Misure e errori di misura (incertezze)

Ogni volta che facciamo una **misura** cerchiamo di stimare il **valore vero** di una **grandezza**. C'è un limite alla precisione con la quale facciamo questa stima:

- **Sensibilità dello strumento di misura**;
- **Fluttuazioni del valore misurato**;
- (**Possibilità di errori** nella procedura e/o nello strumento).

$$X_{mis} = X_{vero} + \varepsilon$$

L’incertezza sul risultato della misura (o **errore sulla misura**) può essere espresso come:

• **errore assoluto**, cioè indicato con le stesse unità di misura del valore misurato;
• **errore relativo**, cioè indicato come frazione del valore misurato.
L’errore relativo viene spesso espresso in percentuale (%) del valore misurato: la percentuale non è altro che un’altra maniera di indicare una frazione.

Esempio:

$X = (27.5 \pm 0.1)$ cm

Errore assoluto $\rightarrow$ 0.1 cm

Errore relativo $\rightarrow$ $0.1 / 27.5 = 1/275$

$\sim 0.0036 = 0.36\ \%$

Se le fluttuazioni sono più grandi della sensibilità dello strumento, misure ripetute daranno tipicamente risultati diversi. Se le fluttuazioni sono **casuali**, i vari valori di $\mathbf{X}_{\mathbf{mis}}$ si distribuiranno **casualmente** (cioè a volte prima e a volte dopo) attorno a $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$.

$$X^{i}_{mis} = X_{vero} + \varepsilon^{i}$$

In media (cioè nel limite di infinite misure) le fluttuazioni si annulleranno e il valor medio delle misure tenderà al valore vero:

$$\langle \varepsilon^{i} \rangle \rightarrow 0$$

$$\langle X^{i}_{mis} \rangle \rightarrow X_{vero}$$

Non possiamo fare infinite misure: dobbiamo stimare $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ e la precisione con cui lo conosciamo da un numero finito di misure. La stima migliore di $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ è la **media su N misure**:

$$X_{mis} = 1/N \cdot \sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis})$$

$$X_{vero} = X_{mis} \pm \Delta X$$

Per valutare l'entità dell'errore ΔX da associare, osserviamo che il valor medio degli scarti $< X^{i}_{mis} - X_{mis} >$ è uguale a zero per definizione di media. Chiamiamo **scarto quadratico medio** (o **varianza**) il valor medio del quadrato degli scarti:

$$\sigma^2 = 1/N \cdot \sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{mis})^2$$

e utilizziamo la radice quadrata dello scarto quadratico medio (**deviazione standard**), che è un indicatore della larghezza della distribuzione delle misure, come stima dell'errore sulle misure:

$$\Delta X = \sigma = \sqrt{1/N \cdot \sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{mis})^2}$$

Supponiamo di fare tante serie di misure. Ognuna di queste serie è caratterizzata dal suo valor medio.

I valori medi sono più vicini al valore “vero” rispetto alle singole misure; avranno perciò una distribuzione più stretta di quella delle singole misure.

Si dimostra che, mentre la deviazione standard è l’incertezza statistica con cui si distribuisce la singola misura attorno al valor vero, **l’errore da associare al valor medio di tutte le misure** è:

$$\Delta X_{mis} = \sigma / \sqrt{N} = 1/N \cdot \sqrt{\sum_{i=1,N} (X^i_{mis} - X_{mis})^2}$$

Osservazioni:

• All’aumentare del numero delle misure la varianza (e pertanto anche la deviazione standard) tende ad un valore costante. Invece, **l’errore sulla media diminuisce come l’inverso della radice quadrata del numero di misure**.

• Un insieme di tante misure (distribuzione di misure) è stato riassunto da due soli valori: **la media e la deviazione standard** (oppure l’errore sulla media, che non è altro che la deviazione standard divisa per la radice quadrata del numero delle misure). Abbiamo perso il dettaglio (le singole misure), ma abbiamo estratto proprio e solo le quantità che servono ai nostri scopi. Descrizioni sempre più accurate della distribuzione di partenza si potranno ottenere introducendo altri parametri (es: asimmetrie, etc.).

