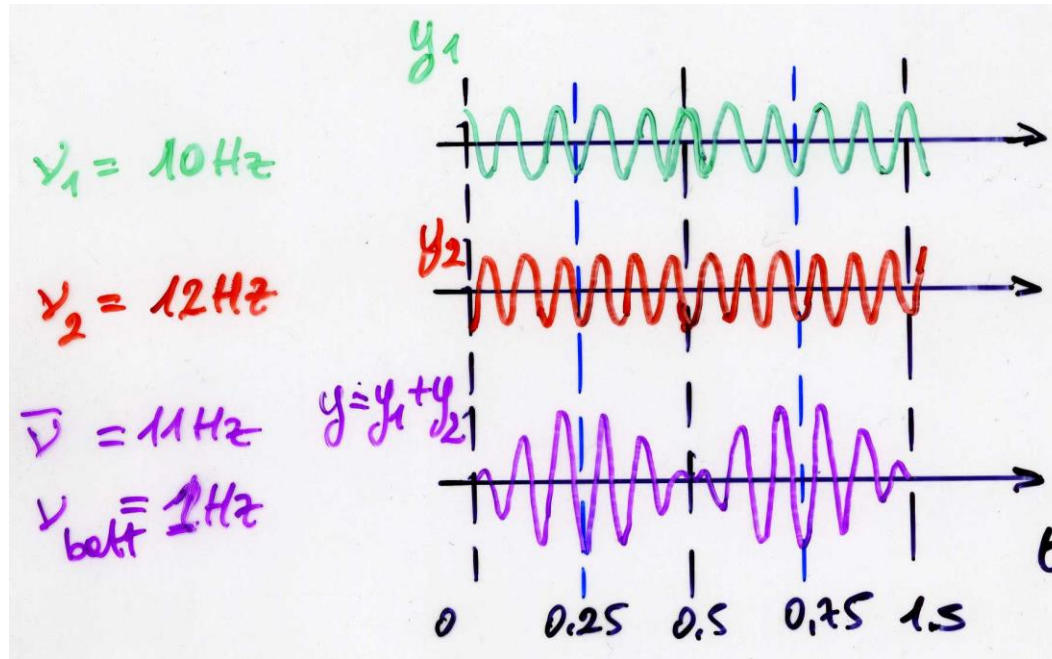






## Battimenti (\*)

- due (o più) onde di frequenza vicina e di uguale ampiezza, ad es.



interferenza  $\rightarrow$  frequenza media  $\bar{\nu} = (\nu_1 + \nu_2)/2$  per un termine modulante  $\nu_{\text{batt}} = (\nu_2 - \nu_1)/2$

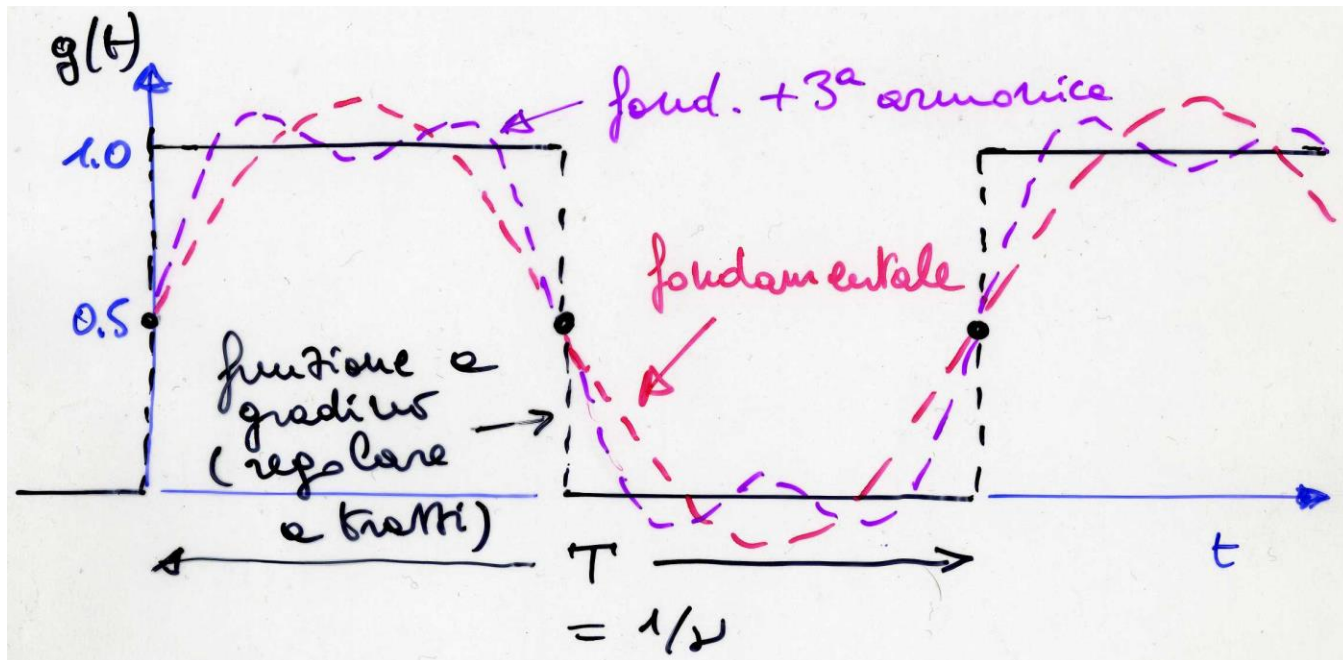
- usati per accordare strumenti musicali





# Moto periodico generico: teorema di Fourier (\*)

- il moto armonico semplice è il più semplice moto periodico → un generico moto periodico, ad es.  $g(t)$ , è esprimibile con una sovrapposizione di m.a.s.,  $f(t)$



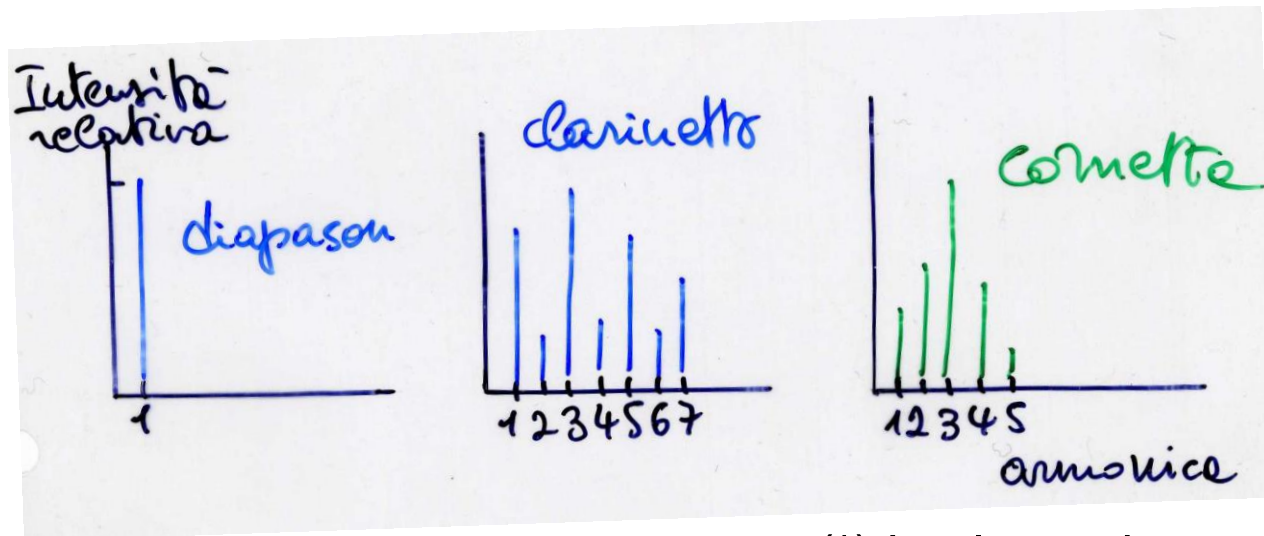
$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + \dots + \frac{1}{2n+1} \sin\left((2n+1) \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + \dots \right]$$

