

Probabilità

Concetti fondamentali

Definizione di probabilità

Teoremi sulla probabilità

Esercizi

Alcuni concetti fondamentali

Evento: è qualsiasi fatto che può accadere oppure no.

Evento certo: è un evento che accadrà di sicuro.

Evento impossibile: è un evento che di sicuro non accadrà.

Ad ogni evento associamo un numero, che chiamiamo **probabilità** e che definiremo meglio nel seguito. Un evento certo ha probabilità uguale a 1; un evento impossibile ha probabilità uguale a 0; ogni altro tipo di evento ha probabilità compresa fra 0 e 1, tanto più alta quanto è "più facile" che l'evento accada.

Si dice che l'evento **A** è **dipendente** dall'evento **B** se la probabilità che **A** accada dipende dal fatto che accada **B**.

(Esempio: $A = \text{“La Fortitudo vince lo scudetto del basket”}$, $B = \text{“I più forti giocatori della Fortitudo si infortunano durante i play-off”}$)

L'evento **A** è **indipendente** dall'evento **B** se la probabilità che **A** accada non dipende da **B**.

(Esempio: $A = \text{“La Fortitudo vince lo scudetto del basket”}$, $B = \text{“Il Bologna vince lo scudetto del calcio”}$)

Due eventi **A** e **B** sono **mutuamente escludentesi** se non possono verificarsi contemporaneamente.

(Esempio: $A = \text{“La Fortitudo vince lo scudetto del basket”}$, $B = \text{“La Pallacanestro Reggiana vince lo scudetto del basket”}$)

Eventi casuali formano un gruppo completo di eventi se almeno uno di essi deve necessariamente accadere.

(Esempio: $A_1 \dots A_{18}$ = “L’i-esima squadra del campionato di basket di serie A vince lo scudetto”)

Eventi contrari sono due eventi mutuamente escludentesi che formano un gruppo completo.

(Esempio: A = “La Fortitudo vince lo scudetto”, B = “La Fortitudo non vince lo scudetto”)

Due o più eventi casuali si dicono equiprobabili se la simmetria dell’esperimento permette di supporre che essi abbiano tutti la stessa probabilità di accadere.

(Esempio: $A_1 \dots A_6$ = “Nel lancio di un dado non truccato esce la faccia i”)

Osservazione (che in realtà potremmo fare solo dopo aver definito la probabilità...): in un gruppo completo di N eventi equiprobabili e mutuamente escludentesi, la probabilità di ciascuno di essi è $P = 1/N$

Si definisce **somma** di due eventi A e B l'evento C che consiste nel verificarsi di A , o di B , o di entrambi.

La probabilità della somma si scrive:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A+B) = P(A \text{ o } B)$$

In generale, si definisce somma di un numero qualsiasi di eventi l'evento che consiste nel verificarsi di almeno uno di essi.

Si definisce **prodotto** di due eventi A e B l'evento C che consiste nel verificarsi di A e di B , contemporaneamente.

La probabilità del prodotto si scrive:

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A \text{ e } B)$$

In generale, si definisce prodotto di un numero qualsiasi di eventi l'evento che consiste nel verificarsi di tutti loro contemporaneamente.

La probabilità che un evento A accada a condizione (“dopo che”) si sia verificato l'evento B si dice **probabilità condizionata**. Si denota con

$$P(A|B)$$

Potrebbe succedere che $P(A)$ sia piccola, mentre $P(A|B)$ sia molto più grande. Ad esempio, se $A =$ “La squadra ultima in classifica nel campionato di basket vince lo scudetto”, $P(A)$ e' molto piccola. Se però $B =$ “Le altre 17 squadre del campionato di serie A vengono squalificate per illecito sportivo”, $P(A|B) = 1 !$

Si definiscono **variabili aleatorie** quelle grandezze che, nel corso di una prova possono assumere un valore sconosciuto a priori. Si distinguono in variabili aleatorie **discrete** (se possono assumere solo un insieme di valori numerabile, come il numero estratto da un'urna del lotto) e variabili aleatorie **continue** (se possono assumere un insieme di valori continuo, come ad esempio il punto in cui una freccetta colpisce un bersaglio).