La **deviazione standard** mi quantifica la larghezza della curva che descrive la distribuzione dei valori misurati. Dipende dalle caratteristiche del processo che si misura (nel caso della misura di tempo di caduta dell’esperienza di laboratorio sul viscosimetro a caduta erano i riflessi dello studente, la facilità con cui si riuscivano a vedere i traguardi, etc.). Non dipende dal numero di misure che si fanno. **La deviazione standard mi quantifica come una singola misura è distribuita attorno al valor medio.**

L’**errore sulla media ($\sigma/\sqrt{N}$)** diminuisce col numero delle misure. **L’errore sulla media mi quantifica come il valor medio è distribuito attorno al valor vero** (assumendo che non ci siano errori sistematici di altro tipo).

Interpretazione probabilistica

Se i risultati delle misure sono **casuali** e **indipendenti fra loro**, tenderanno ad assumere una distribuzione simmetrica a campana, centrata sul valor medio e con larghezza dell’ordine della deviazione standard (distribuzione di Gauss).

Una nuova misura avrà una probabilità:

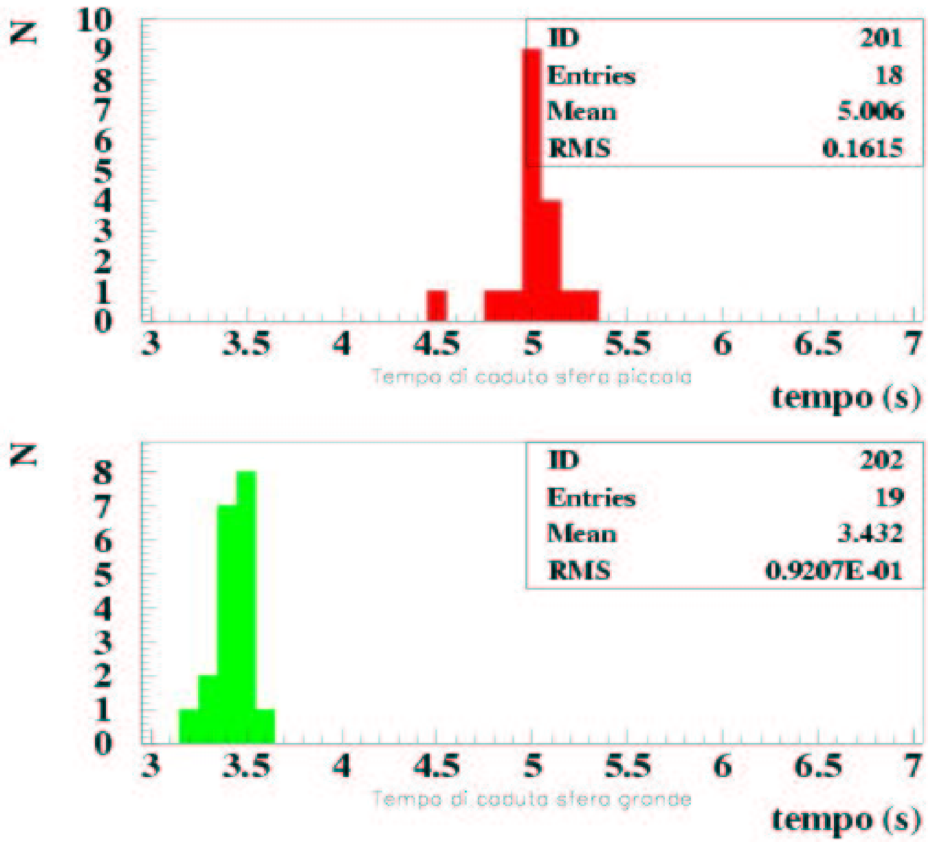
- **del 68.3% di stare a 1 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 95.4% di stare a 2 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 98.8% di stare a 2.5 σ dal valor medio della distribuzione**;
- **del 99.7% di stare a 3 σ dal valor medio della distribuzione;**
- …

Gli stessi valori valgono per la probabilità del valor medio di una serie di misure di stare a N volte l’errore sulla media dal valor vero.