(\*) in alternativa a pagg. 54-61 fln mag 14



## Teorema di Fourier (2) (\*)

- $\forall$  moto periodico di dato  $T$  ( $\nu$ ) è rappresentabile come somma di tanti (in generale  $\infty$ ) m.a.s. di frequenza  $\nu$  (fondament.),  $2\nu$ ,  $3\nu$  ... (armoniche super.), in generale sfasati fra loro – **teorema di Fourier**
- strumenti diversi hanno, per una stessa nota, la stessa fondamentale ma diverse armoniche (diverso spettro)





# Onde sonore

- onde di pressione in gas, liquidi, solidi
- aria (20°C)  $v = \sqrt{(\gamma RT/M)} = 343 \text{ m/s}$
- H<sub>2</sub>O  $v = 1450 \text{ m/s}$
- $I = p_{\text{max}}^2 / (2\rho v)$

dove  $(\rho v)$  è l'impedenza acustica e  $p_{\text{max}}$  è in effetti un  $\Delta p$ , sovrapposto a  $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

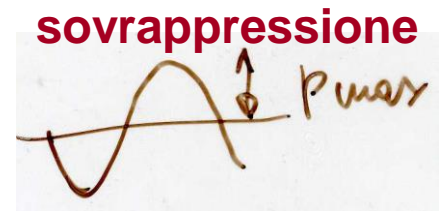
$p_{\text{max}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$     $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$    soglia di udibilità  
"   "    $30 \text{ Pa}$    "    $1 \text{ W/m}^2$    soglia del dolore

- $v$  e  $\lambda$ , l'orecchio umano è sensibile nell'intervallo

$v = (30, 20000) \text{ Hz}$    [ $< 30 \text{ Hz}$  infra-s.,  $> 20 \text{ kHz}$  ultra-s.]

$\rightarrow \lambda = (10, 0.02) \text{ m}$  in aria

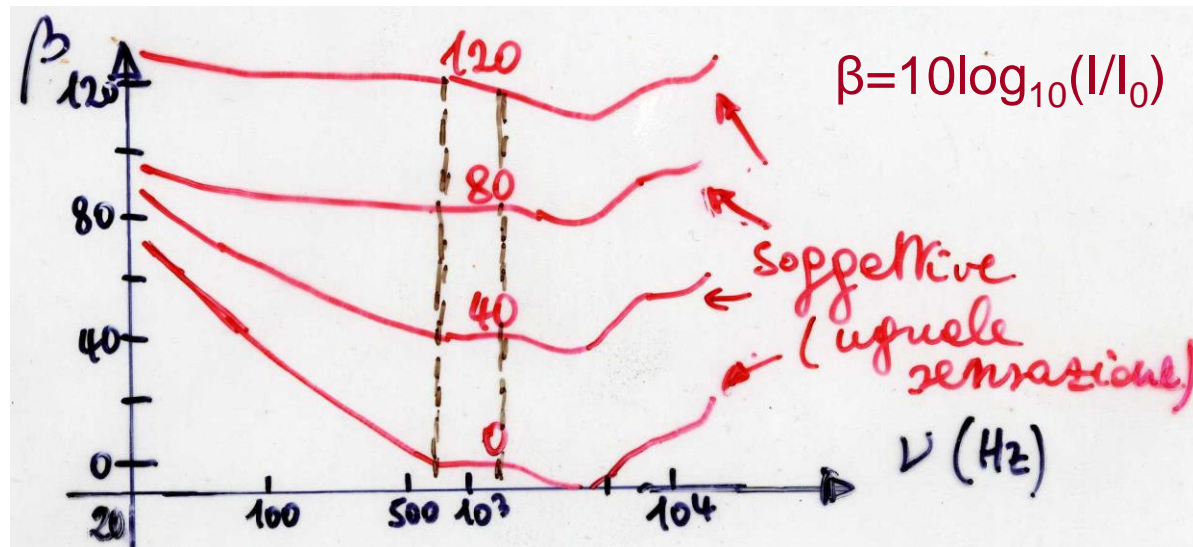
(l'orecchio del *Myotis lucifugus*  $v_{\text{max}} \sim 200 \text{ kHz}$  u.s.  $\lambda \sim 2 \text{ mm}$ )





## Onde sonore (2)

- u.s. in  $H_2O$  es. 5 MHz  $\rightarrow \lambda \sim 0.3$  mm  
si usano cristalli piezoelettrici: ecografia, produzione di emulsioni, lavaggi, effetti biologici su batteri
- sensibilità dell'orecchio: 12 ordini di grandezza in intensità  $\sim$  logaritmica (legge di Fechner)  $\rightarrow$  scala logaritmica





## Onde sonore (3)

---

- si definisce livello d'intensità

$$\beta = 10\log_{10}(I/I_0)$$

che si misura in decibel (dB), dove  $I$  è l'intensità che corrisponde a  $\beta$  e  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  la soglia di udibilità (con riferimento all'orecchio umano)

- soglia di udibilità:  $\beta = 10\log_{10}(I_0/I_0) = 0 \text{ dB}$   
“ del dolore:  $\beta = 10\log_{10}(10^{12}) = 120 \text{ dB}$

traffico stradale  $\sim 70\text{-}80 \text{ dB}$  (inquinamento acustico)

- siccome  $I \propto A^2$  si ha una definizione analoga di  $\beta$

$$\beta = 20\log_{10}(A/A_0)$$

con  $A$  ampiezza corrispondente a  $\beta$  etc.



# Effetto Doppler(\*)

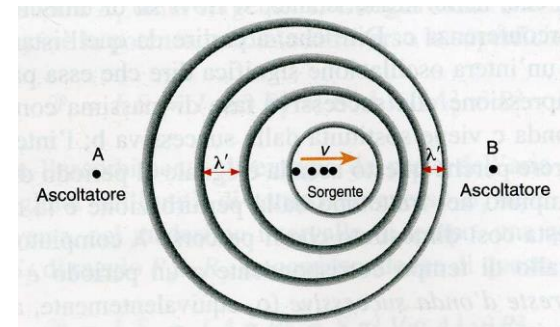
- consideriamo una sorgente S di onde sonore di frequenza  $\nu$  ed un osservatore O ad una certa distanza; se i due sono relativamente fermi, O sentirà un suono avente la stessa  $\nu$
- supponiamo che S si muova verso O con vel.  $v_s$  ed emetta una cresta per  $t=0$ : la successiva sarà emessa dopo  $T=1/\nu$ , intanto la 1<sup>a</sup> ha viaggiato  $\lambda=vT=v/\nu$  mentre S ha viaggiato  $v_s/\nu \rightarrow$  separazione fra due creste success.

$$\lambda' = v/\nu - v_s/\nu = (v - v_s)/\nu$$

e O sente una frequenza

$$\nu' = \nu \nu / (v - v_s)$$

( $\nu' = \nu/\lambda'$ , se si muove S, la vel. delle onde non cambia)







## Effetto Doppler (2) (\*)

- se S si allontana da O, si avranno creste più spaziate  
 $\lambda' = (v+v_s)/v$  e  $v' = v v/(v+v_s)$
- supponiamo ora S ferma e O che si avvicina con vel.  $v_o$ , la vel. delle onde relativa ad O è  $v+v_o$ , quindi O incontra le creste con frequenza

$$v' = (v+v_o)/\lambda = v (v+v_o)/v$$

( $\lambda = v/v$ , il moto di O non ha effetto sulla  $\lambda$  del suono, O intercetta solo più creste di quando è fermo relativamente ad S)

