Statistica 4 – inferenza – test di ipotesi

per Farmacia Ospedaliera

AA 2008/09

Teoria statistica della stima

Popolazione (sconosciuta, almeno in parte)

Campione | parametri campionari
| ad es. media, varianza,
| porzioni percentuali

(inferenza statistica)

Parametri popolazione (in certi casi un par. della pop. può essere noto ad es. la σ)

Stima di un parametro di pop.: valore assegnato a partire dal valore della corrispondente statistica campionaria, detta **stimatore**.

Stime corrette

μ(popolazione) = $\underline{x}$ media campionaria

σ^2(popolazione) = $N/(N-1)s^2$ varianza campionaria

dove N è l'ampiezza del campione

Teoria statistica della stima/2

- **Stime efficienti** (minor varianza)

  media: $\sigma_{\underline{x}} = \sigma/\sqrt{N}$

  mediana: $\sigma_{med} = \sigma\sqrt{\pi/2N} > \sigma_{\underline{x}}$

- **Stima puntuale** (valore della statistica campionaria usata per stimare un par. di pop.), ad es. $\underline{x} = 5.28$ cm – a questo va aggiunto il margine di errore della misura, una o più $\sigma_{\underline{x}}$, ad es. $\underline{x} = (5.28 \pm 0.03)$ cm - errore (piccolo) $\leftrightarrow$ affidabilità (grande) della misura
- **Stima per intervallo**, si definisce un intervallo di valori centrato sulla stima puntuale $\underline{x}$ e si associa a questo una probabilità (livello di confidenza, CL) che in esso sia contenuto il par. di pop. μ - per es. l'intervallo (5.25cm,5.31cm) contiene μ al 68.3% di CL, se $\sigma_{\underline{x}} = 0.03$cm

Intervalli di confidenza

- dati μ_S, σ_S della statistica S
- se S è normale (grandi campioni, N≥30) si aspetta che

$\mu_S-\sigma_S < S < \mu_S+\sigma_S$ nel 68.27% degli esperimenti

limiti di confidenza al 68.27% di livello di confidenza

$\mu_S \pm 1.96\sigma_S$ limiti di conf. al 95%

$\mu_S \pm 2.58\sigma_S$ " " " al 99%

valori critici z_c

Nota sugli intervalli di confidenza

- normalmente un’affermazione di confidenza ha la forma: “al 90% l’intervallo di confidenza per μ (per es.) è a,b” – cioè siamo confidenti al 90% che μ giaccia nell’intervallo a,b – l’intervallo di confidenza è a,b ed il livello di confidenza è 0.90
- l’affermazione “siamo confidenti al 90% che μ giaccia nell’intervallo a,b” ***non*** significa che la probabilità che μ giaccia nell’intervallo a,b sia 0.90 – significa che se estraiamo un grande numero di campioni dalla popolazione e troviamo un intervallo di confidenza per μ per ciascun campione, circa 90% degli intervalli a,b conterrebbero μ (ciascun intervallo di confidenza può essere trovato con le formule appropriate per μ)
- con le relative formule appropriate si possono dare intervalli di confidenza per σ

Livelli di confidenza (a due code)

Valori più usati di CL e relativi z_c

Liv. di conf.	99.73%	99%	98%	95.45%	95%	90%	68.27%
z_c	3	2.58	2.33	2	1.96	1.645	1

Stima della media $\underline{x} \pm z_c\, \sigma/\sqrt{N}$

Somma/differenza (campioni indipendenti)

$S_1 - S_2 \pm z_c \sigma_{S1-S2} = S_1 - S_2 \pm z_c \sqrt{\sigma^2_{S1} + \sigma^2_{S2}}$ [diff/som: $- \leftrightarrow +$]

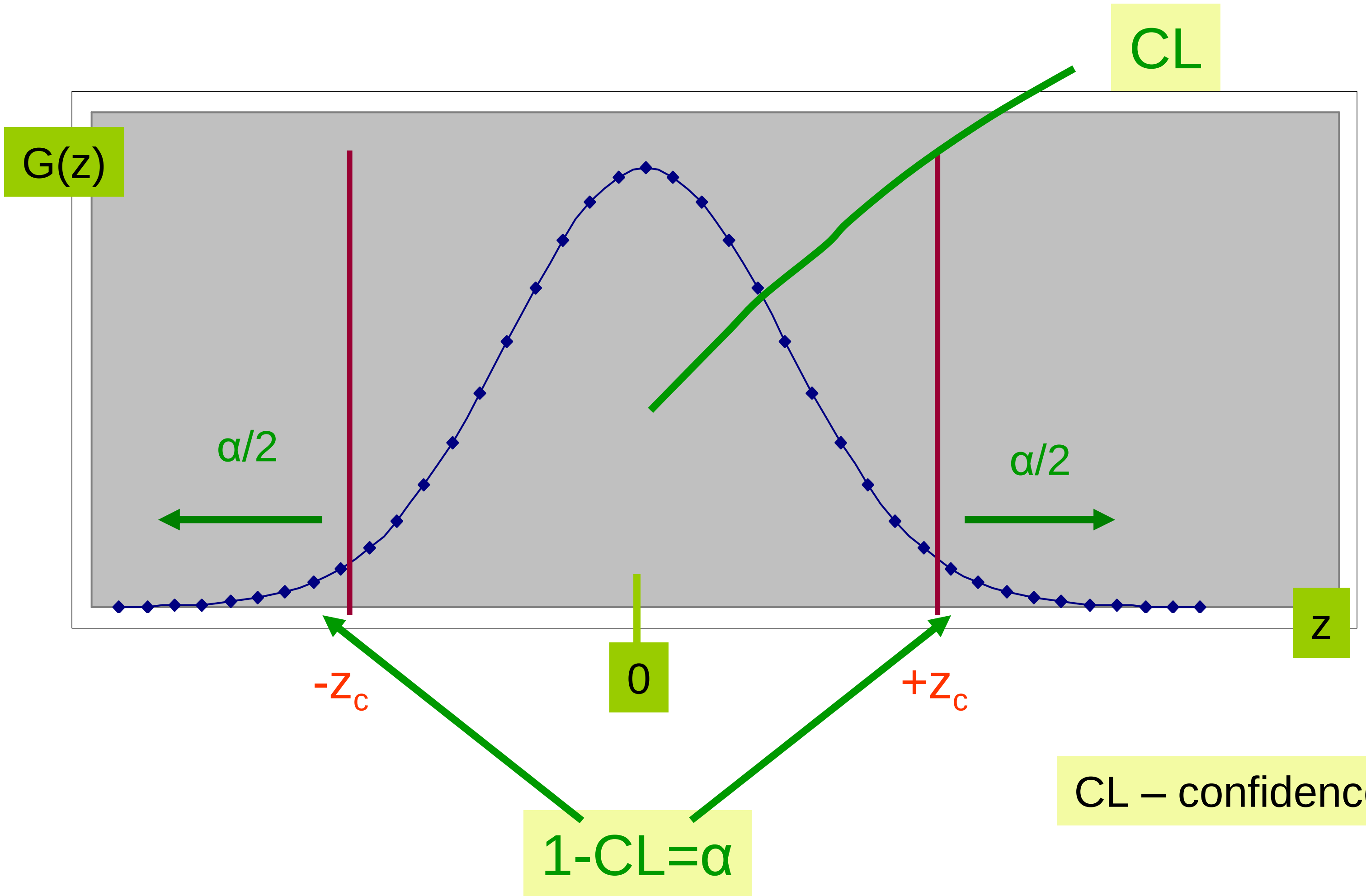
$\underline{x}_1 - \underline{x}_2 \pm z_c \sqrt{\sigma^2_1/N_1 + \sigma^2_2/N_2}$