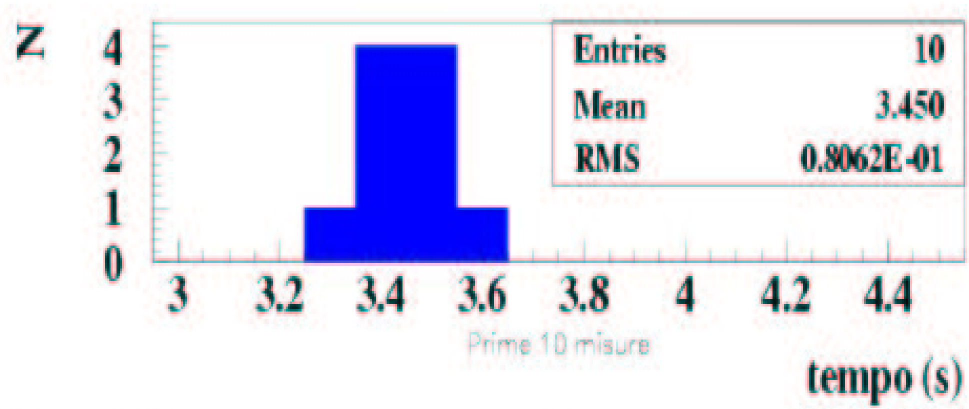
Risultati delle misure: <u>tempi di caduta</u>

20 misure, in secondi, per ogni raggio della sfera (non tutte riuscite…) con un cronometro di precisione 0.1 s:

Piccola		Grande	
5.0	5.0	3.4	3.4
5.0	4.5	3.5	3.4
5.0	5.0	3.6	3.5
4.9	5.1	3.4	3.5
5.1	5.0	3.4	-
5.3	5.1	3.5	3.2
5.1	5.0	3.3	3.4
5.0	4.8	3.5	3.3
-	5.0	3.5	3.5
-	5.2	3.4	3.5

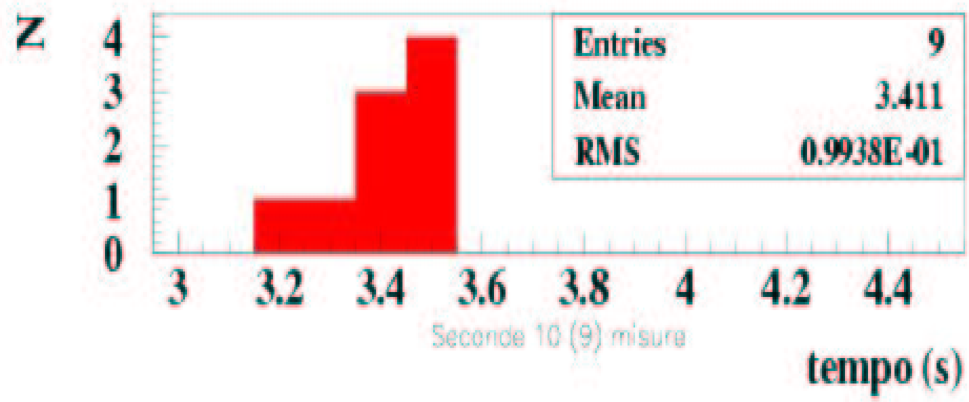


Consideriamo (nella prossima pagina) la distribuzione dei tempi di caduta delle sfere grandi: prendendo dei sottoinsiemi del numero totale di misure fatte, il valor medio e la deviazione standard rimangono gli stessi (entro gli errori, ovviamente) mentre l’errore sulla media diminuisce.