- S ferma e O si allontana, la vel. delle onde relativa ad O è  $v-v_o$  e avremo

$$v' = (v-v_o)/\lambda = v (v-v_o)/v$$



## Effetto Doppler (3) (\*)

- riassumendo: quando S e O si avvicinano, la frequenza del suono percepita da O aumenta; quando si allontanano, diminuisce – lo spostamento di frequenza può servire a misurare la velocità relativa
- riassumendo in una sola formula

$$v' = v \frac{v - v_o}{v - v_s}$$



dove  $v_s$ ,  $v_o$  vanno presi con valore e segno: saranno +vi se sono paralleli a  $v$ , -vi se antiparalleli

- le formule valgono per tutte le onde meccaniche (nei gas, liquidi, solidi); per la luce valgono in 1<sup>a</sup> approx, se le vel. sono  $\ll c$ , inoltre conta solo la vel. relativa



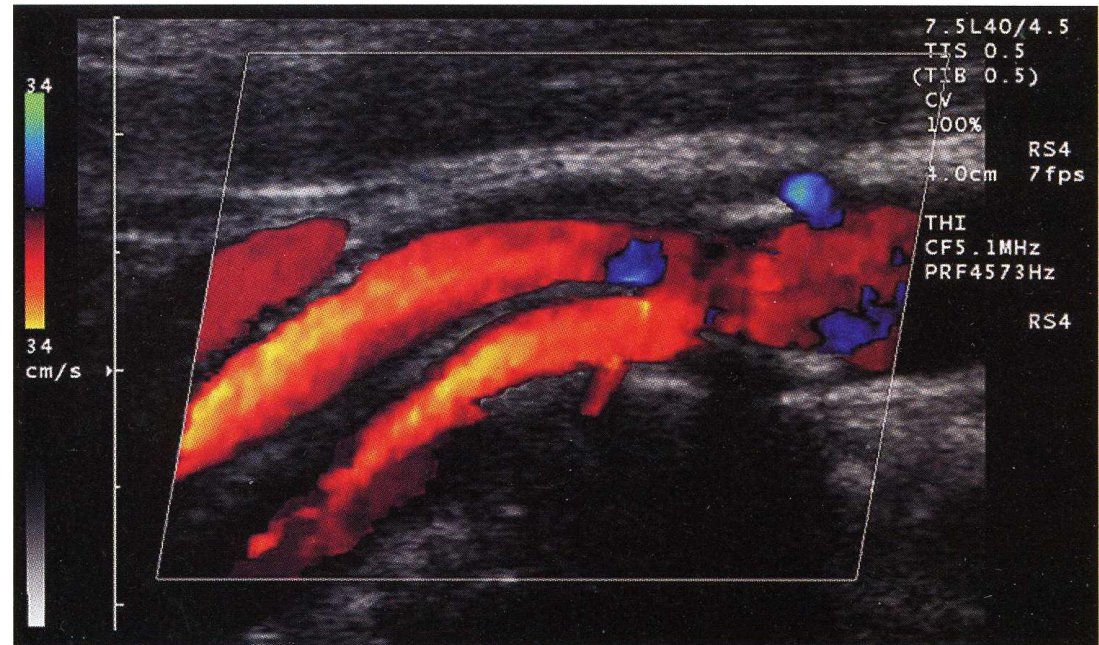
# Applicazioni dell'effetto Doppler (\*)

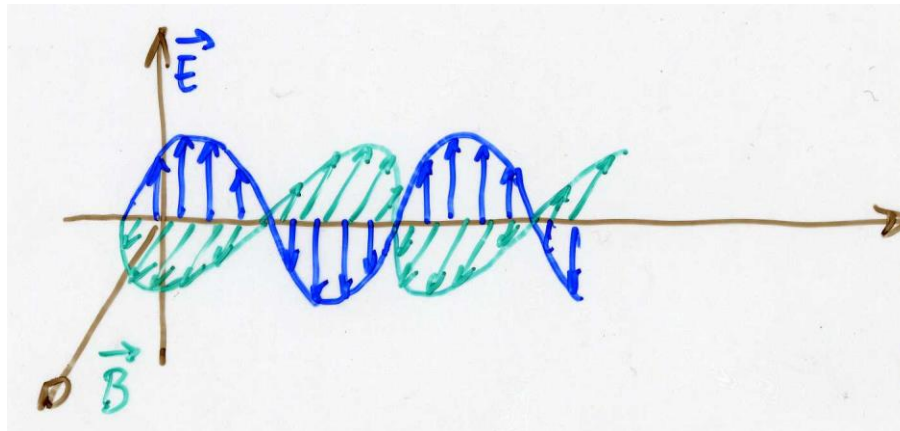
- radar (radio detecting and ranging) per misura di  $v_s$
- ecoDoppler con US; lo spostamento di frequenza è

$$\Delta v = 2(v_s/v) v \cos\theta$$

dove  $v_s$  è la vel. della sorgente (sangue, globuli rossi),  $v = 1540$  m/s quella del suono nei tessuti molli,  $\theta$  è l'angolo fra trasduttore e vaso sanguigno

- si lavora con impulsi brevi (come i delfini, pipistrelli etc.) ed i segnali riflessi (eco) sono processati matematicamente – rosso e blu indicano  $v_s +va$  e  $-va$ , rispett.



