Esperienza del viscosimetro a caduta

Parte del corso di fisica per CTF

dr. Gabriele Sirri
sirri@bo.infn.it

http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/farmacia/all/navarria/stuff/homepage.htm

Esperienza del viscosimetro a caduta

10/3/08 - <u>Elementi di Probabilità</u>

11/3/08 - Misura di grandezze fisiche / Analisi degli Errori

17/4/08 - Il viscosimetro a caduta di sfere

14/5/08 - Prova sperimentale in Laboratorio

22/5/08 - Relazione conclusiva

La Fisica è una scienza sperimentale (come Chimica, Farmacia, …):

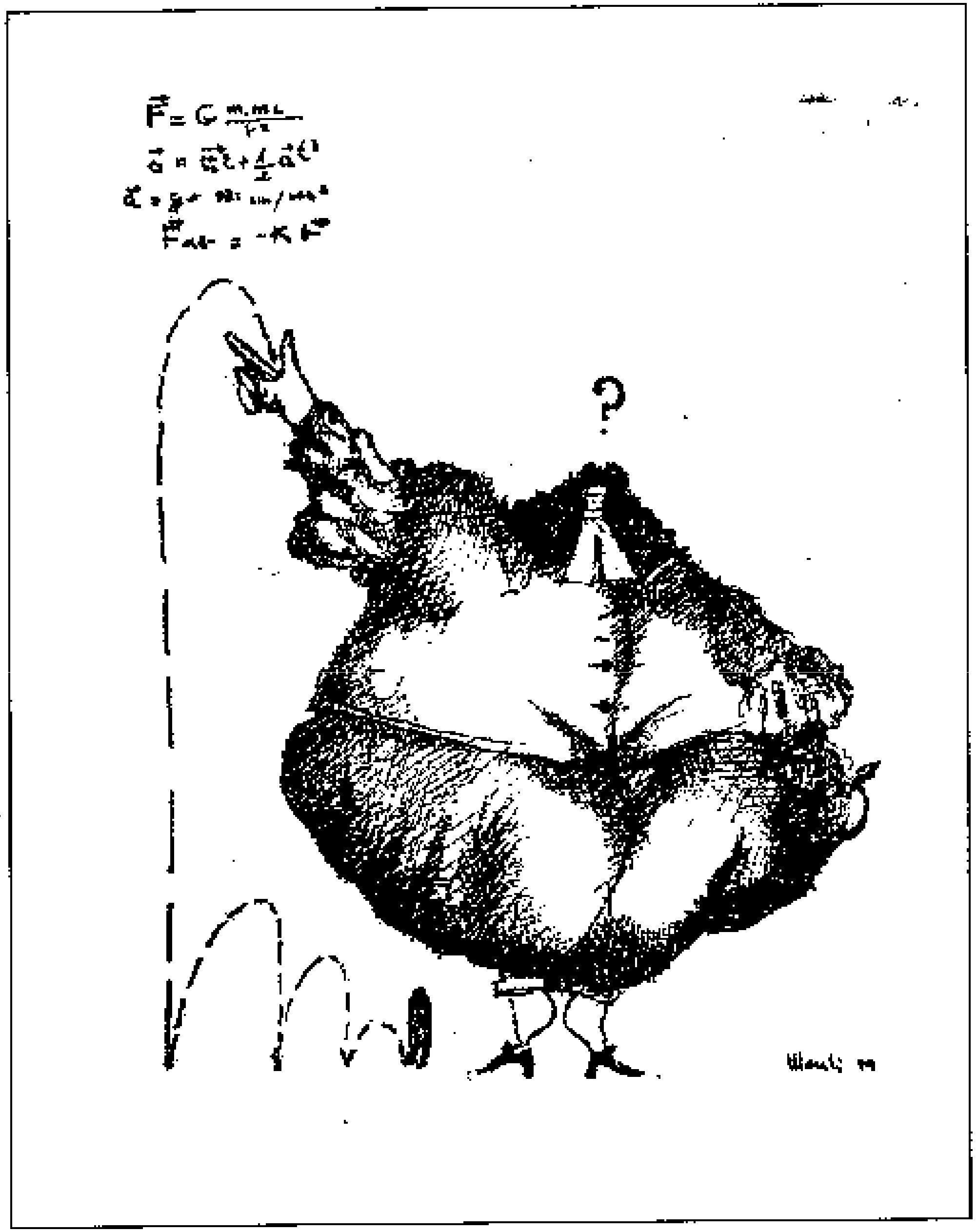
Osservazione (esperienza)

↓

Leggi fisiche

↓

Prevedere il comportamento di un sistema
(e usarlo a proprio vantaggio, quando serve)



Un lancio di moneta potrebbe essere seguito
in modo deterministico usando le equazioni di Newton ...