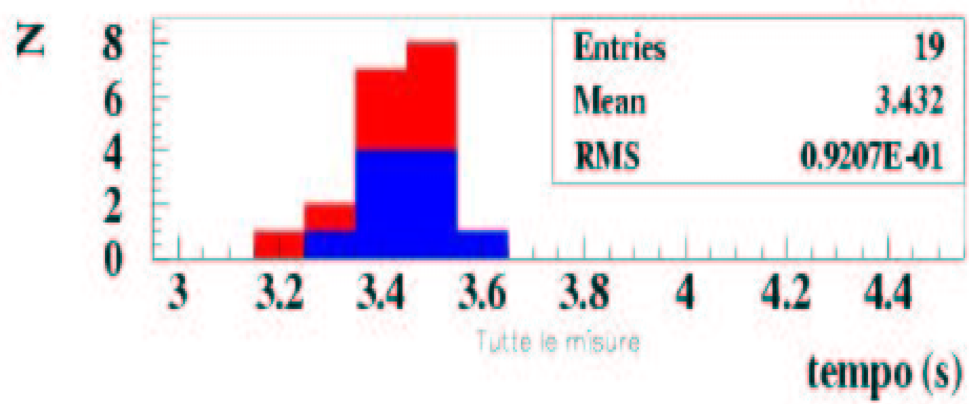
<u>Prime 10 misure:</u>

Valor medio → 3.45 s
Deviazione standard → 0.08 s
Errore sulla media → 0.025 s



<u>Seconde 10 (in realtà 9) misure:</u>

Valor medio → 3.41 s
Deviazione standard → 0.10 s
Errore sulla media → 0.033 s



<u>Tutte le misure insieme:</u>

Valor medio → 3.43 s
Deviazione standard → 0.09 s
Errore sulla media → 0.021 s

Esercizio

Finale Olimpica dei 100 m a Sidney 2000:

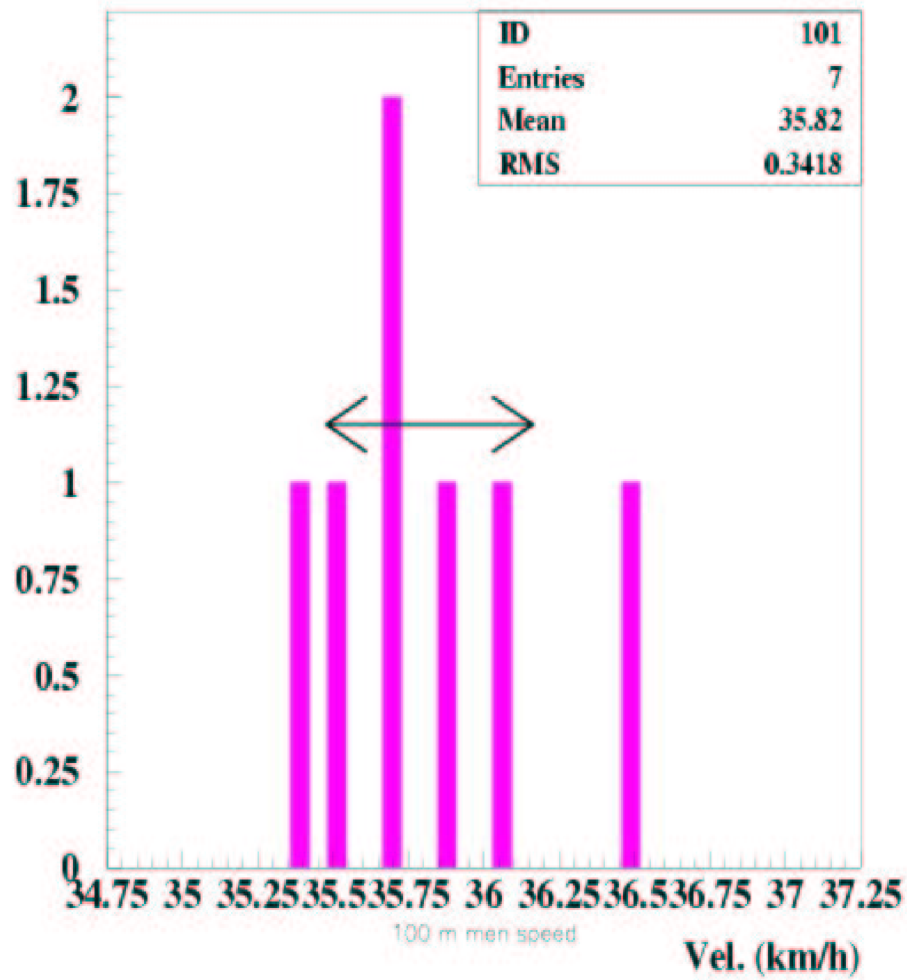
1.	Maurice Greene	9.87 s
2.	Ato Boldon	9.99 s
3.	Obadele Thompson	10.04 s
4.	Dwain Chambers	10.08 s
5.	Jonathan Drummond	10.09 s
6.	Darren Campbell	10.13 s
7.	Kim Collins	10.17 s
8.	Aziz Zakari	ABD

- Qual’è la velocità minima, massima e media dei finalisti, in km/h ?
- Supponendo che gli stessi atleti ricorressero la stessa finale nelle stesse condizioni, fra quali valori di velocità mi aspetto di avere il 68.3% degli atleti? Nella finale di Sidney quanti atleti sono stati più lenti, e quanti più veloci di 1σ dal valor medio?
- Fate qualche considerazione sul risultato di Zakari (dal punto di vista statistico, ovviamente).