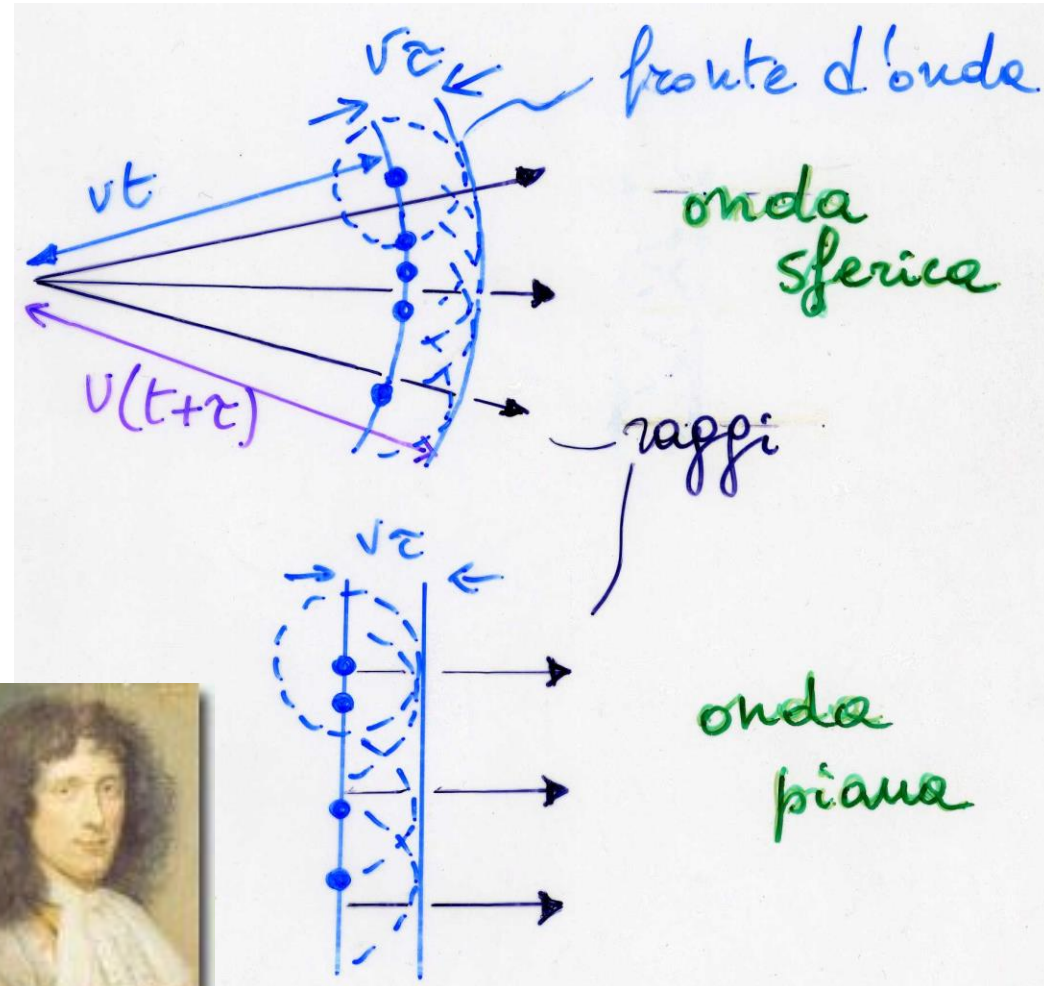


# Ottica fisica



# Principio di Huygens

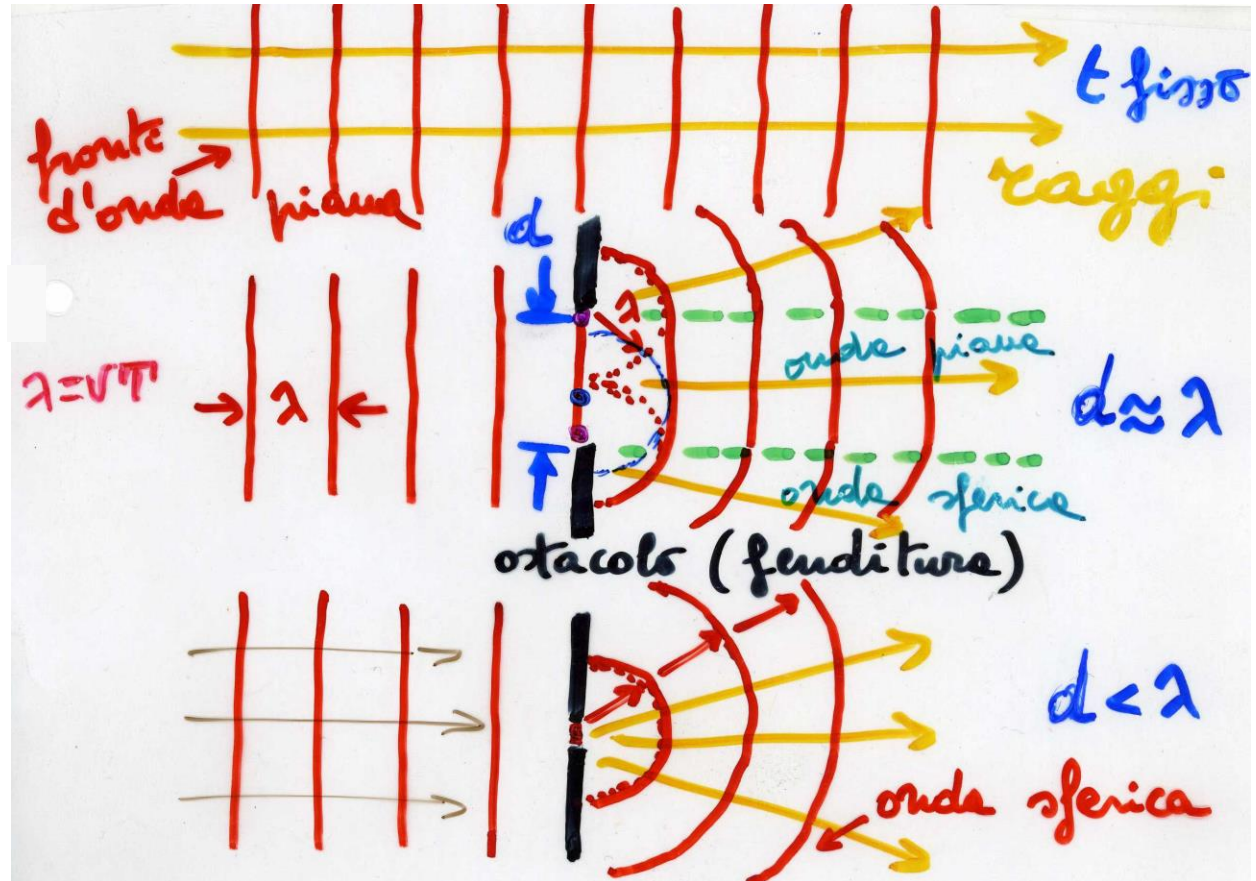
- propagazione di onde in mezzi omogenei e isotropi: l'involuppo delle onde sferiche elementari emesse dai punti di un fronte d'onda dà il nuovo fronte d'onda
- [ampiezza onde elem. max in avanti è = 0 per  $\theta \geq \pi/2$  (non ci sono onde regressive)]
- può essere esteso a mezzi anisotropi (birifrangenza) e alla propagazione in mezzi diversi (riflessione e rifrazione)





# Applicazione del principio di Huygens

- il principio di Huygens spiega naturalmente la **diffrazione delle onde**
- ad es. un fronte d'onda piano è trasmesso solo parzialm. da una fenditura, ai bordi si sviluppa un'onda sferica la cui ampiezza decresce come  $1/(\text{distanza dalla fenditura})$







# Diffrazione delle onde

- non si possono selezionare i raggi! quando un'onda incontra un ostacolo/fenditura di larghezza  $d$ 
  - $d \gg \lambda$ , si seleziona una larga parte del fronte d'onda, effetti di diffrazione solo ai bordi
  - $d \sim \lambda$ , diffrazione e trasmissione
  - $d < \lambda$ , dopo l'ostacolo l'onda è interamente diffratta ( $\sim$  onda sferica o cilindrica)
- onde sonore  $\lambda$  fra (0.02, 10) m diffrazione importante
- onde luminose  $\lambda_{\text{vis}}$  fra  $(0.4, 0.7) \cdot 10^{-6}$  m ottica geometrica
- risoluzione di punti vicini/ potere di localizzazione degli strumenti ottici (ad es. microscopio)

→ risoluzione  $\approx \lambda$

$$\lambda_{\text{blu}} = 4.5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \sim 10^4 r_0, \text{ raggio di Bohr (H)}$$

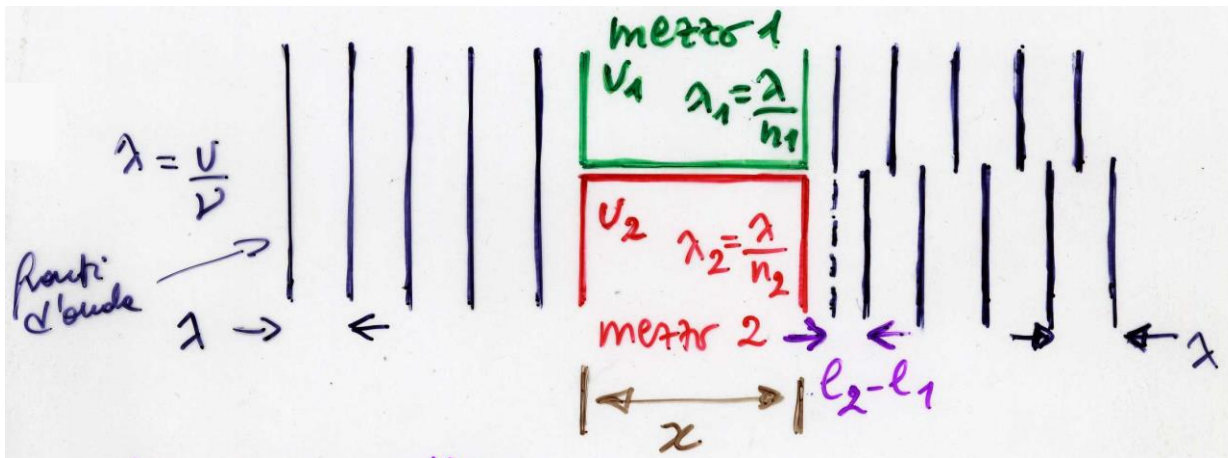
fln mag 14

non si possono  
“vedere” gli atomi  
in senso stretto



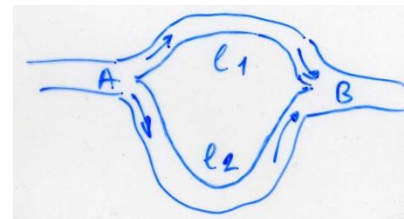
# Cammino ottico

- in un'onda piana varia solo la fase  
t fisso:  $y = A \sin(2\pi x/\lambda)$   $A = \text{cost}$
- onda che segue cammini diversi (passa in mezzi diversi)