Probabilità

Concetti fondamentali
Definizione di probabilità
Teoremi sulla probabilità
Esercizi

Evento. Probabilità di un Evento

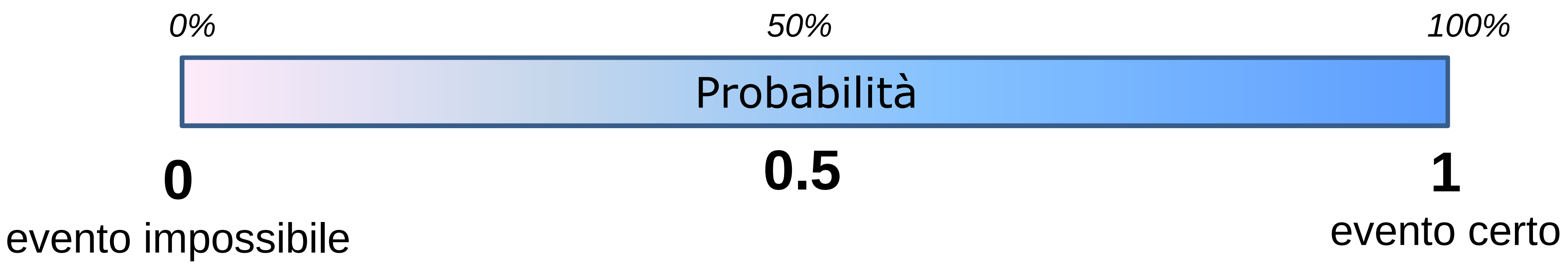
Evento: qualsiasi fatto che può accadere oppure no.

Evento certo: evento che sicuramente accadrà.

Evento impossibile: evento che sicuramente <u>non</u> accadrà.

Probabilità di un evento: numero compreso tra 0 e 1, tanto più alto quanto "più facile" è che l'evento accada

(definizione da rivedere in seguito)



Relazione fra eventi

L'evento A è **dipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada dipende dal fatto che accada B.

Esempio: A = "La Virtus vince lo scudetto del basket",
B = "I più forti giocatori della Virtus si infortunano durante i play-off"

L'evento A è **indipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada non dipende da B

Esempio: A = "La Virtus vince lo scudetto del basket"
B = "Il Bologna viene promosso in serie A"

Due eventi A e B sono **mutuamente escludentesi (o incompatibili)** se non possono verificarsi contemporaneamente.

Esempio: A = "La Virtus vince lo scudetto del basket"
B = "La Pallacanestro Reggiana vince lo scudetto del basket"

Eventi casuali formano un **gruppo completo di eventi** se **almeno uno** di essi deve **necessariamente** accadere.
(Esempio: A_1 … A_{18} = “L’i-esima squadra del campionato vince lo scudetto”)

Eventi contrari sono due eventi mutuamente escludentesi che formano un gruppo completo.
Esempio: A = “Nel lancio di una moneta esce Testa”
B = “Nel lancio di una moneta esce Croce” A = non B

Due o più eventi casuali si dicono **equiprobabili** se la **simmetria** dell’esperimento permette di supporre che essi abbiano tutti la **stessa probabilità** di accadere.
(Esempio: A_1 … A_6 = “Nel lancio di un dado non truccato esce la faccia *i*”)

Osservazione (che in realtà potremmo fare solo dopo aver definito la probabilità…): in un gruppo completo di N eventi equiprobabili e mutuamente escludentesi, la probabilità di ciascuno di essi è P = 1/N

Somma e Prodotto di Eventi

Somma di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A o di B o di entrambi.**

$P(C) = P(A \cup B) = P(A+B) = P(A \text{ o } B)$

Somma di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di almeno uno di essi.

Prodotto di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A e di B contemporaneamente.**

$P(C) = P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A \text{ e } B)$

Prodotto di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di tutti loro contemporaneamente.

Probabilità condizionata

Probabilità che un evento A accada
a condizione ("dopo che") si sia verificato l'evento B

$$P\,(A|B)$$

Esempio:

A = passare l'esame di fisica;

$B_0 \ldots B_3$ = risolvere correttamente 0…3 esercizi allo scritto.

Chiaramente: $P\,(A|B_3) > P\,(A|B_2) > P\,(A|B_1) > P\,(A|B_0)$

Nota:
Potrebbe succedere che P(A) sia piccola, mentre P(A|B) sia molto più grande.