Soluzione

1.	Maurice Greene	36.47 km/h
2.	Ato Boldon	36.04 km/h
3.	Obadele Thompson	35.86 km/h
4.	Dwain Chambers	35.71 km/h
5.	Jonathan Drummond	35.68 km/h
6.	Darren Campbell	35.54 km/h
7.	Kim Collins	35.40 km/h
8.	Aziz Zakari	ABD

- Zakari ha abbandonato: il suo tempo non può essere considerato assieme a quello degli altri. Sappiamo infatti che esiste un motivo (effetto sistematico noto) per cui non può essere considerato omogeneo a quello degli altri, cioè non appartiene alla stessa distribuzione statistica.



Probabilità

La probabilità di un evento può essere intesa operativamente come la frazione di volte che ci aspettiamo che l'evento accada, nel limite di un numero molto grande di tentativi.

Ad esempio: lanciando una moneta o ottengo testa o ottengo croce. Mi aspetto però che ripetendo il lancio molte volte, circa nella metà dei casi ottengo testa, e circa nella metà dei casi ottengo croce.

La somma delle probabilità di tutte le possibili occorrenze di un evento è uguale a 1 (cioè, qualcosa <u>deve</u> succedere): se la probabilità di un evento è **P** , quella dell'evento complementare è **1-P**.

Ad esempio, se la probabilità di ottenere "5" nel lancio di un dado a sei facce è $p = 1/6$, la probabilità di ottenere "un numero qualsiasi a parte il 5" è $1 - p = 1 - 1/6 = 5/6$.

Nel caso di eventi equiprobabili (esempio: lancio di una moneta, facce di un dado, estrazione di un numero al lotto, …) la probabilità di un'occorrenza può essere ricavata facilmente:

$$P = \frac{\text{Numero di casi favorevoli}}{\text{Numero di casi possibili}}$$

Nel caso non si possa valutare a priori la probabilità di un evento, dobbiamo <u>stimarla</u> dalla <u>**frequenza**</u> con cui l'evento si ripete in un numero sufficientemente grande di tentativi:

$$F = \frac{\text{Numero di occorrenze dell'evento}}{\text{Numero di tentativi}}$$

Esempio: qual'è la probabilità che un farmaco dia un determinato tipo di effetto collaterale? Devo valutarla da un **test clinico**.

Probabilità composta

La probabilità che due eventi <u>indipendenti</u> avvengano simultaneamente è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi:

$$\mathbf{P_{1\,\&\,2} = P_1 \cdot P_2}$$

Ad esempio: probabilità che dal lancio di due dadi si ottenga sempre “2”.

Più in generale, se gli eventi non sono indipendenti

$$\mathbf{P_{1\,\&\,2} = P_1 \cdot (P_2 \mid P_1)}$$

che si legge “ la probabilità che avvengano i due eventi è data dal prodotto della probabilità del primo per la probabilità del secondo dato il primo”. (Definizione: “probabilità di un evento dato un altro evento” = “**probabilità condizionata**”)

Ad esempio: trovare la probabilità che nel lancio di due dadi si ottenga sempre lo stesso numero.

Esercizio

Un test clinico deve stimare la presenza di una malattia che colpisce mediamente lo 0.5% della popolazione. Sperimentato in laboratorio su 2000 volontari sani ha dato in 40 casi risposta positiva (falso positivo). Su persone affette dalla malattia, invece, risulta sempre positivo.

Qual'è la probabilità di essere affetti dalla malattia cercata dal test, in caso di risposta positiva?
Supponendo che i falsi positivi siano casuali, qual'è la probabilità di essere affetti dalla malattia nel caso anche una seconda applicazione del test risultasse positiva?