- cammino ottico:  $l_{1,2} = n_{1,2}x$  ( $x/\lambda_{1,2} = n_{1,2}x/\lambda$ )
- differenza di fase:  $\delta = (2\pi/\lambda)(l_2 - l_1)$
- oppure si può variare il cammino geometrico

**sfasamento: effetto del mezzo sull'onda**





# Interferenza di onde armoniche (\*)

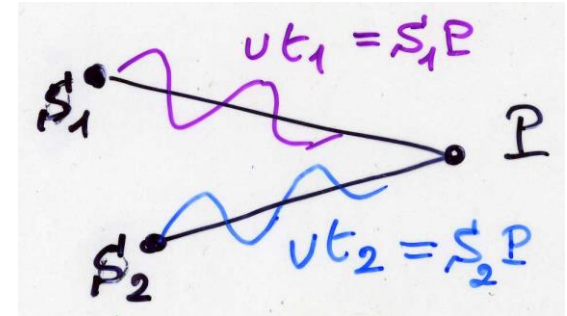
- x fisso (P), onde monocrom., stessa A

$$y_1 = A \cos \omega t$$

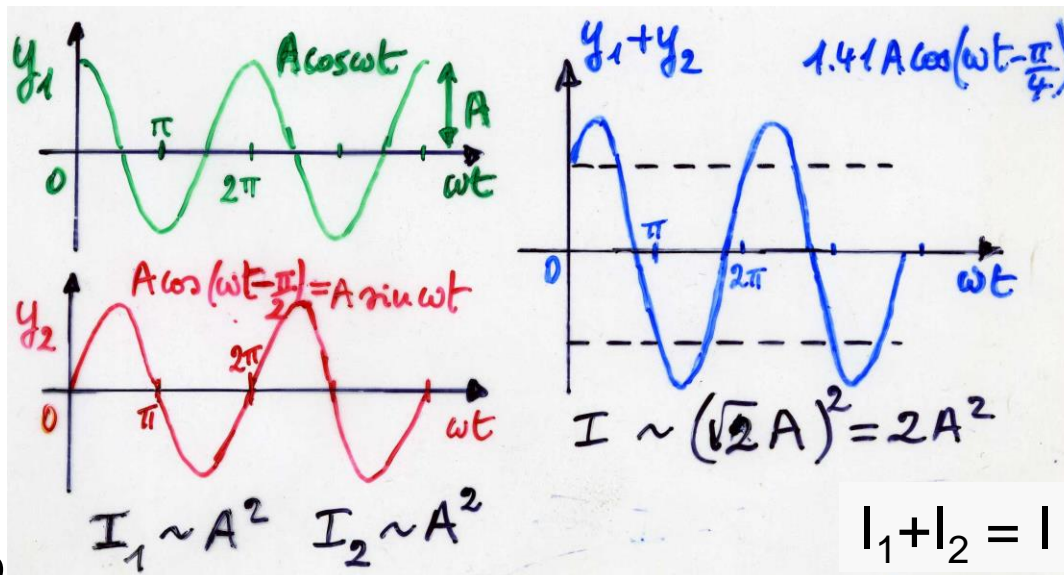
$$y_2 = A \cos(\omega t + \delta)$$

differenza di fase

$$\delta = 2\pi v(t_2 - t_1)/\lambda$$



- si ha sempre interferenza (ma con la luce normale, emissioni atomiche scorrelate e brevi, non si evidenzia)
- c'è interferenza sia con onde longitudinali che trasversali
- ad es.



(\*) facoltativo



## Interferenza (2) (\*)

---

- se  $\delta = 2m\pi$        $m = 0, 1, 2 \dots$   
[ $\Delta x = m\lambda$ ]

si ha **interferenza costruttiva**: le ampiezze si sommano

$$I \propto (A+A)^2 = (2A)^2 = 4A^2$$

- se  $\delta = (2m+1)\pi$        $m = 0, 1, 2 \dots$   
[ $\Delta x = (2m+1)\lambda/2$ ]

si ha **interferenza distruttiva**, le ampiezze si sottraggono

$$I \propto (A-A)^2 = 0$$

NB per evidenziare l'interferenza  $\delta$  deve essere fisso

( $\rightarrow$  sorgenti coerenti, relazione di fase fissa, il che non è vero per la luce normale)



# Interferenza della luce – esperienza di Young

- da una sorgente monocromatica (ad es. linea D del Na,  $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) se ne ottengono due coerenti, relazione di fase fissa, con artifici: due fenditure (Young) [o due specchi (Fresnel)]
- la luce prodotta dalle fenditure  $S_1$  e  $S_2$  è raccolta su uno schermo lontano (oppure si inserisce una lente) dove si osservano le frange d'interferenza
- in O, equidistante da  $S_1$  e  $S_2$ , le due onde arrivano sempre in fase  $\rightarrow$  interferenza costruttiva, max d'intensità, frangia chiara
- muovendosi sullo schermo, la diff. di cammino aumenta fino all'opposizione di fase, 0 di intensità, frangia scura; poi le onde ritornano in fase, frangia chiara etc.





# Interferenza della luce (2)

*frange chiare e scure ad es.*

*schermo*

*O in fase*

*A' in oppos. di fase*

*B' in fase*

*P*

*y*

*O*

*$S_1PX$  inosceole*

*$S_2X$  differenza di cammino ottico*

*$L \gg d$  (oppure lente)*

*$S_1 \hat{\times} S_2 \sim \perp, 90^\circ$*

*$S_2 \hat{\times} S_1 = \varnothing$*

*$2\pi \frac{S_2 X}{\lambda}$  diff. di fase*

*$S_2 X \sim d \sin \theta \sim d \tan \theta = \frac{dy}{L}$*





## Interferenza della luce (3)

- in P generico, le onde difratte da  $S_1$  e  $S_2$  sono in fase se la diff. di cammino ottico è un numero intero di  $\lambda$  (in opposizione se numero dispari di  $\lambda/2$ )

in fase  $dy/L = m\lambda$   $m = 0, 1, 2, \dots$

in opposiz.  $dy/L = (2m+1)\lambda/2$  ”