Si definisce **distribuzione di probabilità** la funzione che associa a ciascun possibile valore assunto dalla variabile aleatoria la corrispondente probabilità.

Esempio di distribuzione di probabilità discreta: se la variabile aleatoria è il numero estratto da un'urna del gioco del lotto, i possibili valori assunti dalla variabile aleatoria sono i numeri interi compresi fra 1 e 90, la probabilità associata a ciascuno di essi è $1/90$, la distribuzione di probabilità associata all'estrazione del lotto è la funzione che associa a ciascun numero intero fra 1 e 90 la probabilità di $1/90$:

$$p(I, I=1,90) = 1/90$$

Esempio di distribuzione di probabilità continua: pensiamo al lancio delle freccette su un bersaglio. Se (x,y) sono le coordinate della posizione del punto in cui la freccetta punge il bersaglio (variabile aleatoria), anche senza conoscere l'esatta forma matematica della funzione che associa a ogni punto (x,y) la sua probabilità, immaginiamo che la distribuzione di probabilità $p(x,y)$ sia una curva (bidimensionale) con probabilità più elevata verso il centro del bersaglio (visto che è proprio lì che si mira...) e che decresce man mano che ci si allontana dal centro. E' anche ragionevole pensare che la curva sia tanto più stretta quanto più buona è la mira di chi tira la freccetta.

Come valore atteso (o speranza matematica) di una variabile aleatoria si indica la somma (nel caso di variabili discrete) o l'integrale (nel caso di variabili continue) dei prodotti di tutti i possibili valori della variabile aleatoria per la loro probabilità.

Variabile aleatoria discreta (distribuzione di probabilità discreta):

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1, N} x_i \cdot p(x_i)$$

Variabile aleatoria continua (distribuzione di probabilità continua):

$$\langle x \rangle = \int_{\text{tutti gli } x} x \cdot p(x) \cdot dx$$

Si dimostra che il valor medio dei valori misurati di una variabile aleatoria in un numero molto grande di "esperimenti" tende al valore atteso della variabile aleatoria.

Definizioni di probabilità

Finora abbiamo inteso la probabilità in maniera intuitiva. Formalizziamo il concetto, associando a ogni evento x un numero $P(x)$ tale che:

- $P(\text{evento certo}) = 1$
- $P(\text{evento impossibile}) = 0$
- Per ogni evento x : $0 \leq P(x) \leq 1$
- Se x_1 e x_2 sono due eventi mutuamente escludentesi
$$P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)$$
- Se $\{x_i, i=1,N\}$ è un gruppo completo di eventi mutuamente escludentesi
$$\sum_i P(x_i) = 1$$

Esistono diverse definizioni possibili di probabilità che soddisfano questi assiomi

Probabilità classica

La probabilità, $P(x)$, di un evento x è il rapporto tra il numero M di casi "favorevoli" (cioè il manifestarsi di x) e il numero totale N di risultati ugualmente possibili e mutuamente escludentesi.

Questa probabilità è talvolta detta **probabilità oggettiva** o anche **probabilità a priori**: è possibile stimare la probabilità di un evento a partire dalla simmetria del problema.

Ad esempio nel caso di un dado regolare la probabilità di avere un numero qualsiasi dei sei presenti sulle facce è $1/6$:

$$P(x) = \frac{\text{Numero di volte in cui può uscire } x}{\text{Numero di risultati possibili}} = \frac{1}{6}$$

Probabilità empirica

E' la definizione **sperimentale** di probabilità come **limite della frequenza** misurabile in una serie di esperimenti.

La probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero di prove.

Rispetto alla definizione classica, sostituisce al rapporto *numero casi favorevoli / numero di casi possibili* il rapporto *numero di esperimenti effettuati con esito favorevole / numero complessivo di esperimenti effettuati*.

Il vantaggio di questa definizione è che essa si applica senza difficoltà anche ai casi in cui la densità di probabilità non è uniforme, o in ogni caso non è ricavabile a priori dalla simmetria dell'esperimento.