sempre +

Intervallo di confidenza per lo sqm

$s \pm z_c \sigma_s = s \pm z_c \sigma/\sqrt{2N}$

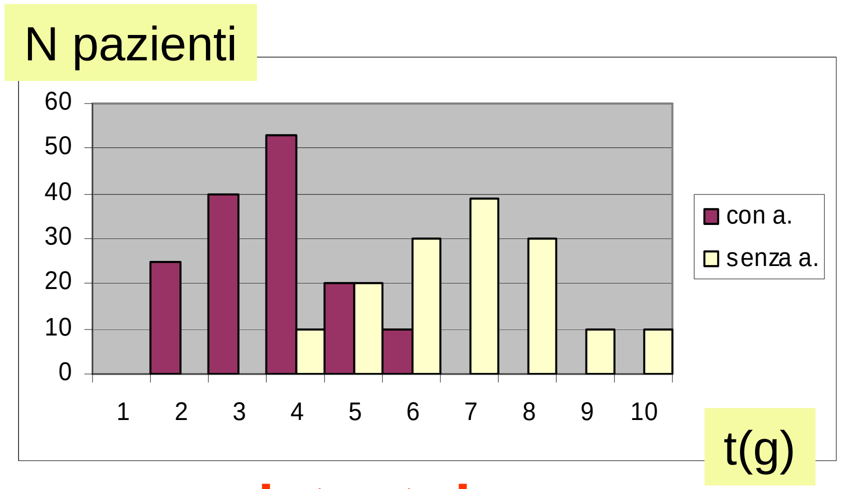
Livelli (aree) e intervalli di confidenza/2



CL – confidence level

Test statistici

- Cominciamo con un es. ~300 pazienti con tonsillite, studio dell'effetto di un farmaco (antibiotico) – randomizzazione: ~50% farmaco ~50% placebo – campioni grandi 150/150 (popolazione ancora più grande!)
- vista la grandezza dei campioni posso assumere distribuzioni normali (uso distrib. normali per fare i conti)
- in questo caso posso conoscere μ_j,σ_j delle gaussiane, cioè $\underline{t}_j,s_j$
- N pazienti guariti entro t giorni {con a. j=1; senza a. j=2}



Δt significativo? quanto?

Es. antibiotico, differenza delle medie

	1	2
tempo in g	**guarigioni con a.**	**guarigioni senza a.**
1	0	0
2	25	0
3	40	0
4	53	10
5	20	20
6	10	30
7	0	39
8	0	30
9	0	10
10	0	10
totale $\Sigma f_i = n$	148	149
$\underline{t} = \Sigma f_i t_i / \Sigma f_i =$	3.662	6.866
$s^2 = \Sigma f_i (t_i - \underline{t})^2 / (\Sigma f_i - 1) =$	1.246	2.414
$s_{\underline{t}}^2 = s^2/n =$	0.0084	0.0162

$\Delta t = \underline{t}_2 - \underline{t}_1 =$ 3.20 ± 0.16 **giorni**

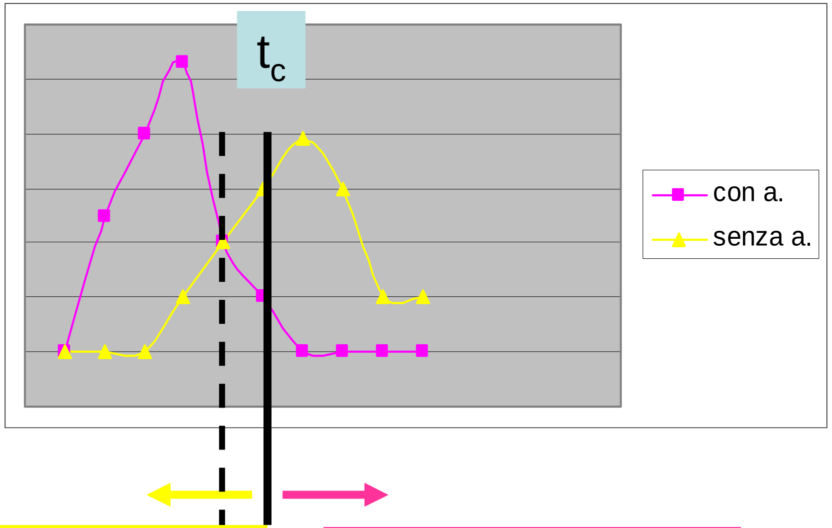
$\Delta t / \delta(\Delta t) = 20.4$ deviaz. standard!
→ probabilità trascurabile di trovare, in un successivo esperimento (***con 300 pazienti!***), $\Delta t = 0$: $\int^{\infty}_{20.4} G(x)dx$ molto piccolo (Excel dà p = 6 10^{-93}!)
→ Δt è significativamente ≠ 0
→ l'effetto dell'a. è significativo

... però non basta, domande lecite:
per il singolo paziente:

- $P_2(t<4.5) = \Phi_2(4.5) = \int_{-\infty}^{4.5} G_2(t)dt = 0.064$ = 6.4% (guarire **entro** 4.5 gg **senza** prendere farmaci)
- $P_1 = 1-\Phi_1(4.5) = 1- \int_{-\infty}^{4.5} G_1(t)dt = 0.226$ = 22.6% (**non** guarire entro 4.5 gg **pur** prendendo farmaci)

Es. antibiotico/3 (per calcolare le probabilità si usano le gaussiane corrispondenti, grandi campioni)

- intuitivamente, se l'a. /f. non facesse effetto mi aspetterei (a./f. non mirato) $\rightarrow$ $\Delta t \approx$ (zero±errore) giorni
- in realtà quello che conta per il singolo paziente è $P_2(t<t_c)$ – guarire senza – e $P_1(t>t_c)$ – non guarire con
- valore critico t_c per es. uguale a $\underline{t}_2 - z_c s_2$ (posso spostare il valore critico per fare la valutazione, il che equivale a cambiare z_c)



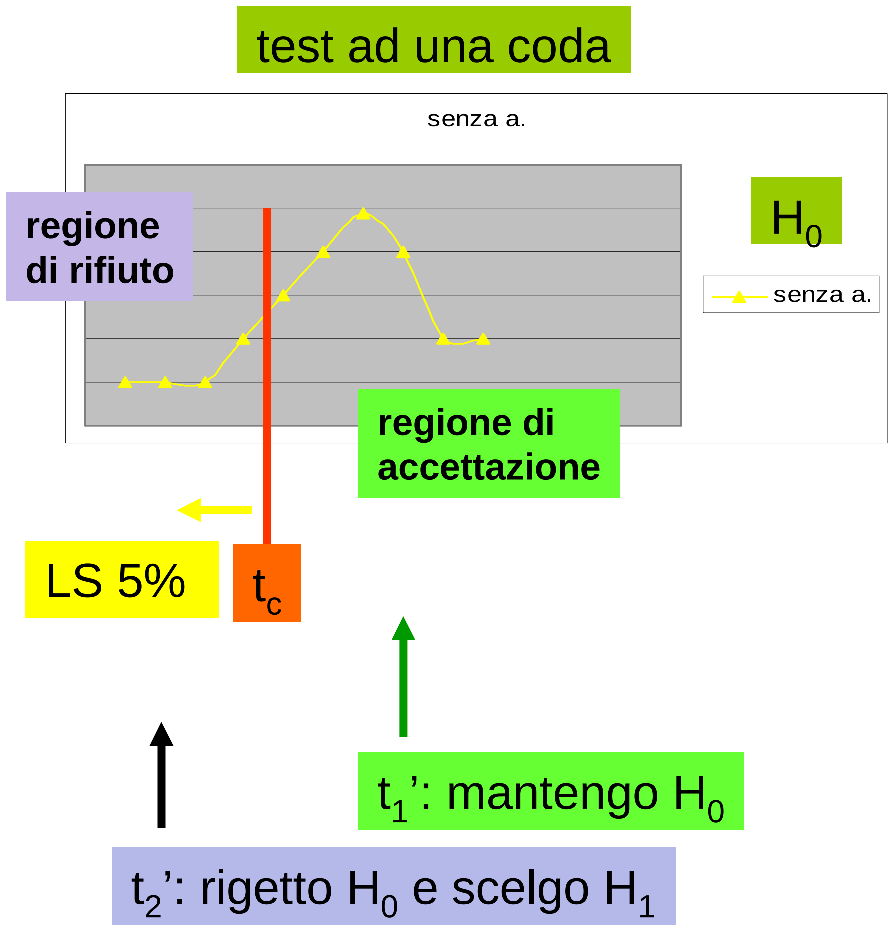
probabilità di guarire **senza** a. (comunque)

probabilità di non guarire **con** a. (comunque)