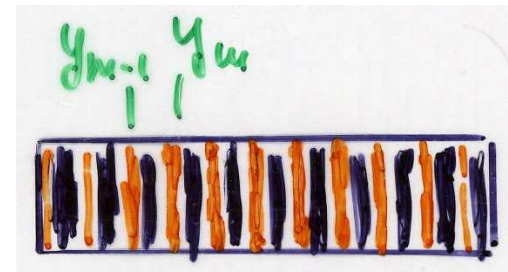
diff. di fase  $2\pi dy/(\lambda L)$

- distanza fra massimi / righe gialle (o minimi / righe scure) sullo schermo

$$y_m - y_{m-1} = L\lambda/d$$

$$\rightarrow \lambda = (d/L)\Delta y$$

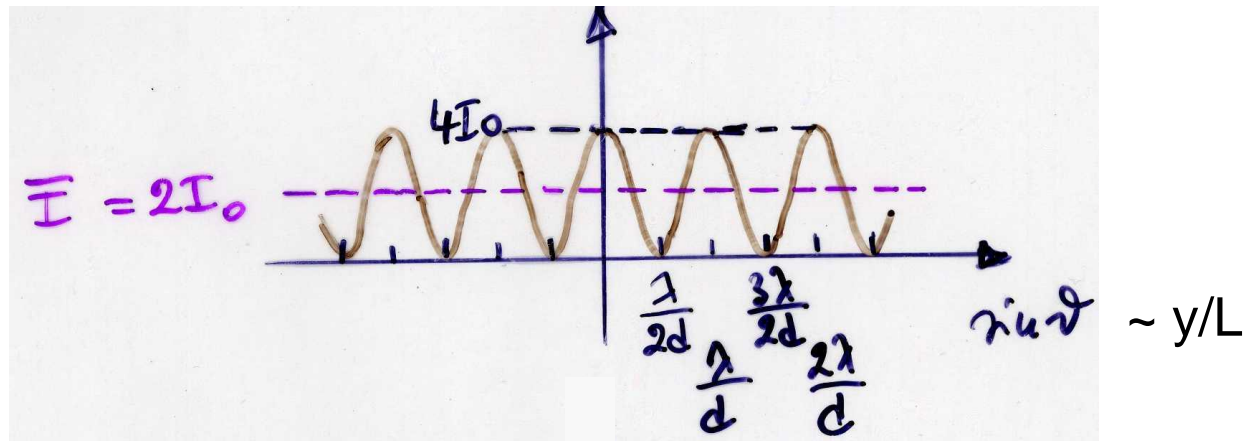
con  $\lambda \sim 0.6 \mu\text{m}$ ,  $d = 1 \text{ mm}$ ,  
 $L = 2 \text{ m} \rightarrow \Delta y = 1.2 \text{ mm}$





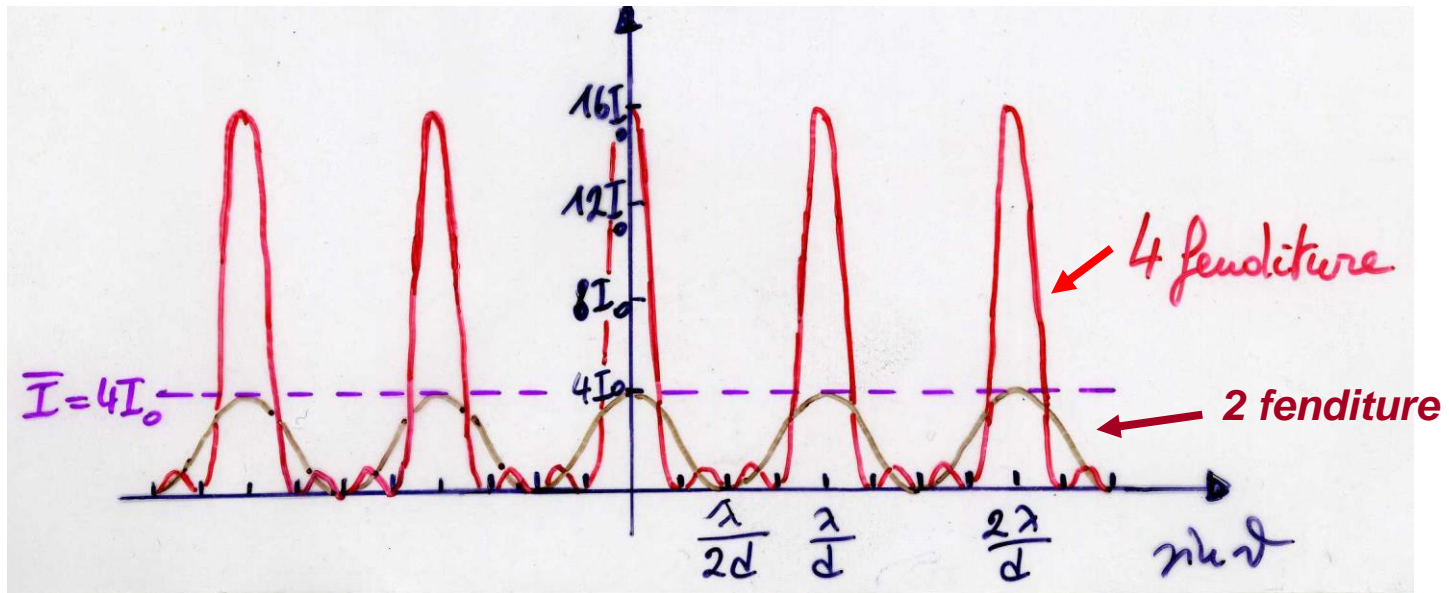
## Interferenza della luce (4)

- l'interferenza della luce prova che la luce è un fenomeno ondulatorio (ma non se è trasversale o longitudinale, per distinguere bisogna studiare la polarizzazione)
- se non si usa una sorgente monocromatica → max e min sovrapposti (a parte il primo) e non si osservano le frange
- intensità sullo schermo con 2 fenditure



## Interferenza della luce (5) (\*)

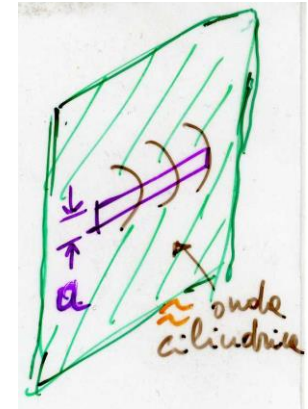
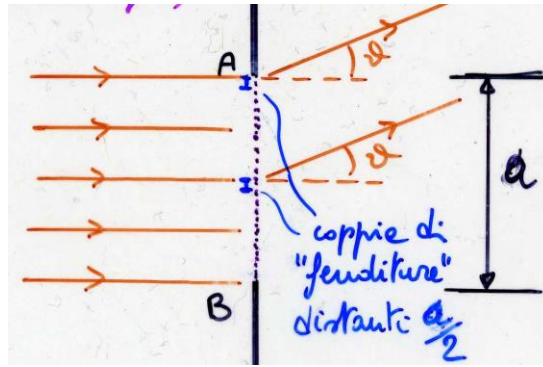
- se si ripete l'esperimento con un numero maggiore di fenditure si ottengono massimi più separati (e si sviluppano max secondari → è più facile misurare  $\lambda$ ); ad es. con 4 fenditure l'intensità è



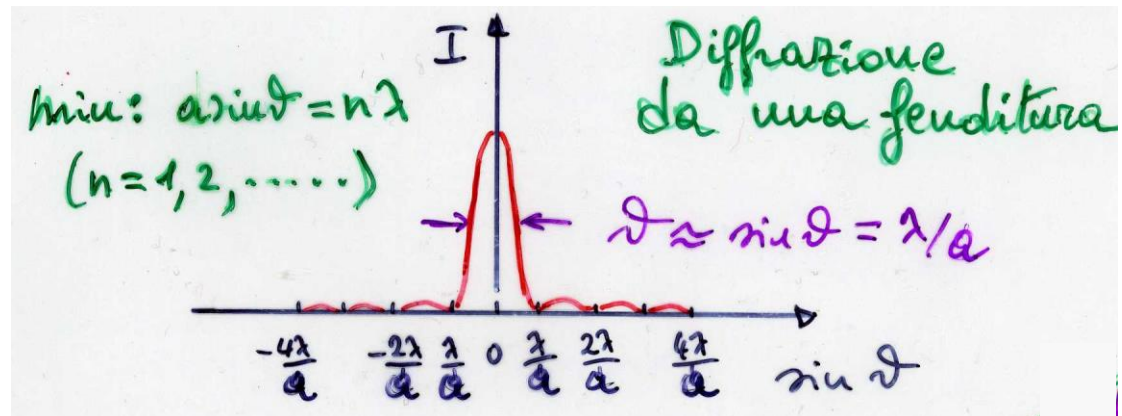
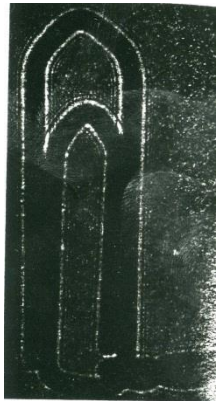