In pratica, se abbiamo un esperimento ripetuto N volte ed un certo risultato x che accade M volte, la probabilità di x è data dal limite della **frequenza** (M/N) quando N tende all'infinito

$$P(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} M/N$$

Note:

*La probabilità così definita non è una proprietà solo dell'esperimento, ma è **anche funzione del particolare gruppo su cui viene calcolata**. Ad esempio la probabilità di sopravvivenza ad una certa età, calcolata su diversi campioni di popolazione a cui una stessa persona appartiene (maschi, femmine, fumatori, non fumatori, deltaplanisti, ecc.), risulta diversa.*

*La probabilità empirica **si può rigorosamente applicare soltanto agli esperimenti ripetibili**, per i quali il limite per N che tende all'infinito ha significato. Si deduce quindi che molte situazioni della vita quotidiana, non sono soggette all'uso di questa definizione di probabilità: rappresentano esempi di questo tipo il risultato di una partita di calcio, quello di una roulette russa o il tempo atmosferico di domani.*

*Inoltre, per venire incontro ad una necessità di "operatività", quasi tutti sono concordi nel definire la probabilità come il valore della **frequenza relativa di successo su un numero di prove non necessariamente tendente all'infinito, ma giudicato sufficientemente grande**.*

Probabilità soggettiva

La probabilità di un evento x è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di x .

E' la definizione meno rigorosa, ma è quella a cui più spesso ricorriamo per formulare giudizi ("credo che domenica la mia squadra riuscirà a vincere", "è probabile che mi capiti una domanda sulla probabilità all'esame di fisica", etc.).

Certe volte siamo forzati a assegnare un determinato grado di fiducia all'avverarsi di un evento (ad esempio: il grado di fiducia che diamo al fatto che il gruppo su cui abbiamo calcolato la frequenza di un evento sia effettivamente rappresentativo del campione totale).

Esercizio su probabilità composta e probabilità condizionata

Nel gioco del lotto, cinque numeri fra 1 e 90 vengono estratti casualmente da un'urna. La probabilità che un numero N esca da un'estrazione è

$$P(N) = 5/90 = 1/18 = 0.055555... = 5.56\%$$

La probabilità che N non sia estratto è pertanto

$$P(\text{non } N) = 1 - P(N) = 0.944444... = 94.44\%$$

Qual è la probabilità che N non venga mai estratto nel corso di 99 estrazioni?

Probabilità composta: l'evento "non N" deve apparire 99 volte:

$$\begin{aligned} P(99 \text{ volte non } N) &= P(\text{non } N) \cdot P(\text{non } N) \cdot \dots \cdot P(\text{non } N) \quad \{99 \text{ volte}\} \\ &= P(\text{non } N)^{99} = 0.94444^{99} = 0.003487 = 0.35 \% \end{aligned}$$

Qual è la probabilità che N non venga mai estratto nel corso di 100 estrazioni?

$$\begin{aligned} P(100 \text{ volte non } N) &= P(\text{non } N) \cdot P(\text{non } N) \cdot \dots \cdot P(\text{non } N) \quad \{100 \text{ volte}\} \\ &= P(\text{non } N)^{100} = 0.94444^{100} = 0.003293 = 0.33 \% \end{aligned}$$

Qual è la probabilità che N non venga estratto per 100 estrazioni, se già non è stato estratto per 99 estrazioni?

E' la probabilità che nella centesima estrazione non esca il numero N, se tale numero non è stato estratto nelle estrazioni precedenti. Ci sono 90 numeri nell'urna, cinque dei quali vengono estratti. La probabilità di non estrarre N è $P(\text{non N}) = 85/90 = 94.44\%$

Pertanto, la probabilità che nella centesima estrazione il numero N continui a non essere estratto, se non è stato estratto nelle 99 estrazioni precedenti è (probabilità condizionale):

$$P(100 \text{ volte non N} \mid 99 \text{ volte non N}) = P(\text{non N}) = 94.44\%$$

Osservazione (ovvia...):

La probabilità che un numero venga estratto in un gioco casuale come il lotto, in cui le condizioni (urna e palline numerate) vengono restaurate dopo ogni giocata, non dipende dal fatto che tale numero sia stato estratto o meno in una giornata precedente.