Es: A = "L'ultima in classifica vince il campionato di calcio di serie A",
=> P(A) è molto piccola.
B = "Tutte le altre squadre di seria A sono squalificate per illecito sportivo",
=> anche P(B) è piccola,

ma $P(A|B) \sim 1$ *!*

Variabili aleatorie. Distribuzione di Probabilità

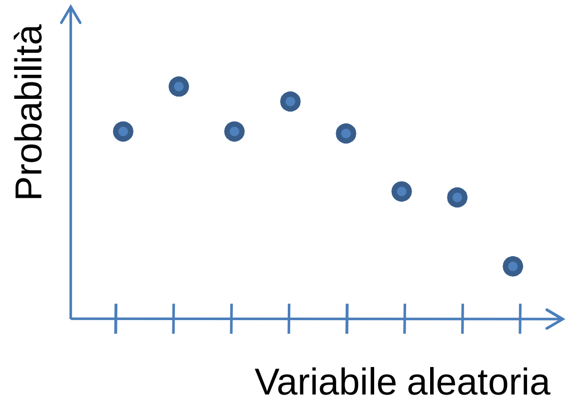
Variabili aleatorie : grandezze che, nel corso di una prova, possono assumere un valore sconosciuto a priori.

Si distinguono in:

discrete : se possono assumere solo un insieme di valori numerabile
es: il numero estratto da un urna del lotto

continue : se possono assumere un insieme di valori continuo
es: il punto in cui una freccetta colpisce un bersaglio

Distribuzione di probabilità :
<u>funzione</u> che associa a ciascun possibile valore assunto dalla variabile aleatoria la corrispondente probabilità.

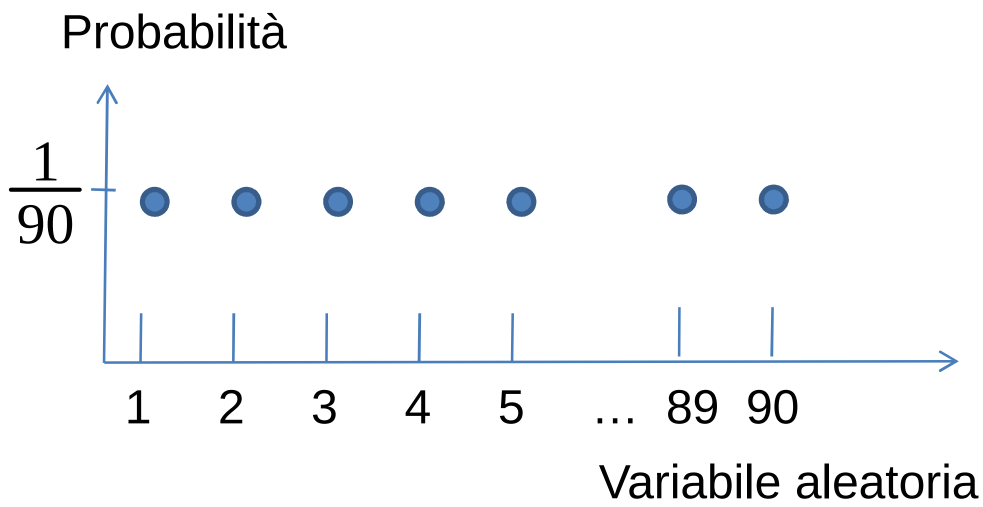


Esempio di distribuzione di probabilità discreta: gioco del lotto

variabile aleatoria x_i : numero estratto dall'urna
i possibili valori assunti sono i numeri interi compresi fra 1 e 90
la probabilità associata a ciascuno di essi è 1/90

distribuzione di probabilità $P(x_i)$: la funzione che associa a ciascun numero intero fra 1 e 90 la probabilità di 1/90:

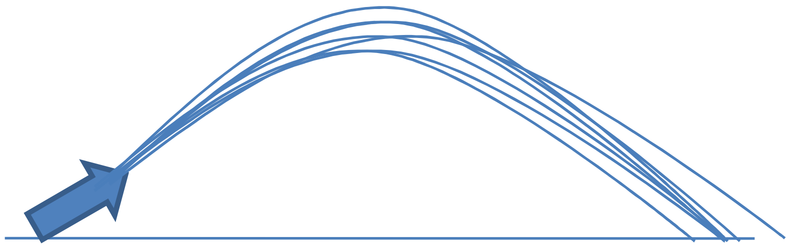
$$P(x_i) = 1/90 \quad \text{con } x_i = 1,\dots,90$$