# Diffrazione da una fenditura

- diffrazione à la Fraunhofer (schermo a grande distanza o nel piano focale di una lente)

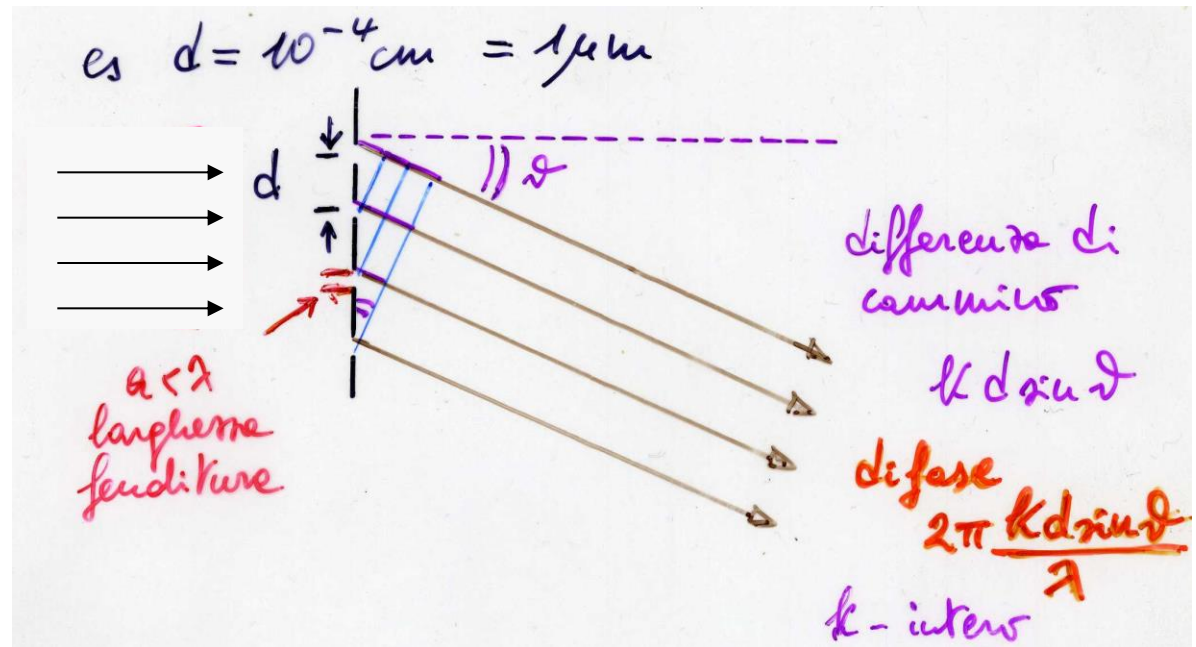


- scomponendo la fenditura in coppie di fenditure distanti  $a/2$  si può vedere che c'è un max di  $I$  per  $\theta = 0$  e max secondari molto deboli



# Reticolo di diffrazione

- realizzato con incisioni // su vetro o plastica
- se c'è un max per una coppia di fenditure, tutte le altre sono in fase



$$\sin\theta = k\lambda/d$$

$$k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

ora  $\theta$  è grande, es.  $\lambda = 0.589 \mu\text{m}$ ,  $\theta_1 = 36.1^\circ \rightarrow$  misura di  $\lambda$  più precisa

- se  $\sin\theta \neq k\lambda/d$  si ha interferenza distruttiva  $\rightarrow$  max ben separati



# Limitazioni dei microscopi

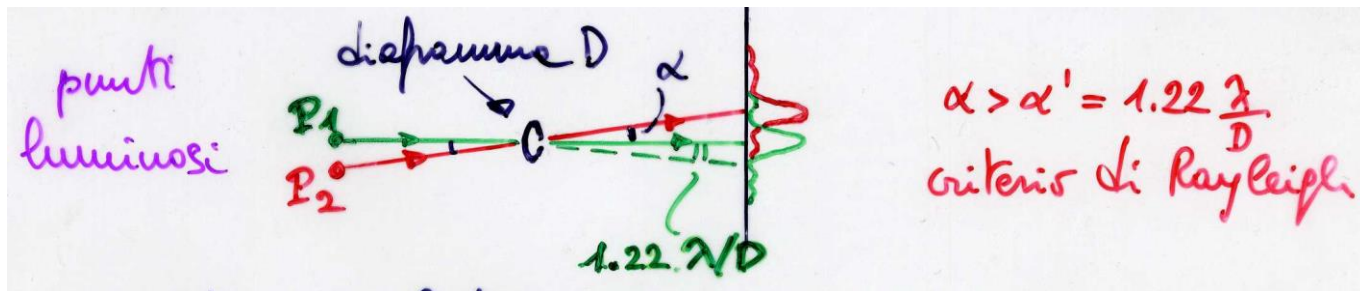
---

- l'ingrandimento del microscopio ottico è dato approx da
$$M = -(16 \text{ cm}/f_{ob})(25 \text{ cm}/f_{oc})$$
- limitazioni
  - aberrazioni geometriche → diaframmi, sistemi di lenti (perdita di luce)
  - aberrazioni cromatiche → lenti composte (perdita di luce, ogni rifrazione aria-vetro implica 4% di luce persa in riflessione, oltre ad artefatti, 4 lenti, 8 riflessioni, 32% di luce persa etc.)
  - $f_{ob,min} \sim 4 \text{ mm}$ ,  $f_{oc,min} \sim 10 \text{ mm}$   
→  $M \sim -1000$
  - limite intrinseco: dato dalla natura ondulatoria della luce, due punti luminosi appariranno in effetti come figure di diffrazione di larghezza  $\propto \lambda$



## Limitazioni dei microscopi (2)

- diffrazione da un'apertura / ostacolo di diametro  $D$ , **larghezza della macchia**  $\sim 1.22\lambda/D$  – due punti saranno separabili solo se le macchie non si sovrappongono



- si può mostrare (principio di Abbe) che  $d_{\min} = 0.61\lambda/(n\sin\theta)$  dove  $n$  è l'ind. di rifraz. del mezzo intorno all'obietto, e  $\theta$  l'angolo sotto cui è visto l'obiettivo  $\rightarrow$  ingrand. utile

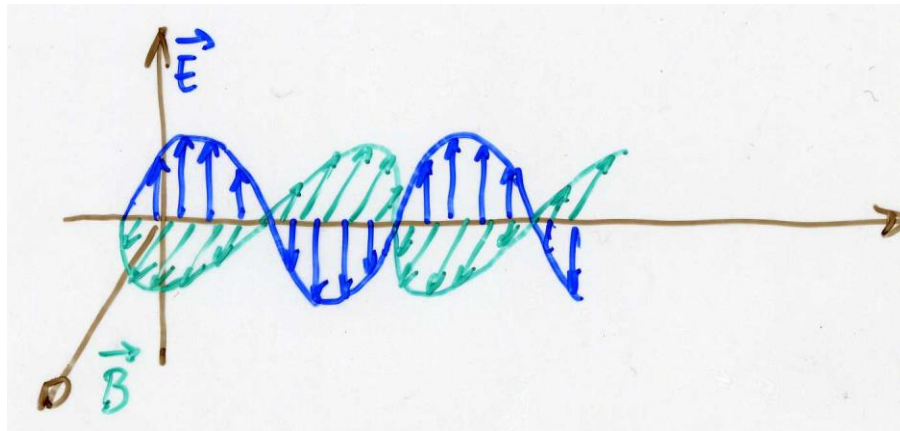
$$M_{\text{utile}} \sim d/d_{\min} \sim 0.1 \text{ mm}/0.2 \mu\text{m} \sim 500$$