Es. antibiotico/4

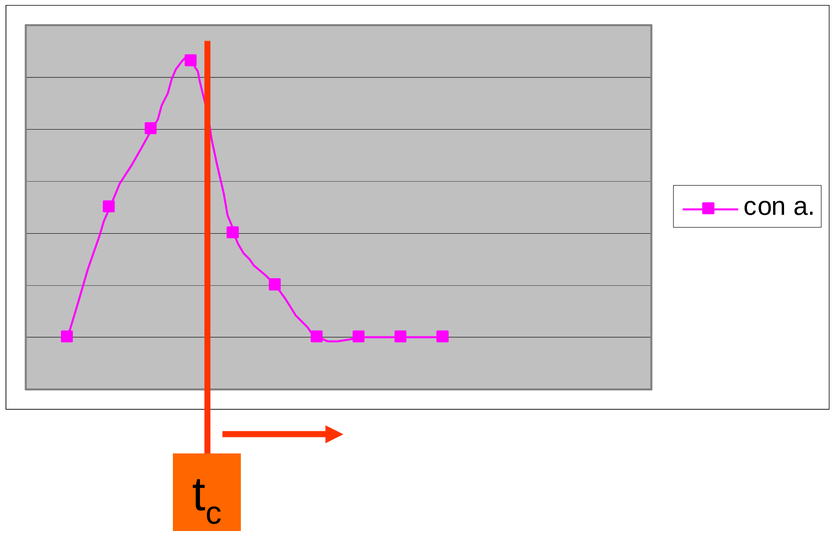
- ancora meglio, dal punto di vista del singolo paziente la domanda può essere: qual'è l'effetto del farmaco F, rispetto a non usarlo, H_0: F non fa effetto (ipotesi nulla)? –

  (**NB a scopo operativo una hp. statistica è sempre formulata in modo da poter essere rigettata**)
- H_1: F è efficace (ipotesi alternativa), $\Delta t \neq 0$
- scelgo un livello di significatività, per es. $\alpha = 0.05 = 5\%$ (probabilità massima di accettazione per l'errore di tipo I o α) $\rightarrow t_c$ (da $z_c = 1.645$)
- somministro F a 1 (o +) pazienti e misuro t' (o <u>t</u>')



Es. antibiotico/5

- $t_c = \underline{t}_2 - z_c s_2 = \underline{t}_2 - 1.645 s_2 = 6.87 - 1.645 \times 1.55 \sim 4.32$ g (1.645 dev.st. ↔ 5% LS ad una coda)
- se il paziente (la media dei p.) guarisce entro t_c rigetto H_0 (quindi accetto H_1): 5% è la probabilità che H_0 sia giusta – fluttuazione di tipo I (anche α)
- se non guarisce entro t_c accetto H_0 (quindi rigetto H_1) – errore diverso detto di tipo II (anche β) – probabilità che H_1 sia giusta, ma fluttuazione → rigetto (bisogna conoscere G_1)



$\int_{tc}^{\infty} G_1(t)dt = 27.8\%$
errore di tipo II o β

Hp. nulla e hp. alternativa

- conclusione: al 5% di LS rigetto H_0 (prendendo ad es. t per un paziente = media di 148 p. = 3.66 g < 4.32 g)
- potrei abbassare LS al 2% (o al 1%) – attenzione, di conseguenza cresce $\int_{tc}^{\infty} G1(t)dt$ l'errore di tipo II

  6.87-2.055x1.55 = 3.68 g

  6.87-2.325x1.55 = 3.27 g

  =► nel primo caso rigetto H_0, nel secondo no

  [NB se confrontassi media con media rigetterei sempre H_0]
- nei casi in cui rigetto H_0, ci sono 5(2) possibilità su 100 di rifiutare H_0 quando invece dovrebbe essere accettata =► cioè siamo fiduciosi al 95%(98%) di livello di confidenza (CL) di aver preso la decisione giusta
- LS α determina il valore dell'errore di tipo I

  P(rigettare $H_0|H_0$ vera)
- LS β determina il valore dell'errore di tipo II

  P(accettare $H_0|H_0$ falsa)

Statistica non parametrica – test del χ^2 – preliminari

- supponiamo di avere solo una predizione "teorica" tabulata T_i (questo va bene anche se dal campione non posso estrarre μ,σ: ad es. il colore degli occhi di chi ha capelli scuri/chiari &tc.) – nell' esempio dell'antibiotico, se l'antib. non facesse effetto mi aspetterei la stessa distrib. di tempi di guarigione per pazienti trattati con a. e non (H_0)
- posso confrontare la distrib. "osservata" O_i con quella teorica intervallo per intervallo (giorno per giorno)
- se è vera H_0: sarà per tutti gli i, $O_i \sim T_i$

χ^2

- valutazione della distanza globale fra i risultati sperimentali e le previsioni teoriche (ipotesi H_0)

  $\chi^2 = \Sigma^n_{i=1} (O_i - T_i)^2 / T_i$

  O_i, T_i ≡ frequenza osservata, aspettata per l'intervallo i-esimo
- se χ^2 è grande (rispetto a ~n, in effetti a n_D, gradi di libertà) l'osservazione non è compatibile con H_0
- χ^2 è una variabile aleatoria con una distribuzione

  $f(z,n_D) = f_0(n_D)\ z^{½(nD-3)}\ e^{-z/2}$

  con f_0 costante che dipende da n_D in modo da normalizzare ad 1 l'integrale di $f(z,n_D)$
- si usa $P(\chi^2) = \int_{\chi 2oss}^{\infty} f(z,n_D)dz$ che dà la prob. di osservare un valore di χ^2 > di quello osservato in un successivo esperimento (in un gran numero di esperimenti)

χ^2

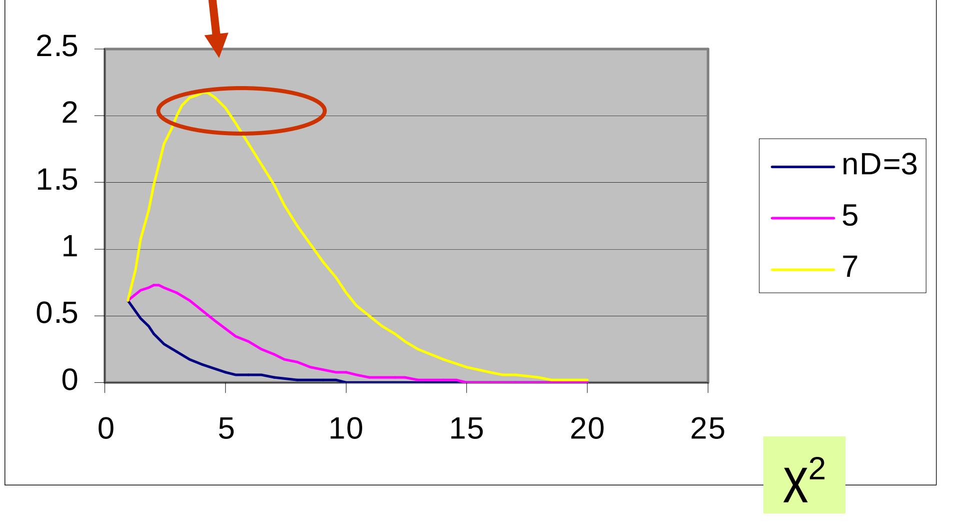
n_D – gradi di libertà

normalizzazione

$f(z,n_D) = f_0(n_D)\ z\hat{}[0.5(n_D-3)]\ \exp(-z/2)$

$f(z,n_D)/f_0(n_D)$

χ2	3	5	7	nD
1	0.606531	0.606531	0.606531	
2	0.367879	0.735759	1.471518	
3	0.22313	0.66939	2.008171	
4	0.135335	0.541341	2.165365	
5	0.082085	0.410425	2.052125	
6	0.049787	0.298722	1.792334	
7	0.030197	0.211382	1.479672	
8	0.018316	0.146525	1.172201	
9	0.011109	0.099981	0.899829	
10	0.006738	0.067379	0.673795	
11	0.004087	0.044954	0.494499	
12	0.002479	0.029745	0.35694	
13	0.001503	0.019545	0.254081	
14	0.000912	0.012766	0.178729	
15	0.000553	0.008296	0.124444	
16	0.000335	0.005367	0.085878	
17	0.000203	0.003459	0.058802	
18	0.000123	0.002221	0.039985	
19	7.49E-05	0.001422	0.027022	
20	4.54E-05	0.000908	0.01816	