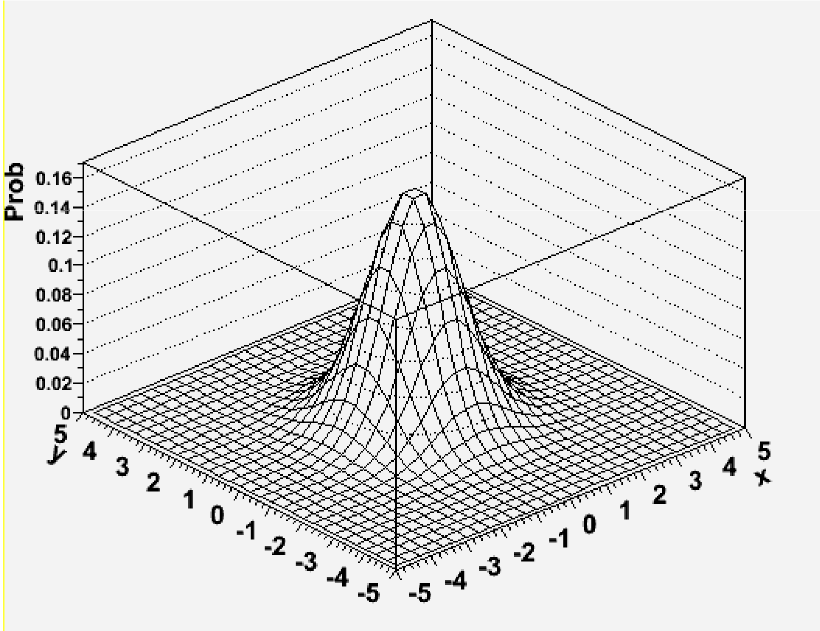


<u>Esempio di distribuzione di probabilità continua</u>: lancio di freccette su un bersaglio

<u>variabile aleatoria</u> (x,y) : le coordinate del punto in cui la freccetta colpisce il bersaglio

<u>distribuzione di probabilità</u> *P(x,y)* : una curva (bidimensionale) con probabilità più elevata nel centro del bersaglio e che decresce man mano che ci si allontana dal centro.





E' ragionevole pensare che la curva sia tanto più stretta quanto più buona è la mira di chi tira la freccetta.

Valore Atteso.

Valore atteso (o **speranza matematica**) di una variabile aleatoria : somma (o integrale) di tutti i possibili valori della variabile aleatoria moltiplicati per la loro probabilità.

Variabile aleatoria discreta (distribuzione di probabilità discreta):

$$\langle x \rangle = \Sigma_{i=1,N}\ x_i \cdot P(x_i)$$

Variabile aleatoria continua (distribuzione di probabilità continua):

$$\langle x \rangle = \int_{\text{tutti } gli\ x} x \cdot P(x) \cdot dx$$

Si dimostra che **il <u>valor medio</u> dei valori misurati di una variabile aleatoria in un numero molto grande di "esperimenti" <u>tende al valore atteso</u> della variabile aleatoria.**

Definizioni di probabilità

Finora abbiamo inteso la probabilità in maniera intuitiva.

Formalizziamo il concetto, associando a ogni evento x un numero P(x) tale che:

- **P(evento certo) = 1**
- **P(evento impossibile) = 0**
- Per ogni evento x: **$0 \le P(x) \le 1$**
- Se x_1 e x_2 sono due eventi **mutuamente escludentesi**

  $$P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)$$
- Se $\{x_i, i=1,N\}$ è un **gruppo completo di eventi mutuamente escludentesi**

  $$\Sigma_i P(x_i) = 1$$

Esistono diverse definizioni possibili di probabilità che soddisfano questi assiomi

Probabilità classica

La probabilità, P(x), di un evento x è il rapporto tra il numero M di casi "favorevoli" (cioè il manifestarsi di x) e il numero totale N di risultati ugualmente possibili e mutuamente escludentesi.

Detta anche **probabilità oggettiva** o **probabilità a priori**: stima della probabilità di un evento dalla simmetria del problema.

Esempio: lancio di un dado non truccato
la probabilità di avere un numero qualsiasi è 1/6:

$$P(x) = \frac{\text{Numero di volte in cui può uscire } x}{\text{Numero di risultati possibili}} \qquad \frac{1}{6}$$

Probabilità empirica

Definizione **sperimentale** di probabilità come **limite della frequenza** misurabile in una serie di esperimenti.

La probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero di prove.

Nota : rispetto alla definizione classica sostituiamo il rapporto

$$\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

con

$$\frac{\text{numero di esperimenti con esito favorevole}}{\text{numero complessivo di esperimenti effettuati}}$$

In pratica, se abbiamo un esperimento ripetuto N volte ed un certo risultato x che accade M volte, la probabilità di x è data dal limite della **frequenza** (M/N) quando N tende all'infinito

$$P(x) = \lim_{N \to \infty} M/N$$

Vantaggio: possiamo applicare la definizione anche a

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è uniforme

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è ricavabile a priori dalla simmetria dell'esperimento.

Note: la probabilità empirica

...non è una proprietà solo dell'esperimento ma..
dipende del particolare gruppo su cui viene calcolata.

Es: la probabilità di sopravvivenza ad una certa età, calcolata su diversi campioni di popolazione a cui una stessa persona appartiene (maschi, femmine, fumatori, non fumatori, deltaplanisti, ecc.), risulta diversa.

...**si può rigorosamente applicare soltanto agli esperimenti ripetibili** per i quali il limite per N che tende all'infinito ha senso.

Es: Il risultato di una partita di calcio, il tempo atmosferico di domani e molte altre situazioni della vita quotidiana **non** sono soggette all'uso di questa definizione di probabilità.