Soluzione

Probabilità di essere malati: **$P(M) = 0.5\%$**

Probabilità di essere sani: **$P(S) = 1 – 0.5\% = 99.5\%$**

Probabilità di avere il test positivo se malati (prob. condizionata):

$P(+ \mid M) = 1$

Probabilità di avere il test positivo se sani (prob. condizionata):

$P(+ \mid S) = 40/2000 = 0.02 = 2\%$

Su un campione casuale di **N** persone, il numero di persone malate che risultano positive al test è:

$N(M,+) = N \cdot P(M) \cdot P(+ \mid M) = N \cdot 0.5\% \cdot 1 = N \cdot 0.005$

Iil numero di persone sane che risultano positive al test è invece:

$N(S,+) = N \cdot P(S) \cdot P(+ \mid S) = N \cdot 99.5\% \cdot 2\% \sim N \cdot 0.02$

La frazione di persone malate fra quelle che risultano positive al test è pertanto:

$P(M \mid +) = N(M,+) / (N(M,+) + N(S,+)) = (N \cdot 0.005) / (N \cdot 0.025) = 0.02 = 20\%$

Se si fa il test due volte e si risulta entrambe le volte positivi:

$N(M,++) = N \cdot P(M) \cdot P(+ \mid M) \cdot P(+ \mid M) = N \cdot 0.5\% \cdot 1 \cdot 1 = N \cdot 0.005$

$N(S,++) = N \cdot P(S) \cdot P(+ \mid S) \cdot P(+ \mid S) = N \cdot 99.5\% \cdot 2\% \cdot 2\% \sim N \cdot 0.0004$

La frazione di persone malate fra quelle che risultano positive a entrambi i test è infine:

$P(M \mid ++) = N(M,++) / (N(M,++) + N(S,++)) = 0.005 / 0.0054 = 0.926 = 92.6\%$

Esercizio

Uno schermo circonda completamente una sorgente radioattiva di fotoni, a parte una apertura circolare di 0.5 cm di diametro posta a 10 cm di distanza dalla sorgente.
Dietro all'apertura è posizionato un rivelatore che ha il 25% di efficienza per i fotoni emessi da quella sorgente (l'efficienza è la probabilità che un fotone che colpisce il rivelatore sia effettivamente registrato e rivelato).
Qual'è la probabilità che un fotone emesso dalla sorgente sia visto dal rivelatore posto dietro all'apertura?
Supponendo che la sorgente emetta $2.0 \cdot 10^3$ fotoni al secondo, su tutto l'angolo solido, qual'è il numero più probabile di fotoni rivelati in un minuto di acquisizione?

Soluzione

L'area del foro è

$\mathbf{s} \;=\; \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{r}^{\mathbf{2}} \;=\; 3.14159 \cdot (\, 0.5 / 2)^{2} \text{ cm}^{2} = \; 0.1966 \text{ cm}^{2}$

La superficie circolare alla distanza a cui e' posto il foro è

$\mathbf{S} \;=\; \mathbf{4}\, \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{R}^{\mathbf{2}} \;=\; 4 \cdot 3.14159 \cdot (10\,)^{2} \text{ cm}^{2} = 1256.6 \text{ cm}^{2}$

La probabilità che un fotone emesso dalla sorgente infili il buco è

$\mathbf{P}_{\mathbf{geom}} \;=\; \mathbf{s} / \mathbf{S} = 0.1966 \text{ (cm}^{2}) / 1256.6 \text{ (cm}^{2}) = 0.156 \cdot 10^{-3}$

La probabilità che un fotone emesso dalla sorgente infili il buco e sia rivelato è

$\mathbf{P} \;=\; \mathbf{P}_{\mathbf{geom}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \;=\; \mathbf{0.156 \cdot 10^{-3} \cdot 0.25} \;=\; \mathbf{3.9 \cdot 10^{-5}}$

In un minuto la sorgente emette (isotropicamente su tutto l'angolo solido)

$\mathbf{N} \;=\; 2.0 \cdot 10^{3} \text{ (fotoni / s)} \cdot 60 \text{ (s)} \;=\; 1.20 \cdot 10^{5} \text{ fotoni}$

Siccome ciascuno di questi fotoni ha probabilità **P** di essere rivelato, il numero medio di fotoni rivelati dopo un minuto di acquisizione è

$\mathbf{<N_{riv}>} \;=\; \mathbf{N \cdot P} \;=\; 4.7 \quad \text{fotoni}$

Il numero più probabile di fotoni (da pensare come il numero su cui si dovrebbe scommettere volendo avere la più alta probabilità di vittoria) è il numero intero più vicino al valor medio:

$\mathbf{N_{riv}}$ **(più probabile) = 5 fotoni**