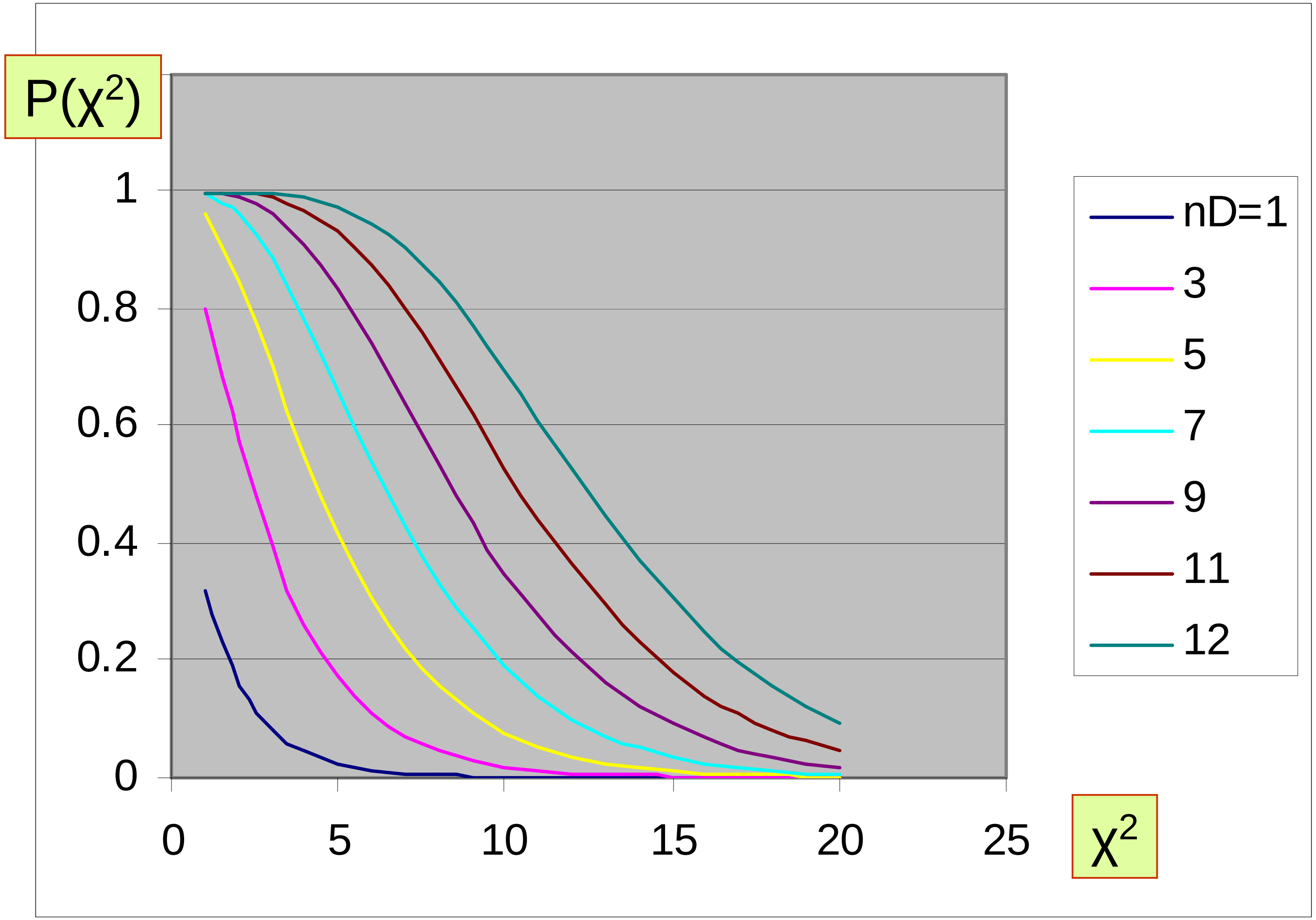
$P(X^2)$ vs n_D

$P(\chi^2)$	1	3	5	7	9	11	13	n_D
1	0.317311	0.801252	0.962566	0.994829	0.999438	0.99995	0.999996	
2	0.157299	0.572407	0.849145	0.95984	0.991468	0.998496	0.999774	
3	0.083265	0.391625	0.699986	0.885002	0.964295	0.990726	0.997934	
4	0.0455	0.261464	0.549416	0.779777	0.911413	0.969917	0.991191	
5	0.025347	0.171797	0.41588	0.659963	0.834308	0.931167	0.975193	
6	0.014306	0.11161	0.306219	0.539749	0.739918	0.873364	0.946153	
7	0.008151	0.071898	0.22064	0.42888	0.637119	0.799084	0.902152	
8	0.004678	0.046012	0.156236	0.332594	0.534146	0.713304	0.8436	
9	0.0027	0.029291	0.109064	0.252656	0.437274	0.621892	0.772944	
10	0.001565	0.018566	0.075235	0.188573	0.350485	0.530387	0.693934	
11	0.000911	0.011726	0.05138	0.138619	0.275709	0.443263	0.610818	
12	0.000532	0.007383	0.034788	0.100559	0.213309	0.363643	0.527644	
13	0.000311	0.004637	0.023379	0.072108	0.162606	0.293325	0.447812	
14	0.000183	0.002905	0.015609	0.051181	0.122325	0.232993	0.373844	
15	0.000108	0.001817	0.010362	0.035999	0.090936	0.182497	0.307353	
16	6.33E-05	0.001134	0.006844	0.025116	0.066882	0.141131	0.24913	
17	3.74E-05	0.000707	0.0045	0.017396	0.048716	0.107876	0.199304	
18	2.21E-05	0.00044	0.002946	0.01197	0.035174	0.081581	0.157519	
19	1.31E-05	0.000273	0.001922	0.008187	0.025193	0.061094	0.123104	
20	7.74E-06	0.00017	0.00125	0.00557	0.017912	0.045341	0.09521	
χ^2								

es. con 7 g.d.l.
$P(\chi^2>7)=0.4288$

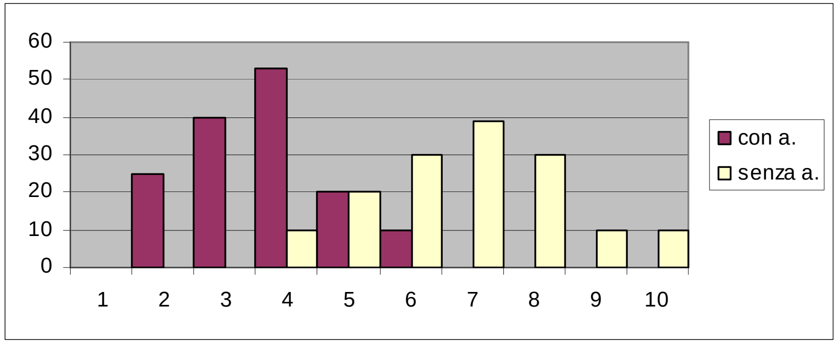
$P(\chi^2) =$
$= \int_{\chi^2}^{\infty} f(z,n_D)\,dz$