Necessità di "operatività“:
(quasi) tutti sono concordi nel definirla come
il valore della frequenza relativa di successo <u>su un numero di prove sufficientemente grande</u>

non necessariamente tendente all'infinito!!!!

Probabilità soggettiva

La probabilità di un evento x è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di x.

Definizione meno rigorosa, ma più spesso usata per formulare giudizi:

Es: “credo che domenica la mia squadra riuscirà a vincere”,
“è facile che mi capiti una domanda sulla probabilità all’esame di fisica”,

Nota:
Talvolta siamo forzati a assegnare un determinato grado di fiducia all’avverarsi di un evento.

Esempio:
il grado di fiducia che diamo al fatto che il gruppo su cui abbiamo calcolato la frequenza di un evento sia effettivamente rappresentativo del campione totale.

Teoremi sulla probabilità

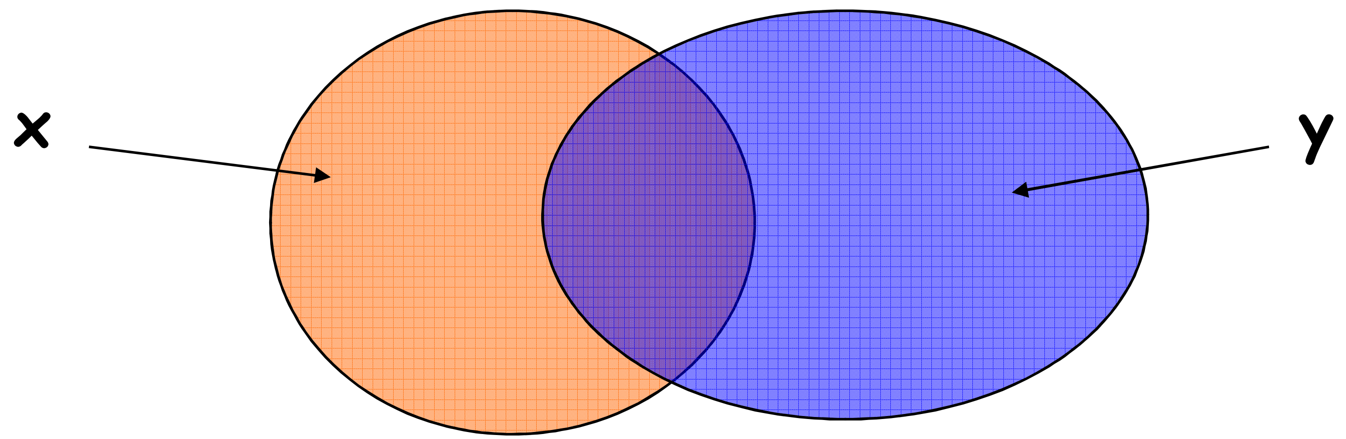
- Teorema della somma
- Teorema del prodotto
- Teorema della probabilità composta
- Teorema della probabilità totale
- Teorema di Bayes

Teorema della somma

Per due eventi qualsiasi x e y, non necessariamente mutuamente escludentesi, vale

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$$

(ovvero $P(x+y) = P(x) + P(y) - P(x \cdot y)$)

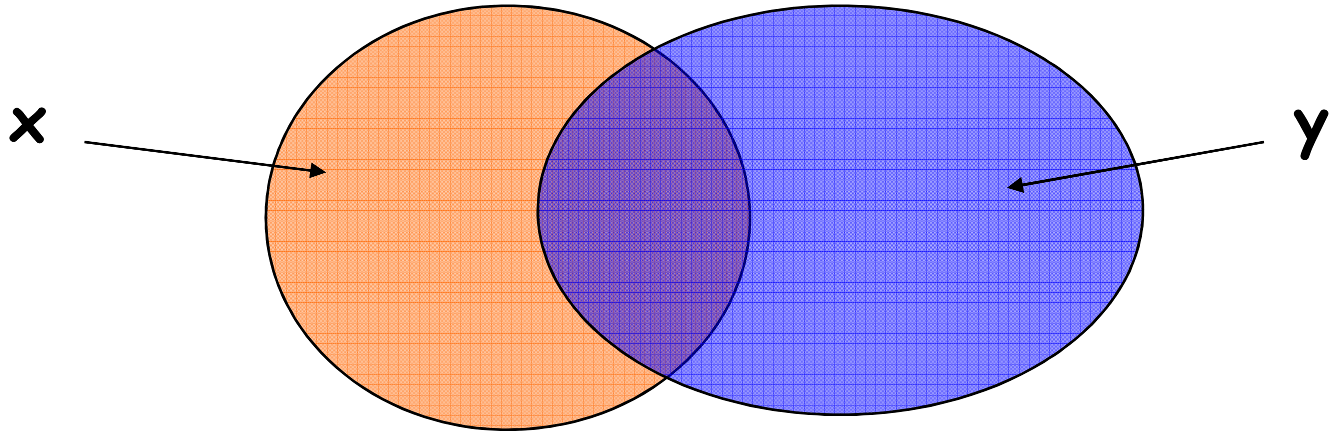


Teorema del prodotto

Per due eventi qualsiasi x e y, non necessariamente mutuamente escludentesi, vale

$$P(x \cap y) = P(x) + P(y) - P(x \cup y)$$

(ovvero $P(x \cdot y) = P(x) + P(y) - P(x+y)$)