Teoremi sulla probabilità

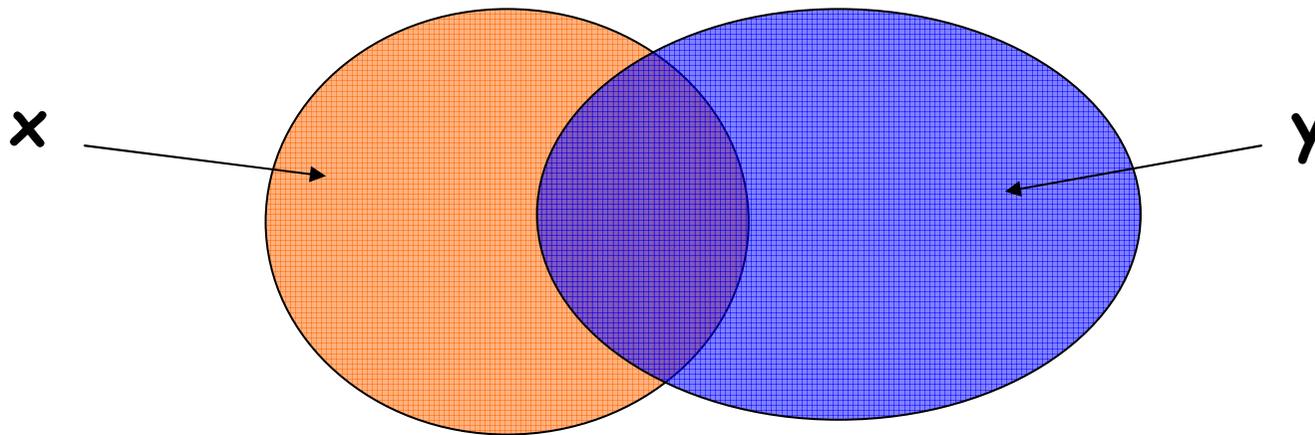
- Teorema della somma
- Teorema del prodotto
- Teorema della probabilità composta
- Teorema della probabilità totale
- Teorema di Bayes

Teorema della somma

Per due eventi qualsiasi x e y , non necessariamente mutuamente escludentesi, vale

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$$

$$(\text{ovvero } P(x+y) = P(x) + P(y) - P(x \cdot y))$$

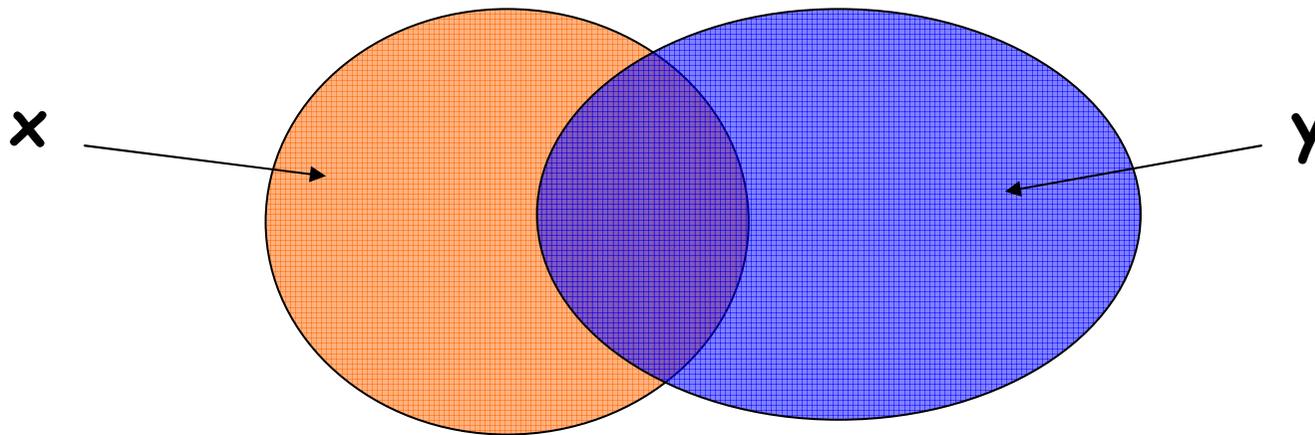


Teorema del prodotto

Per due eventi qualsiasi x e y , non necessariamente mutuamente escludentesi, vale