$P(X^2)$ vs n_D



Test del χ^2

t(g)	guarigioni con antibiotico	guarigioni senza antibiotico	nessun effetto	nessun effetto	Δ con	Δ senza	χ2 con	χ2 senza
1	0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	25	0	12.5	12.5	12.5	-12.5	12.6	12.5
3	40	0	19.9	20.1	20.1	-20.1	20.2	20.1
4	53	10	31.4	31.6	21.6	-21.6	14.9	14.8
5	20	20	19.9	20.1	0.1	-0.1	0.0	0.0
6	10	30	19.9	20.1	-9.9	9.9	4.9	4.9
7	0	39	19.4	19.6	-19.4	19.4	19.4	19.3
8	0	30	14.9	15.1	-14.9	14.9	14.9	14.8
9	0	10	5.0	5.0	-5.0	5.0	5.0	4.9
10	0	10	5.0	5.0	-5.0	5.0	5.0	4.9
Σ	148	149	148.0	149.0	0.0	0.0	97.0	96.3
								193.3
							P(χ2)	2.32 E-30



$n_D = 9+9-1 = 17$

$P(\chi^2) << 1‰ \rightarrow$ l'hp H_0è rigettata a CL = $1-P(\chi^2) >> 99.9\%$

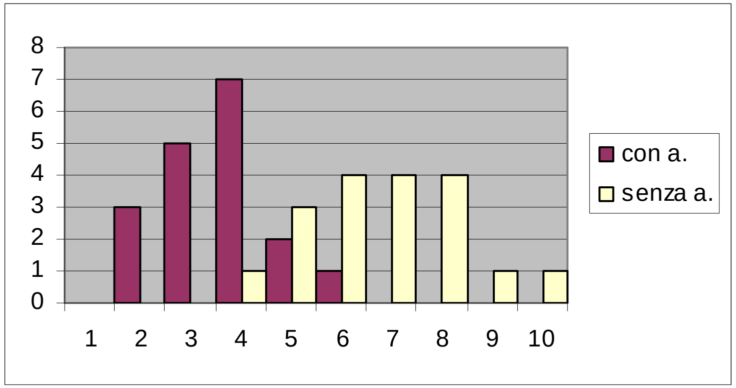
nota

- L’es. del confronto delle due distribuzioni con l’hp che provengano da una stessa popolazione è servito ad introdurre il test del $\chi 2$. Se si guardano le prob., non sembra il test più sensibile che si possa fare. Il test sulla differenza delle medie sembra più sensibile (a rigore si riferisce alla prob. di un ulteriore esperimento con 150+150 pazienti).
- In ogni caso, per costruzione, nella zona dove le due distribuzioni si intersecano, i contributi al χ^2 sono quasi nulli – non si tiene conto quindi del fatto che per una distribuzione si tratta della coda decrescente e per l’altra di quella crescente.

Test del χ^2 - statistica ridotta

t(g)	guarigioni con antibiotico	guarigioni senza antibiotico	nessun effetto	nessun effetto	Δ con	Δ senza	χ2 con	χ2 senza
1	0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	3	0	1.5	1.5	1.5	-1.5	1.5	1.5
3	5	0	2.5	2.5	2.5	-2.5	2.5	2.5
4	7	1	4.0	4.0	3.0	-3.0	2.3	2.3
5	2	3	2.5	2.5	-0.5	0.5	0.1	0.1
6	1	4	2.5	2.5	-1.5	1.5	0.9	0.9
7	0	4	2.0	2.0	-2.0	2.0	2.0	2.0
8	0	4	2.0	2.0	-2.0	2.0	2.0	2.0
9	0	1	0.5	0.5	-0.5	0.5	0.5	0.5
10	0	1	0.5	0.5	-0.5	0.5	0.5	0.5
Σ	18	18	18.0	18.0	0.0	0.0	12.3	12.3
								24.5
							P(χ2)	0.221

Riduciamo la statistica



$n_D = 9+9-1 = 17$

$P(\chi^2) = 22\% \rightarrow$ l'hp H_0 è rigettata
con $CL = 1-P(\chi^2) = 78\%$
in effetti la statistica è troppo bassa per usare un test del χ2 (<5 per intervallo)

nota

- Se si ripete adesso il calcolo della differenza delle medie fra le due distribuzioni con statistica ridotta si ottengono ancora 7.1 dev. st. ed una $p = 7\ 10^{-13}$ che, in un successivo esperimento con 18+18 pazienti, la differenza possa risultare ≤ 0. La statistica è stata ridotta per un fattore $18/150 = 0.12$; le forme delle distribuzioni e quindi le loro dev. st. sono le stesse di prima $\rightarrow$ n.o di dev. st. della differenza aspettate $\sim 20.4\ \sqrt{0.12} = 7.1$

Il test t di Student

- supponiamo ora di avere un campione molto ridotto di pazienti (di ampiezza << 30, non posso usare distr. norm.) da cui estraggo $\underline{t}$ e s: come posso stabilire se il risultato è compatibile con una hp. μ?
- si usa il parametro campionario t di Student

  $t = (\underline{x}-\mu)/[s/\sqrt{(n-1)}]$

  dove $\underline{x}$ indica ora la media campionaria in generale (per non confondersi con t!) e s la dev. stand. campionaria, mentre $\sigma = s\cdot \cdot\sqrt{n}/\sqrt{(n-1)}$ è la stima della dev. stand. della popolazione (ignota)
- t è una variabile aleatoria la cui distribuzione è nota → può essere integrata per trovare le probabilità (i CL)

  $f(t,n_D) = f_0\,(n_D)/[1+t^2/n_D]^{(nD+1)/2}$

  dove f_0 è una costante dipendente da n_D per normalizzare ad 1 l'integrale di $f(t,n_D)$
- la distribuzione di t è più piatta di una gaussiana e diventa indistinguibile da una g. per ampiezze grandi

Il test t di Student/2

- accade più spesso di dover confrontare fra loro due risultati $\underline{x}_1$. $\underline{x}_2$ tratti da piccoli campioni n_1, n_2 (<<30) con dev. stand. s_1, s_2 (come nel ns. es. dell'a.)
- in questo caso

$$t = (\underline{x}_1 - \underline{x}_2) / \sqrt{[(s_1^2 + s_2^2)/(n_1+n_2-2)]}$$

test t a due code

probabiltà

nD\P	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0005
1	1.376382	2.414214	6.313752	12.7062	25.4517	63.65674	127.3213	1273.239
2	1.06066	1.603567	2.919986	4.302653	6.205347	9.924843	14.08905	44.70459
3	0.978472	1.422625	2.353363	3.182446	4.176535	5.840909	7.453319	16.32633
4	0.940965	1.344398	2.131847	2.776445	3.495406	4.604095	5.597568	10.30625
5	0.919544	1.300949	2.015048	2.570582	3.163381	4.032143	4.773341	7.975653
6	0.905703	1.273349	1.94318	2.446912	2.968687	3.707428	4.316827	6.78834
7	0.89603	1.254279	1.894579	2.364624	2.841244	3.499483	4.029337	6.081756
8	0.88889	1.240318	1.859548	2.306004	2.751524	3.355387	3.832519	5.617411
9	0.883404	1.229659	1.833113	2.262157	2.685011	3.249836	3.689662	5.290654
10	0.879058	1.221255	1.812461	2.228139	2.633767	3.169273	3.581406	5.048973
11	0.87553	1.21446	1.795885	2.200985	2.593093	3.105807	3.496614	4.863333
12	0.872609	1.208853	1.782288	2.178813	2.560033	3.05454	3.428444	4.716459
13	0.870152	1.204146	1.770933	2.160369	2.532638	3.012276	3.372468	4.597461
14	0.868055	1.20014	1.76131	2.144787	2.509569	2.976843	3.325696	4.499155
15	0.866245	1.196689	1.75305	2.13145	2.48988	2.946713	3.286039	4.416613

gradi di libertà

t

Il test t di Student/3

Il numero di gradi di libertà è
$n_D = n_1+n_2-2$

Supponendo di osservare un certo valore di t vado a cercare la probabilità, ad es. interpolando nelle tabelle –
1) medie diverse fra loro: test a due code
2) media1 < media2: test ad una coda