Teorema della probabilità composta

Altro modo per esprimere il teorema del prodotto :

la probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro calcolata a condizione che il primo abbia luogo:

$$P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y|x)$$

Si noti che:

- se x e y sono mutuamente escludentesi $P(y|x)=0$ e $P(x \cap y) = 0$;
- se x e y sono indipendenti, $P(y|x) = P(y)$ e $P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y)$.

Esercizio su probabilità composta e probabilità condizionata

Gioco del lotto: 5 numeri fra 1 e 90 estratti casualmente da un'urna.

La probabilità che un numero N sia estratto è

$$P(N) = 5/90 = 1/18 = 0.055555... = 5.56\%$$

La probabilità che N non sia estratto è pertanto

$$P(\text{non } N) = 1 - P(N) = 0.944444\ldots = 94.44\%$$

Qual è la probabilità che N non venga mai estratto nel corso di 99 "estrazioni"?

Probabilità composta: l'evento "non N" deve apparire 99 volte:

$$P(99 \text{ volte non } N) = P(\text{non } N) \cdot P(\text{non } N) \cdot \ldots \cdot P(\text{non } N) \qquad \{99 \text{ volte}\}$$
$$= P(\text{non } N)^{99} = 0.94444^{99} = 0.003487 = 0.35\ \%$$

Qual è la probabilità che N non venga mai estratto nel corso di 100 "estrazioni"?

$$P(100 \text{ volte non } N) = P(\text{non } N) \cdot P(\text{non } N) \cdot \ldots \cdot P(\text{non } N) \qquad \{100 \text{ volte}\}$$
$$= P(\text{non } N)^{100} = 0.94444^{100} = 0.003293 = 0.33\ \%$$

Qual è la probabilità che N non venga estratto per 100 “estrazioni”, se già non è stato estratto per 99 “estrazioni”?

Nella centesima “estrazione” ci sono 90 numeri nell’urna INDIPENDENTEMENTE dalle estrazioni precedenti !

5 Sono estratti

P(non N nella estrazione n.100) = 85/90 = 94.44%

Ovvero la probabilità che nella centesima “estrazione” il numero N continui a non essere estratto, se non è mai stato estratto nelle 99 “estrazioni” precedenti (probabilità condizionale) è uguale a quella di non essere estratto in una sola “estrazione”:

P(non N alla estrazione n.100 | 99 volte non N) = P(non N) = 94.44%

Osservazione (ovvia…):
La probabilità che un numero venga estratto in un gioco casuale come il lotto, in cui le condizioni (urna e palline numerate) sono restaurate dopo ogni giocata, non dipende dal fatto che tale numero sia stato estratto o meno in una giornata precedente.

Teorema della probabilità totale

Dato un gruppo completo di N eventi mutuamente escludentesi $\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ (**insieme delle ipotesi**)

la probabilità di un evento x che può avvenire contemporaneamente a esse:

$$\mathbf{P(x) = \Sigma_{i=1,N}\, P(x|A_i) \cdot P(A_i)}$$

cioè

probabilità dell'evento x = la somma dei prodotti delle probabilità di ciascuna delle ipotesi per la probabilità condizionata dell'evento con tali ipotesi

Esempio di applicazione del teorema della probabilità totale

Estraggo una pallina da un'urna che contiene due palline. Un possibile insieme delle ipotesi è:

A_1 = Entrambe le palline nell'urna sono rosse;

A_2 = Entrambe le palline nell'urna non sono rosse;

A_3 = Una pallina è rossa e l'altra no.

Qual è la probabilità dell'evento **x** = "estrarre una pallina rossa"?

$$\mathbf{P(x|A_1) = 1}$$
$$\mathbf{P(x|A_2) = 0}$$
$$\mathbf{P(x|A_3) = 1/2 = 0.5}$$

$$\mathbf{P(x) = 1 \cdot P(A_1) + 0.5 \cdot P(A_3) = ?}$$

Ci manca un dato: le probabilità delle varie ipotesi a priori.

Se però estraggo una pallina rossa, so che almeno una pallina rossa c'era nell'urna, cioe' che $P(A_2)=0$!

In genere: dal risultato di un esperimento (l'osservazione dell'evento **x**) si cerca di capire la causa che l'ha generato (cioè con quale probabilità l'ipotesi A_i può essere considerata l'origine dell'evento osservato). Ci serve cioè il teorema di Bayes…

Teorema di Bayes

Osserviamo un evento x. Esiste un insieme delle ipotesi $\{A_i\}$. Come viene modificata la probabilità che assegniamo all'ipotesi A_i dopo l'osservazione x? (In altre parole: qual è la probabilità condizionata dell'ipotesi A_i data l'osservazione x?)