$$P(x \cap y) = P(x) + P(y) - P(x \cup y)$$

$$(\text{ovvero } P(x \cdot y) = P(x) + P(y) - P(x + y))$$



Teorema della probabilità composta

Un altro modo per esprimere il teorema del prodotto di due probabilità è il seguente:

la probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro calcolata a condizione che il primo abbia luogo:

$$P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y|x)$$

Si noti che:

- se x e y sono mutuamente escludentesi $P(y|x)=0$ e $P(x \cap y) = 0$;
- se x e y sono indipendenti, $P(y|x) = P(y)$ e $P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y)$.

Teorema della probabilità totale

Dobbiamo valutare la probabilità di un evento x che può avvenire contemporaneamente a un insieme completo di N eventi mutuamente escludentesi $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ (insieme delle ipotesi). Allora:

$$P(x) = \sum_{i=1, N} P(x|A_i) \cdot P(A_i)$$

cioè la probabilità dell'evento x si calcola come la somma dei prodotti delle probabilità di ciascuna delle ipotesi per la probabilità condizionata dell'evento con tali ipotesi

Esempio di applicazione del teorema della probabilità totale

Estraggo una pallina da un'urna che contiene due palline. Un possibile insieme delle ipotesi è:

A_1 = Entrambe le palline nell'urna sono rosse;

A_2 = Entrambe le palline nell'urna non sono rosse;

A_3 = Una pallina è rossa e l'altra no.

Qual è la probabilità dell'evento x = “estrarre una pallina rossa”?

$$P(x|A_1) = 1$$

$$P(x|A_2) = 0$$

$$P(x|A_3) = 1/2 = 0.5$$

$$P(x) = 1 \cdot P(A_1) + 0.5 \cdot P(A_3) = ?$$

Ci manca un dato: le probabilità delle varie ipotesi a priori. Se però estraggo una pallina rossa, so che almeno una pallina rossa c'era nell'urna! In genere si agisce proprio in questo modo: dal risultato di un esperimento (l'osservazione dell'evento x) si cerca di capire la causa che l'ha generato (cioè con quale probabilità l'ipotesi A_i può essere considerata l'origine dell'evento osservato). Ci serve cioè il teorema di Bayes...

Teorema di Bayes

Osserviamo un evento x . Esiste un insieme delle ipotesi $\{A_i\}$.
Come viene modificata la probabilità che assegniamo all'ipotesi A_i dopo l'osservazione x ? (In altre parole: qual è la probabilità condizionata dell'ipotesi A_i data l'osservazione x ?)

Per il teorema della moltiplicazione:

$$P(x \cdot A_i) = P(x) \cdot P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i)$$

Eliminando il primo membro, ricaviamo:

$$P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i) / P(x)$$

Ovvero, per il teorema della probabilità totale:

$$P(A_i|x) = \frac{P(A_i) \cdot P(x|A_i)}{\sum_{i=1, N} P(A_i) \cdot P(x|A_i)}$$

Continuiamo l'esempio dell'urna con due palline...

A priori non sappiamo se nell'urna ci sono palline rosse o di altri colori. Possiamo assegnare alle tre ipotesi la stessa probabilità a priori (a questo punto è una probabilità soggettiva!):

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$$

Come viene modificata la probabilità che assegniamo a ciascuna ipotesi dopo l'osservazione dell'evento x?

$$\begin{aligned} P(A_1) \cdot P(x|A_1) + P(A_2) \cdot P(x|A_2) + P(A_3) \cdot P(x|A_3) &= \\ 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0.5 &= 0.5 \end{aligned}$$

e

$$P(A_1|x) = 1/3 \cdot 1 / 0.5 = 2/3 = 66.7 \%$$

$$P(A_2|x) = 0$$

$$P(A_3|x) = 1/3 \cdot 0.5 / 0.5 = 1/3 = 33.3 \%$$

Partendo da una conoscenza limitata (in questo caso, una stima soggettiva della probabilità delle varie ipotesi) l'osservazione dell'evento x ci ha permesso di modificare, migliorandola, la conoscenza delle ipotesi.