- $\rightarrow$  obiettivi a immersione (olio  $n = 1.55$ ,  $\lambda' = \lambda/n$ ); UV, però lenti di  $\text{SiO}_2$  e fotografia  $\rightarrow$  microscopio elettronico,  $\lambda \propto 1/(mv)$  (vedi microfisica)



# Polarizzazione della luce

- le onde e.m. sono trasversali: si dimostra osservando la polarizzazione della luce, ad es. se  $\mathbf{E}$  oscilla // direzione fissa si ha polarizzazione lineare



- polarizzazione: si ottiene con polaroids (catene allungate conduttrici in una direzione, assorbono una componente di  $\mathbf{E}$ ), riflessione, dicroismo, birifrangenza



## Polarizzazione (2)

- ad es. polarizz. per riflessione

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 ; \quad \theta_r = \theta_1$$

$$\text{se } \alpha = 90^\circ, \quad \theta_2 = 90^\circ - \theta_r$$

$$\sin \theta_2 = \cos \theta_1$$

d'altra parte se le onde e.m.

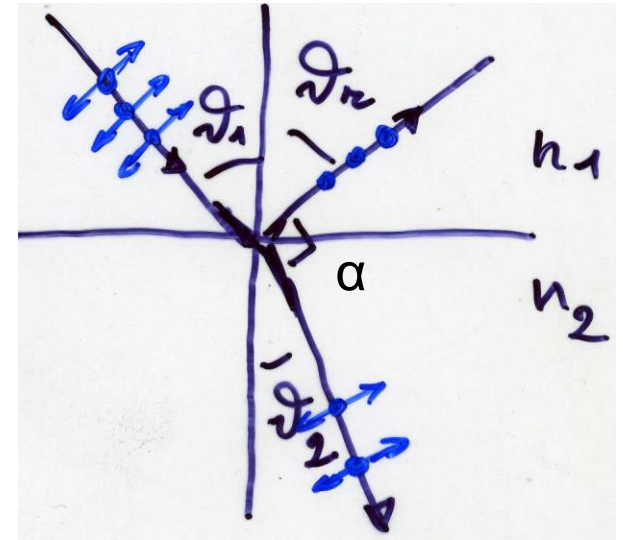
sono trasversali, l'onda riflessa,

dovuta all'oscillazione nel mezzo 2, non può avere una componente nella direzione di propagazione →

risulta polarizzata  $\perp$  al piano del disegno per un angolo  $\theta_1 = \theta_p$

$$\text{tg} \theta_p = \sin \theta_p / \cos \theta_p = \sin \theta_1 / \sin \theta_2 = n_2 / n_1$$

**legge di Brewster**





## Polarizzazione (3)

- se un fascio di luce traversa un (o più) polaroid, solo una componente di  $\mathbf{E}$  può passare, l'altra sarà assorbita → riduzione di ampiezza e di intensità
- legge di Malus, luce polarizzata linearmente in ingresso di ampiezza  $E_0$ , intensità  $I_0$

$$E_1 = E_0 \cos \theta_1 \quad I_1 = I_0 \cos^2 \theta_1$$

dove  $\theta_1$  è l'angolo fra  $\mathbf{E}$  e l'asse di trasmissione del polaroid, secondo cui la luce è polarizzata in uscita;

se la luce non è polarizzata,  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  
valor medio sul 1° quadrante,

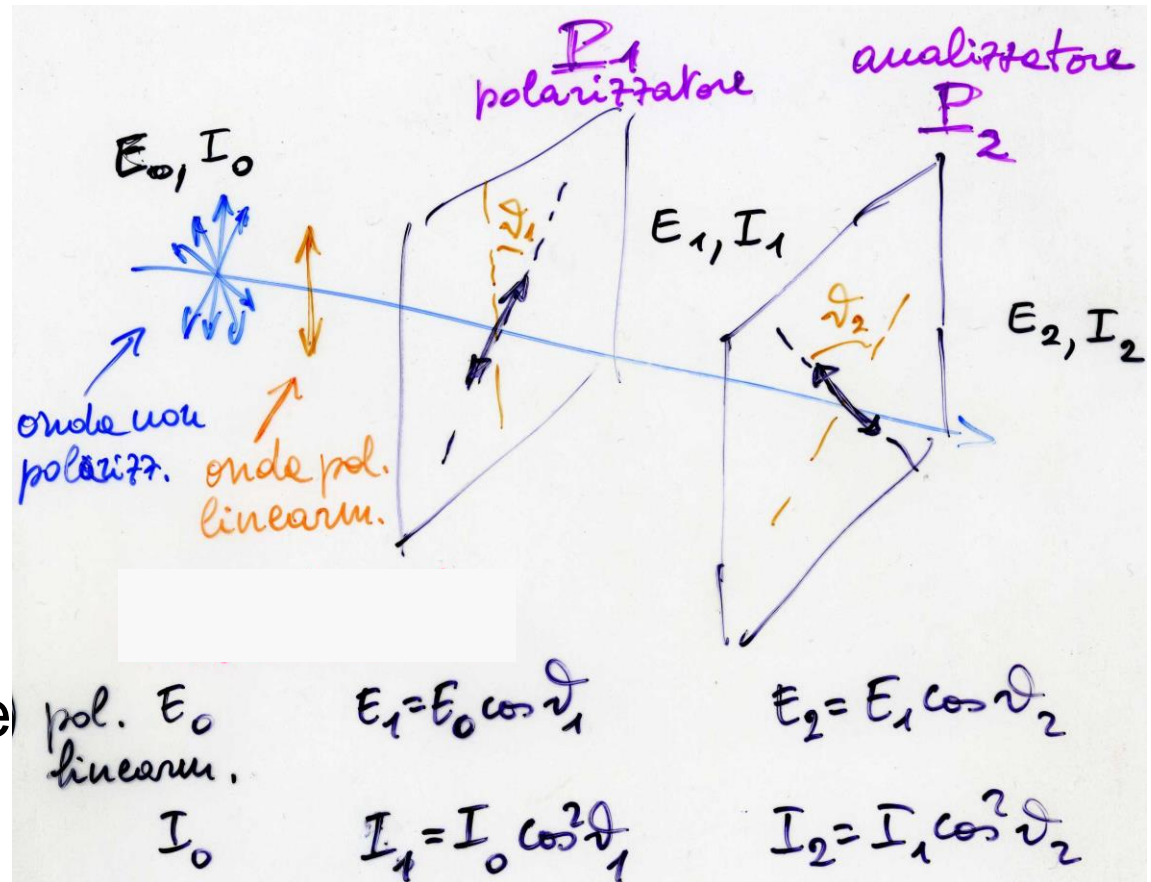
$$E_1 = E_0 / \sqrt{2} \quad I_1 = I_0 / 2$$





# Polarizzazione (4)

- con due polaroid in serie, il 2° vede la luce passata dal 1° e basterà applicare due volte la legge di Malus
- con questo sistema è possibile studiare ad es. una soluzione otticamente attiva posta fra  $P_1$  e  $P_2$  e misurarne la concentrazione  $\propto$  angolo di cui ruota  $E$



non	$E_0$	$E_1 = E_0/\sqrt{2}$	$E_2 = E_0 \cos \theta_2 / \sqrt{2}$
pol.	$I_0$	$I_1 = I_0/2$	$I_2 = I_0 \cos^2 \theta_2 / 2$



**Two cowboys marvelling at the  
Doppler effect in a train whistle**

**Fine di oscillazioni e onde**