Per il teorema della moltiplicazione:

$$P(x \cdot A_i) = P(x) \cdot P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i)$$

$$\rightarrow \quad P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i) \,/\, P(x)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{P(A_i|x) = \frac{P(A_i) \cdot P(x|A_i)}{\Sigma_{i=1,N} P(A_i) \cdot P(x|A_i)}}$$

Continuiamo l’esempio dell’urna con due palline…

A priori non sappiamo se nell’urna ci sono palline rosse o di altri colori. Possiamo assegnare alle tre ipotesi la stessa probabilità a priori (a questo punto è una probabilità soggettiva!):

$$\mathbf{P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3}$$

Come viene modificata la probabilità che assegniamo a ciascuna ipotesi dopo l’osservazione dell’evento x (estrazione di una pallina rossa)?

$$P(A_1) \cdot P(x|A_1) + P(A_2) \cdot P(x|A_2) + P(A_3) \cdot P(x|A_3) =$$
$$1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0.5 = 0.5$$

e

$$\mathbf{P(A_1|x) = 1/3 \cdot 1 / 0.5 = 2/3 = 66.7\ \%}$$
$$\mathbf{P(A_2|x) = 1/3 \cdot 0 / 0.5 = 0}$$
$$\mathbf{P(A_3|x) = 1/3 \cdot 0.5 / 0.5 = 1/3 = 33.3\ \%}$$

Partendo da una conoscenza limitata (in questo caso, uno stima soggettiva della probabilità delle varie ipotesi) l’osservazione dell’evento x ci ha permesso di modificare, migliorandola, la conoscenza delle ipotesi.

Cosa succede però alle nostre conclusioni se utilizziamo delle ipotesi differenti?

Provare a calcolare, ad esempio, qual è la probabilità che nell'urna ci siano due palline rosse in caso di osservazione dell'evento x="estrazione di una pallina rosse" e se l'insieme delle ipotesi è il seguente

A_1 = nell'urna ci sono due palline rosse
A_2 = nell'urna ci sono due palline gialle
A_3 = nell'urna ci sono due palline blu
A_4 = nell'urna ci sono una pallina rossa e una gialla
A_5 = nell'urna ci sono una pallina rossa e una blu
A_6 = nell'urna ci sono una pallina gialla e una blu

e a ciascuna di esse associamo la stessa probabilità a priori, 1/6.

Soluzione:

$$P(A_1) \cdot P(x|A_1) + P(A_2) \cdot P(x|A_2) + P(A_3) \cdot P(x|A_3) + P(A_1) \cdot P(x|A_1) + P(A_2) \cdot P(x|A_2) + P(A_3) \cdot P(x|A_3) =$$

$$1/6 \cdot 1 + 1/6 \cdot 0 + 1/6 \cdot 0 + 1/6 \cdot 0.5 + 1/6 \cdot 0.5 + 1/6 \cdot 0 = 1/3$$

e

$$\mathbf{P(A_1|x) = 1/6 \cdot 1 / 1/3 = 1/2 = 50\ \%}$$

Osservazione: il teorema di Bayes è un teorema matematico rigoroso che ci permette di ricavare conclusioni sulla probabilità di determinati eventi (vedi esercizio successivo, in cui calcoleremo la probabilità che una persona positiva a un test clinico sia effettivamente malata).

Può essere usato per migliorare la conoscenza che si ha su determinate ipotesi, come nell'esempio precedente delle due palline nell'urna. Il risultato di un esperimento modifica la stima che abbiamo sulla probabilità delle ipotesi, aiutandoci a scegliere quella più probabile.

Partendo da priori diversi si può arrivare a conclusioni diverse (la scelta dei priori deve essere oculata, anche se soggettiva). In ogni caso, l'utilizzo del risultato di un esperimento con il teorema di Bayes migliora la conoscenza che abbiamo delle ipotesi. L'applicazione ripetuta del teorema di Bayes (tanti esperimenti) converge verso una "stima oggettiva" della probabilità delle ipotesi, indipendente dalla scelta iniziale dei priori.

Altro esempio: valuto la risposta di soggetti malati ad un gruppo di farmaci, per cercare di capire qual'è il meccanismo che ha causato la malattia e che deve essere inibito per curarla.

Esercizio: screening con falsi positivi

Per facilitare un’identificazione precoce dei tumori colon-rettali, le persone al di sopra di una certa età sono incoraggiate a sottoporsi a uno screening consistente nella ricerca di sangue occulto nelle feci, anche se non presentano sintomi specifici.