test t a una coda

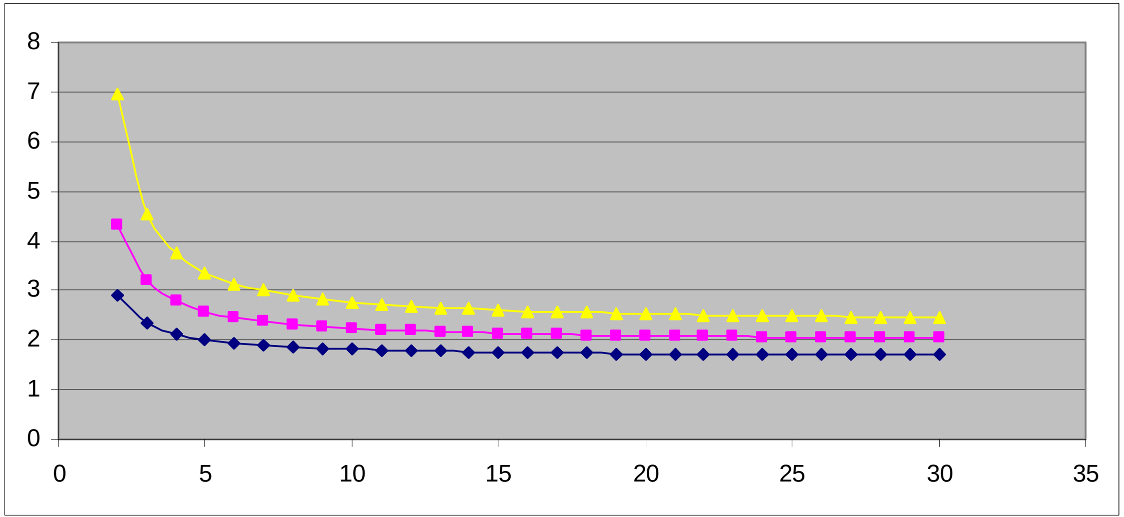
probabiltà

n_D\P	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0005
1	0.32492	1.00000	3.07768	6.31375	12.70620	31.82052	63.65674	636.61925
2	0.28868	0.81650	1.88562	2.91999	4.30265	6.96456	9.92484	31.59905
3	0.27667	0.76489	1.63774	2.35336	3.18245	4.54070	5.84091	12.92398
4	0.27072	0.74070	1.53321	2.13185	2.77645	3.74695	4.60409	8.61030
5	0.26718	0.72669	1.47588	2.01505	2.57058	3.36493	4.03214	6.86883
6	0.26483	0.71756	1.43976	1.94318	2.44691	3.14267	3.70743	5.95882
7	0.26317	0.71114	1.41492	1.89458	2.36462	2.99795	3.49948	5.40788
8	0.26192	0.70639	1.39682	1.85955	2.30600	2.89646	3.35539	5.04131
9	0.26096	0.70272	1.38303	1.83311	2.26216	2.82144	3.24984	4.78091
10	0.26018	0.69981	1.37218	1.81246	2.22814	2.76377	3.16927	4.58689
11	0.25956	0.69745	1.36343	1.79588	2.20099	2.71808	3.10581	4.43698
12	0.25903	0.69548	1.35622	1.78229	2.17881	2.68100	3.05454	4.31779
13	0.25859	0.69383	1.35017	1.77093	2.16037	2.65031	3.01228	4.22083
14	0.25821	0.69242	1.34503	1.76131	2.14479	2.62449	2.97684	4.14045
15	0.25789	0.69120	1.34061	1.75305	2.13145	2.60248	2.94671	4.07277

gradi di libertà

t

Il t test di Student/4



n_D

giallo CL=0.99
rosa CL=0.975
blu CL=0.95

test t a una coda

t in g	G con a	G senza a
1	0	0
2	3	0
3	4	0
4	5	1
5	2	2
6	1	3
7	0	4
8	0	3
9	0	1
10	0	1
	15	15

es con un campione di ampiezza 15
$\underline{x}_1 = 3.60$; $s_1 = 1.14$; $\underline{x}_2 = 6.87$; $s_2 = 1.55$
$t = |3.60-6.87|/\sqrt{[(1.14^2+1.55^2)/(15+15-2)]} = 9.0$
$\Rightarrow$ con 28 gradi di libertà l'hp nulla ha una probabilità << 0.5‰ (vedi figura del test a una coda) ed è scartata al > 99.95% di CL, ossia ritengo l'hp alternativa, che l'a. è efficace

test t – altri esempi, piccoli campioni

- **es. 1**

t(g)	G con a	G senza a
1	-	-
2	2	-
3	2	1
4	-	1

$\underline{x_1} = 2.5$ $s_1 = 0.5$ $\underline{x_2} = 3.5$ $s_2 = 0.5$

$t = 2.83$ $n_D = 4+2-2 = 4$ $P(t) = 0.024$ rigetto H_0 al 97.5% di CL

- **es. 2**

t(g)	G con a	G senza a
1	-	-
2	2	1
3	2	-
4	-	-
5	-	1

tutto uguale a parte $s_2 = 1.5$

$t = 1.26$ $n_D = 4+2-2 = 4$ $P(t) = 0.137$ rigetto H_0 al 86% di CL

Esercizio1: test sulla media di popolazioni assunte gaussiane

- Si raccolgono 2 campioni di foglie da 2 querce con i segg. risultati (tabella, dove sono riportati i numeri medi di galle per foglia nei 2 camp. e le dev.stand.)
- assumendo distrib. normali, i dati mostrano evidenza per differenti medie delle popolaz. al 5% di livello di significatività oppure no?