Cosa succede però alle nostre conclusioni se utilizziamo delle ipotesi differenti?

Provare a calcolare, ad esempio, qual è la probabilità che nell'urna ci siano due palline rosse in caso di osservazione dell'evento x ="estrazione di una pallina rosse" e se l'insieme delle ipotesi è il seguente

A_1 = nell'urna ci sono due palline rosse

A_2 = nell'urna ci sono due palline gialle

A_3 = nell'urna ci sono due palline blu

A_4 = nell'urna ci sono una pallina rossa e una gialla

A_5 = nell'urna ci sono una pallina rossa e una blu

A_6 = nell'urna ci sono una pallina gialla e una blu

e a ciascuna di esse associamo la stessa probabilità a priori, $1/6$.

Osservazione: il teorema di Bayes è un teorema matematico rigoroso che ci permette di ricavare conclusioni sulla probabilità di determinati eventi (vedi esercizio successivo, in cui calcoleremo la probabilità che una persona positiva a un test clinico sia effettivamente malata).

Può essere usato per migliorare la conoscenza che si ha su determinate ipotesi, come nell'esempio precedente delle due palline nell'urna. Il risultato di un esperimento modifica la stima che abbiamo sulla probabilità delle ipotesi, aiutandoci a scegliere quella più probabile.

Partendo da priori diversi si può arrivare a conclusioni diverse (la scelta dei priori deve essere oculata, anche se soggettiva). In ogni caso, l'utilizzo del risultato di un esperimento con il teorema di Bayes migliora la conoscenza che abbiamo delle ipotesi. L'applicazione ripetuta del teorema di Bayes (tanti esperimenti) converge verso una "stima oggettiva" della probabilità delle ipotesi, indipendente dalla scelta iniziale dei priori.

Altro esempio: valuto la risposta di soggetti malati ad un gruppo di farmaci, per cercare di capire qual'è il meccanismo che ha causato la malattia e che deve essere inibito per curarla.

Esercizio

Per facilitare un'identificazione precoce dei tumori al seno, le donne da una certa età in poi sono incoraggiate a sottoporsi a mammografia, anche se non presentano sintomi. Per donne senza sintomi fra i 40 e i 50 anni valgono le seguenti informazioni: la probabilità di avere un tumore al seno è dell'1%; se sono effettivamente malate, la probabilità che il tumore sia visto dalla mammografia è dell'80%; se non sono malate, la probabilità di una mammografia positiva è comunque del 10%.

Supponiamo che una donna di questo gruppo risulti positiva a una mammografia: qual'è la probabilità che essa sia effettivamente malata?

Soluzione

Probabilità di essere malati: $P(M) = 1\% = 0.01$

Probabilità di essere sani: $P(S) = 1 - 1\% = 99\% = 0.99$

Probabilità di avere il test positivo se malati (prob. condizionata):
 $P(+ | M) = 80\% = 0.80$

Probabilità di avere il test positivo se sani (prob. condizionata):
 $P(+ | S) = 10\% = 0.10$

Per il teorema di Bayes:

$$\begin{aligned} P(M|+) &= P(+ | M) \cdot P(M) / [P(+ | M) \cdot P(M) + P(+ | S) \cdot P(S)] \\ &= 0.8 \cdot 0.01 / [0.80 \cdot 0.01 + 0.10 \cdot 0.99] \\ &= 0.0748 = 7.5\% \end{aligned}$$

Cioè la frazione di donne effettivamente malate fra quelle che risultano positive alla mammografia è del 7.5%

A qualcuno potrebbe risultare più semplice pensare in termini di frequenza (numero di casi possibili) invece che in termini di probabilità. Il procedimento non è concettualmente diverso.

