Esercizi sul calcolo delle probabilità

per Farmacia Ospedaliera

AA2008/09

F.-L. Navarria

Applicazione del teorema di Bayes

Qual è la probabilità che nell'urna ci siano due palline R nel caso di osservazione dell'evento x = "estrazione di una pallina R" se l'insieme delle ipotesi è il seguente?

- **A_1 = nell'urna ci sono due palline R**
- **A_2 = nell'urna ci sono due palline G**
- **A_3 = nell'urna ci sono due palline B**
- **A_4 = nell'urna ci sono una pallina R e una G**
- **A_5 = nell'urna ci sono una pallina R e una B**
- **A_6 = nell'urna ci sono una pallina G e una B**

e a ciascuna di esse associamo la stessa probabilità a priori, 1/6.

Abbiamo

$p(x|A_1) = 1$

$p(x|A_2) = p(x|A_3) = p(x|A_6) = 0$

$p(x|A_4) = p(x|A_5) = 1/2$

Applicazione del teorema di Bayes (cntn)

$p(A_1|x) = p(A_1)p(x|A_1)/\Sigma_{i=1,6}p(A_i)p(x|A_i)$

$= 1/6\cdot 1/[(1+0+0+0.5+0.5+0)\cdot 1/6] = ½$

$p(A_4|x) = p(A_4)p(x|A_4)/\Sigma_{i=1,6}p(A_i)p(x|A_i)$

$= 1/6\cdot 1/2/[(2)\cdot 1/6] = ¼$ &tc.

Supponiamo che si verifichi un successivo evento

y = "estrazione di una pallina R".

Avremo con le nuove probabilità per le hp.

$p(A_1|y) = p(A_1)p(y|A_1)/[p(A_1)p(y|A_1)+2\ p(A_4)p(y|A_4)]$

$= 1/2\cdot 1/[1/2\cdot 1+2\cdot 1/4\cdot 1/2] = 2/3$

$p(A_4|y) = p(A_4)p(y|A_4)/[p(A_1)p(y|A_1)+2\ p(A_4)p(y|A_4)]$

$= 1/4\cdot 1/2/[1/2\cdot 1+2\cdot 1/4\cdot 1/2] = 1/6$ &tc.

Applicazione del teorema di Bayes (cntn)

Supponiamo adesso di continuare ad estrarre palline R, le probabilità delle hp. varieranno (a priori -> x -> y -> z -> t ...)

A_1: 1/6 1/2 2/3 4/5 8/9 ...

$A_2=A_3=A_6$: 1/6 0

$A_4=A_5$: 1/6 1/4 1/6 1/10 1/18 ...

e se invece, alla 5a estrazione, si realizzasse l'evento u = "estrazione di una pallina G"?

Avremo

$p(u|A_1) = p(u|A_5) = 0$; $p(u|A_4) = 1/2$

$p(A_1|u) = p(A_1)p(u|A_1)/[0+ p(A_4)p(u|A_4)+0] = 0$ [$= p(A_5|u)$]

$p(A_4|u) = p(A_4)p(u|A_4)/[p(A_4)p(u|A_4)] = 1$

ed è inutile continuare ad estrarre!

Teorema di Bayes: un altro esercizio

Supponendo che due mammografie successive sulla stessa persona diano risultati indipendenti (irreale, ma semplifica i calcoli…), valutare la probabilità di essere malati nel caso in cui, dopo un primo risultato positivo del test, si decida di ripetere il test e si abbia di nuovo un risultato positivo.

Probabilità di essere malati: **P(M) = 7.5% = 0.075** (1a mammografia +va)

Probabilità di essere sani: **P(S) = 1 – 7.5% = 92.5% = 0.925**

Probabilità di avere il test positivo se malati (prob. condizionata):

P(+ | M) = 80% = 0.80

Probabilità di avere il test positivo se sani (prob. condizionata):

P(+ | S) = 10% = 0.10

Per il teorema di Bayes:

$$P(M|+) = P(+ | M) \cdot P(M) \;/\; [\, P(+ | M) \cdot P(M) + P(+ | S) \cdot P(S) \,]$$
$$= 0.8 \cdot 0.075 \;/\; [\, 0.80 \cdot 0.075 + 0.10 \cdot 0.925 \,]$$
$$= 0.393 = 39\%$$

Cioè la frazione di donne effettivamente malate fra quelle che risultano positive ad una 2a mammografia è ora del 39%