H_0: μA non differente da μB

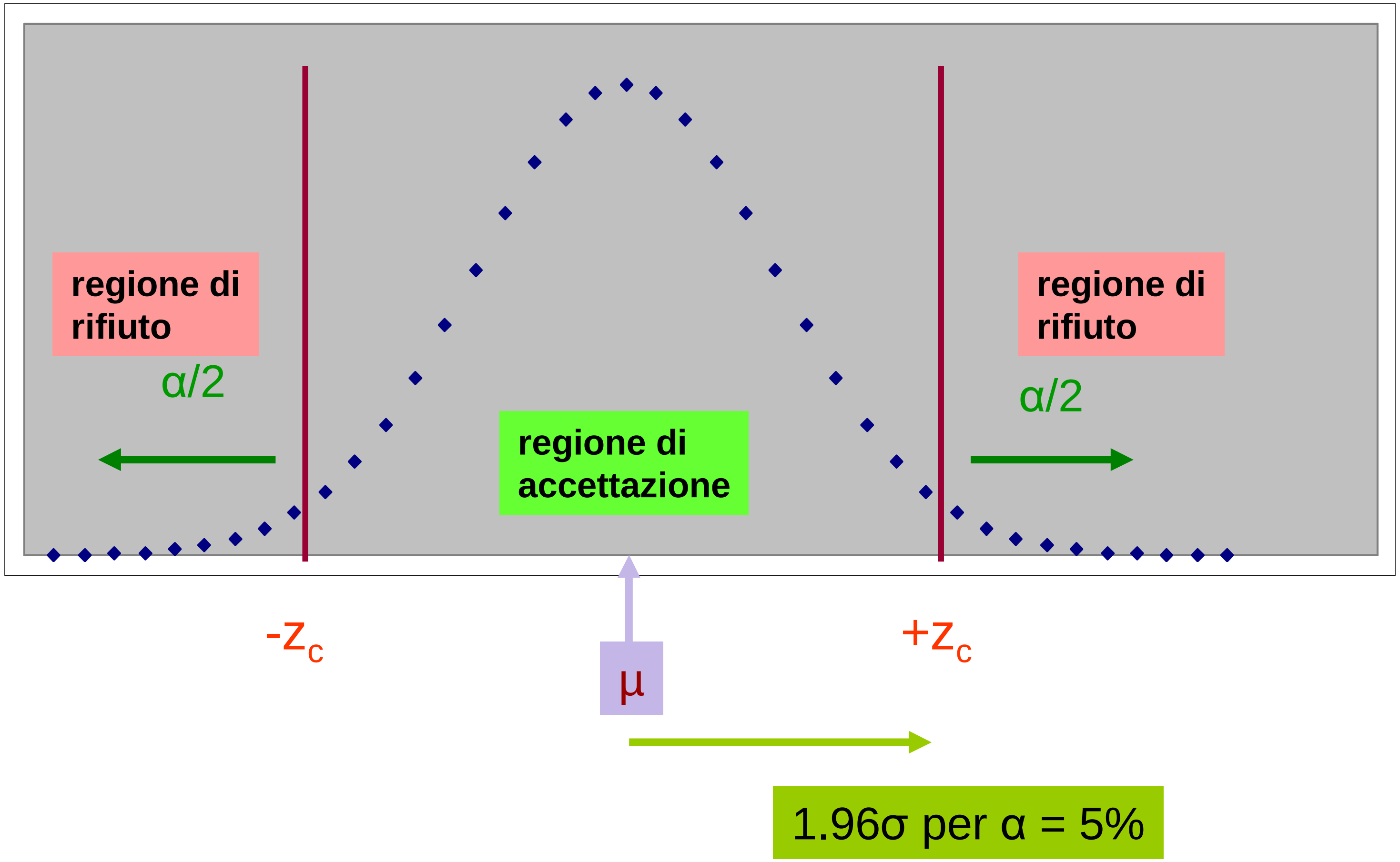
H_1: μA differente da μB

Albero	A	B
n – elem. nel camp.	60	80
media	11.4	10.7
dev.std.	2.6	3.1

risposta:

NO

Esercizio 1 – regioni di accettazione e di rifiuto



Soluzione dell'esercizio1

Calcolo le dev.std. delle medie $\sigma_{\mu A}=\sigma_A/\sqrt{n_A}=0.336$ (galle) e $\sigma_{\mu B}=\sigma_B\sqrt{n_B}=0.347$ (galle);
se vale H_0 μA non è differente da μB al 5%; ora al 5% di Livello di Significatività [95% di Livello di Confidenza, CL] ho z_c = 1.96 per un test a due code; confrontiamo per es. μB=10.7 con μA-1.96*σμA=11.4-0.66=10.74 che risulta appena maggiore di μB; se invece confrontiamo μA=11.4 con μB+1.96*σμB=10.7+0.68=11.38 esso risulta leggeremente inferiore a μA – se però faccio i confronti coerentemente con lo stesso numero di cifre significative (3), i due numeri sono uguali in entrambi i casi e posso accettare H_0 al 5% – ripetendo l'esercizio all'1% di LS [z_c=2.58] posso di nuovo a maggiore ragione accettare H_0, cioè rigettare H_1

Esercizio2: test sulla media di popolazioni assunte gaussiane

- Si misurano le altezze (in m) di due popolazioni indipendenti, studenti maschi e femmine ottenendo la tabella

	M	F
n	120	160
$\Sigma h(m)$	198	248
$\Sigma h^2(m^2)$	327	385

a) trovare $\mu M, \mu F, \sigma^2 M, \sigma^2 F$

b) trovare la P che una F a caso sia più alta di un M a caso (assumere distr. norm. con μ, σ trovati sopra)

c) assum. solo distr. norm., verificare la H_0 μM eccede μF di meno di 0.08 m

H_0: $\mu M - \mu F \leq 0.08$ m

H_1: $\mu M - \mu F > 0.08$ m

risposte:

a) $\mu M = 1.65$m; $\mu F = 1.55$m; $\sigma^2 M = 0.0025$m^2; $\sigma^2 F = 0.00375$m^2
b) P=0.103
c) si può rigettare H_0 al 5% e all'1% di livello di significatività

Soluzioni di alcune parti dell'esercizio2

- a) media popolaz. $\mu_i=\Sigma h_i/n_i$; varianza popolaz. = $\sigma^2_i=(\Sigma h^2_i-n_i\mu_i^2)/n_i$
- b) faccio la differenza fra le due variabili aleatorie normali F e M ed ottengo un'altra var. aleat. norm. F-M (la varianza della differenza è la somma della varianze)

$\mu(F\text{-}M) = \mu_F - \mu_M = 1.55-1.65 = -0.10$ m

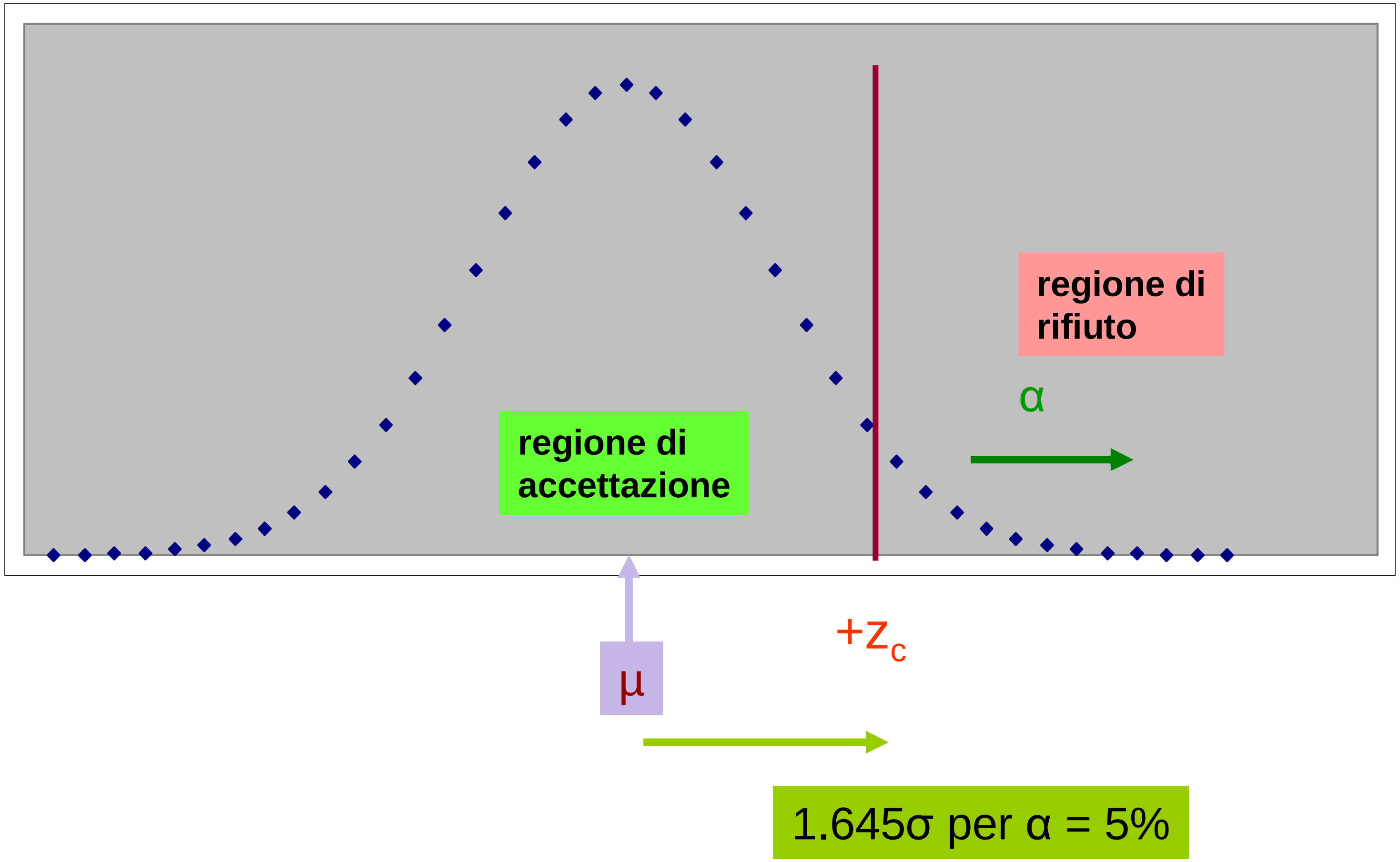
$\sigma^2(F\text{-}M) = \sigma^2_F + \sigma^2_M = 0.00625 = (0.079 \text{ m})^2$

l'area della distribuzione di F-M per F-M>0 è la prob. cercata P(F-M > 0) = $\int_0^\infty G'(x)dx = 0.103$

dove G'(x) ha media -0.10 m e dev.st. 0.079 m [oppure $\int_{1.265}^\infty G(z)dz$ con G(z) gaussiana standardizzata, $\mu=0$ e $\sigma=1$, $z=(x+0.10)/0.079$]