Supponiamo un campione di 1000 persone che si sottopone al test. Di esse:

Numero medio di malati: $N(M) = 1000 \cdot P(M) = 1000 \cdot 0.01 = 10$

Numero medio di sani: $N(S) = 1000 - 10 = 990$

Numero di individui malati che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+ | M) = N(M) \cdot P(+|M) = 10 \cdot 0.80 = 8$$

Numero di individui sani che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+ | S) = N(S) \cdot P(+|S) = 990 \cdot 0.10 = 99$$

Pertanto, 8+99 donne su 1000 risulteranno, in media, positive al test. La frazione di queste che è effettivamente malata è:

$$N(+|M) / [N(+|M) + N(+|S)] = 8/107 = 0.0748 = 7.5\%$$

Cioè la frazione di donne effettivamente malate fra quelle che risultano positive alla mammografia è del 7.5%

Ulteriori esercizi:

Supponendo che due mammografie successive sulla stessa persona diano risultati indipendenti (irreale, ma semplifica i calcoli...) valutare la probabilità di essere malati nel caso che, dopo un primo risultato positivo del test si decide di ripetere il test e si ha di nuovo un risultato positivo.

Se la probabilità di indurre un tumore con la mammografia (che è un esame radiologico) è dell'1‰, valutare qual'è la frazione minima di individui malati nel campione sottoposto a screening ($P(M)$) per cui sia maggiore il numero di persone malate riconosciute positive dal test (pertanto potenzialmente curate) rispetto al numero di persone sane che si ammalano a causa del test stesso.

Esercizio

Uno schermo circonda completamente una sorgente radioattiva di fotoni, a parte una apertura circolare di 0.5 cm di diametro posta a 10 cm di distanza dalla sorgente.

Dietro all'apertura è posizionato un rivelatore che ha il 25% di efficienza per i fotoni emessi da quella sorgente (l'efficienza è la probabilità che un fotone che colpisce il rivelatore sia effettivamente registrato e rivelato).

Qual'è la probabilità che un fotone emesso dalla sorgente sia visto dal rivelatore posto dietro all'apertura?

Supponendo che la sorgente emetta $2.0 \cdot 10^3$ fotoni al secondo, su tutto l'angolo solido, qual'è il numero più probabile di fotoni rivelati in un minuto di acquisizione?

Soluzione

L'area del foro è

$$\mathbf{s} = \pi r^2 = 3.14159 \cdot (0.5 / 2)^2 \text{ cm}^2 = 0.1966 \text{ cm}^2$$

La superficie circolare alla distanza a cui è posto il foro è

$$\mathbf{S} = 4 \pi R^2 = 4 \cdot 3.14159 \cdot (10)^2 \text{ cm}^2 = 1256.6 \text{ cm}^2$$

La probabilità che un fotone emesso dalla sorgente infili il buco è

$$\mathbf{P}_{\text{geom}} = \mathbf{s} / \mathbf{S} = 0.1966 \text{ (cm}^2) / 1256.6 \text{ (cm}^2) = 0.156 \cdot 10^{-3}$$

La probabilità che un fotone emesso dalla sorgente infili il buco e sia rivelato è

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{geom}} \cdot \epsilon = 0.156 \cdot 10^{-3} \cdot 0.25 = 3.9 \cdot 10^{-5}$$

In un minuto la sorgente emette (isotropicamente su tutto l'angolo solido)

$$\mathbf{N} = 2.0 \cdot 10^3 \text{ (fotoni / s)} \cdot 60 \text{ (s)} = 1.20 \cdot 10^5 \text{ fotoni}$$

Siccome ciascuno di questi fotoni ha probabilità \mathbf{P} di essere rivelato, il numero medio di fotoni rivelati dopo un minuto di acquisizione è

$$\langle \mathbf{N}_{\text{riv}} \rangle = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} = 4.7 \text{ fotoni}$$

Il numero più probabile di fotoni (da pensare come il numero su cui si dovrebbe scommettere volendo avere la più alta probabilità di vittoria) è il numero intero più vicino al valor medio:

$$\mathbf{N}_{\text{riv}} \text{ (più probabile)} = 5 \text{ fotoni}$$