- c) calcolo le dev.std. delle medie $\sigma_{\mu M}=\sigma_M/\sqrt{n_M}=0.00456$ m e $\sigma_{\mu F}=\sigma_F\sqrt{n_F}=0.00484$ m; se vale H_0 $\mu_M-\mu_F=0.08$ m al massimo, quindi $\mu_M-0.08=1.57$ m che risulta > di $\mu_F+0.00796=1.558$ m [$z_c=1.645$ per il 5% di LS ad una coda] e di $\mu_F+0.01128=1.561$ m [$z_c=2.33$ per l'1%]; quindi H_0 può essere rigettata in entrambi i casi

Esercizio 2 – regioni di accettazione e di rifiuto



Nota – tabelle di contingenza

- tabelle di contingenza a due vie: in generale $n_1 \cdot n_2$ celle dove $n_{1(2)}$ sono i possibili valori della variabile $V_{1(2)}$, ad es. V_1 = M,F sesso; V_2 = insuff, suff, buono, ottimo risultato di una prova

	i	s	b	o	tot
M	**31**	**43**	**11**	**7**	92
F	**22**	**56**	**18**	**5**	101
tot	53	99	29	12	193

ampiezza del campione

- le celle centrali danno la frequenza delle due V (divise per le frequenze marginali danno le prob. condizionate, ad es. P(b|F) = 18/101 = 17.8%) – l'ultima riga (colonna) contiene i totali per riga (colonna) o frequenze marginali (divise per l'ampiezza del campione danno le prob. marginali o semplici, ad es. P(o) = 12/193 = 6.2%):

Tabelle di contingenza – test del χ^2

- **Tabelle di contingenza a due vie** – considero un altro es.: 50 malati, stessa patologia, divisi a caso in 2 gruppi di 25
- gruppo V trattato con farmaco vecchio
- gruppo N trattato con farmaco nuovo
- si registrano i G(uariti), n(on)G dopo un certo periodo di tempo
- si ottengono i risultati in tabella in alto
- si valuti con un **test del χ^2** al 95% di CL la hp che il farmaco nuovo sia più efficiente del vecchio
- si aspetta (H_0, hp nulla) che non vi sia differenza, tabella in basso (distribuisco i G, nG in modo uniforme fra V e N, visto che tot(V) e tot(N) sono uguali)

	G	nG	tot
V	11	14	25
N	19	6	25
tot	30	20	50

	G	nG	tot
V	15	10	25
N	15	10	25
tot	30	20	50

Tabelle di contingenza – test del $\chi^2/2$

- $\chi^2 = (11\text{-}15)^2/15 + (14\text{-}10)^2/10 + (19\text{-}15)^2/15 + (6\text{-}10)^2/10 = 5.33$
- quanti sono i gradi di libertà (n_D)?
- il n. di pazienti nei due gruppi è fisso (25) → se chiamo **a** il n. di G nel gruppo V avrò la tabella (è fissato anche il n. di pazienti in tutta la sperimentazione) =► posso scegliere **a** e tutto il resto segue, **1 grado di libertà**
- con un CL del 95% si aspetta al massimo 3.84 per H_0 =► il nuovo farmaco è più efficace del vecchio, ho scelto H_1

	G	nG	tot
V	**a**	**25-a**	**25**
N	**30-a**	**a-5**	**25**
tot	**30**	**20**	**50**

esercizio 3: test di criteri col χ^2

Colore degli occhi (criterio 1) vs colore dei capelli (criterio 2)

L'ipotesi da verificare è che i due criteri di classificazione siano indipendenti - ossia che il colore degli occhi non sia legato al colore dei capelli e viceversa. L'ipotesi alternativa è che i due criteri *non* siano indipendenti.

	Biondo	Castano	Nero	Rosso	*Totali*
Blu	60	40	60	40	200
Grigio	20	50	20	10	100
Nocciola	10	50	10	30	100
Castano	10	160	10	20	200
Totali	100	300	100	100	**600**

O_{ij} dati sperimentali

	Biondo	Castano	Nero	Rosso	
Blu	33.33	100.00	33.33	33.33	200
Grigio	16.67	50.00	16.67	16.67	100
Nocciola	16.67	50.00	16.67	16.67	100
Castano	33.33	100.00	33.33	33.33	200
	100	300	100	100	**600**

T_{ij} ipotesi nulla H_0

Oij - osservati
Tij - aspettati = Si*Sj/SS
i - riga, j - colonna
Si - somma riga, Sj - somma colonna

l'hp nulla si costruisce sommando su colonne e righe, ossia ignorando i criteri 1 e 2 rispettivamente

esercizio 3 - soluzione

chi-square

Biondo	Castano	Nero	Rosso
21.33	36.00	21.33	1.33
0.67	0.00	0.67	2.67
2.67	0.00	2.67	10.67
16.33	36.00	16.33	5.33
41	72	41	20

174

calcolo del χ^2 e di n_D

$n_D = (nr-1)x(nc-1) = (4-1)x(4-1) = 9$

ci sono 4x4=16 contributi al χ^2, ma solo 9 indipendenti, perchè i totali (-1) sono fissi

fissiamo il livello $\alpha = 0.05$ (0.005)

con $n_D = 9$ si ha una probabilità del 5% (5‰) che chi2 ecceda 16.92 (23.59)

il valore osservato eccede ambedue i valori → H_0 è rigettata al >99.5% di CL

P(chi2(n,chi2oss)) =

9.05051E-33	174
0.005000641	23.589
0.049999641	16.919

o, in altri termini, 174 >> $chi2_{0.05}(9) = 16.92$ ($chi2_{0.005}(9) = 23.59$) => rigetto H_0, accetto H_1

esercizio 3' – statistica ridotta

Colore degli occhi (criterio 1) vs colore dei capelli (criterio 2)

L'hp da verificare è sempre che i due criteri di classificazione siano indipendenti - ossia che il colore degli occhi non sia legato al colore dei capelli e viceversa.
L'ipotesi alternativa è che i due criteri *non* siano indipendenti.
La statistica è ridotta di un fattore 10 rispetto all'es. precedente.

Oij	**Biondo**	**Castano**	**Nero**	**Rosso**	***Totali***
Blu	6	4	6	4	20
Grigio	2	5	2	1	10
Nocciola	1	5	1	3	10
Castano	1	16	1	2	20
Totali	10	30	10	10	**60**

Tij	**Biondo**	**Castano**	**Nero**	**Rosso**	
Blu	3.33	10.00	3.33	3.33	20
Grigio	1.67	5.00	1.67	1.67	10
Nocciola	1.67	5.00	1.67	1.67	10
Castano	3.33	10.00	3.33	3.33	20
	10	30	10	10	**60**

esercizio 3' – statistica ridotta - soluzione

chi-square

Biondo	Castano	Nero	Rosso	
2.13	3.60	2.13	0.13	
0.07	0.00	0.07	0.27	
0.27	0.00	0.27	1.07	
1.63	3.60	1.63	0.53	
4.1	7.2	4.1	2	**17.4**

N.B. A stretto rigore non si può usare il chi2 se Ncella<5

n_D = (nr-1)x(nc-1) = (4-1)x(4-1) = 9

fissiamo il livello α = 0.05 (0.005)

con n_D = 9 si ha una probabilità del 5% (5‰) che chi2 ecceda 16.92 (23.59)

il valore osservato eccede il primo dei valori, per cui si può dire che H_0 è rigettata al 95% di CL

P(chi2(n,chi2oss)) =	0.042808	17.4
	0.005001	23.589
	0.05	16.919

o, in altri termini, 17.4 > $chi2_{0.05}(9)$=16.92 (<$chi2_{0.005}(9)$=23.59) => nel I caso accetto H_1, nel II rigetto H_1