Per la popolazione al di sopra dei 55 anni di età valgono le seguenti informazioni (valori approssimati a scopo didattico):

- la probabilità di essere malati è dello 0.3%;
- in caso di malattia, la probabilità di risultare positivi al test (sensibilità del test) è del 50%;
- se non si è malati, la probabilità di risultare positivi al test (falsi positivi) è comunque del 3%.

Supponiamo che una persona sottoposta a screening risulti positiva al test: qual’è la probabilità che sia malata?

Soluzione

Probabilità di essere malati: **$P(M) = 0.3\% = 0.003$**

Probabilità di essere sani: **$P(S) = 1 - 0.3\% = 99.7\% = 0.997$**

Probabilità di avere il test positivo se malati (prob. condizionata):

$P(+ \mid M) = 50\% = 0.50$

Probabilità di avere il test positivo se sani (prob. condizionata):

$P(+ \mid S) = 3\% = 0.30$

Per il teorema di Bayes:

$$
\begin{aligned}
P(M|+) &= P(+ \mid M) \cdot P(M) \;/\; [\, P(+ \mid M) \cdot P(M) + P(+ \mid S) \cdot P(S) \,] \\
&= 0.50 \cdot 0.003 \,/\, [\, 0.50 \cdot 0.003 + 0.03 \cdot 0.997 \,] \\
&= 0.0478 = 4.8\%
\end{aligned}
$$

Cioè la frazione di persone effettivamente malate fra quelle che risultano positive al test eseguito su un campione casuale (screening) è del 4.8%: ulteriori accertamenti sono necessari per diagnosticare con certezza la malattia!

E' chiaro che se l'analisi è eseguita su un campione ***non*** *casuale, ad esempio su soggetti che presentano qualche tipo di sintomo, o per i quali ci sia ereditarietà, le probabilità a priori sono differenti, e di conseguenza sono differenti le conclusioni sulla probabilità di essere malati data la positività al test.*

A qualcuno potrebbe risultare più semplice pensare in termini di frequenza (numero di casi possibili) invece che in termini di probabilità. Il procedimento non è concettualmente diverso.

Supponiamo un campione di 1000 persone che si sottopone al test. Di esse:

Numero medio di malati: **$N(M) = 1000 \cdot P(M) = 1000 \cdot 0.003 = 3$**
Numero medio di sani: **$N(S) = 1000 - 3 = 997$**
Numero di individui malati che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+ \mid M) = N(M) \cdot P(+|N) = 3 \cdot 0.50 = 1.5$$

Numero di individui sani che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+ \mid S) = N(S) \cdot P(+|S) = 997 \cdot 0.03 = 29.9$$

Pertanto, 1.5+29.9=31.4 persone su 1000 risulteranno, in media, positive al test. La frazione di queste che è effettivamente malata è:

$$N(+|N) \,/\, [\, N(+|N) + N[+|S) \,] = 1.5/31.4 = 0.0478 = 4.8\%$$

Cioè la **frazione** di persone effettivamente malate fra quelle che risultano positive al test in oggetto è del 4.8%

Esercizio

Uno schermo circonda completamente una sorgente radioattiva di fotoni, a parte una apertura circolare di $2r = 0.5$ cm di diametro posta a $R=10$ cm di distanza dalla sorgente.

Dietro all'apertura è posizionato un rivelatore che ha il 25% di efficienza per i fotoni emessi da quella sorgente (l'efficienza è la probabilità che un fotone che colpisce il rivelatore sia effettivamente registrato e rivelato).

Qual'è la probabilità che un fotone emesso dalla sorgente sia visto dal rivelatore posto dietro all'apertura?

Supponendo che la sorgente emetta $2.0 \cdot 10^3$ fotoni al secondo, su tutto l'angolo solido, qual è il numero più probabile di fotoni rivelati in un minuto di acquisizione?

Soluzione

L'area del foro è

$$\mathbf{s} \;=\; \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{r}^{\mathbf{2}} \;=\; 3.14159 \cdot (0.5 / 2)^2 \text{ cm}^2 \;=\; 0.1966 \text{ cm}^2$$

L'area della superficie circolare alla distanza a cui e' posto il foro è

$$\mathbf{S} \;=\; \mathbf{4}\,\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{R}^{\mathbf{2}} \;=\; 4 \cdot 3.14159 \cdot (10)^2 \text{ cm}^2 = 1256.6 \text{ cm}^2$$

La probabilità che un fotone emesso dalla sorgente centri il foro è

$$\mathbf{P}_{\mathbf{geom}} = \mathbf{s / S} = 0.1966 \,(\text{cm}^2) / 1256.6 \,(\text{cm}^2) = 0.156 \cdot 10^{-3}$$

La probabilità che un fotone emesso dalla sorgente centri il foro e sia rivelato è

$$\mathbf{P} \;=\; \mathbf{P}_{\mathbf{geom}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{efficenza}} \;=\; \mathbf{0.156 \cdot 10^{-3} \cdot 0.25} \;=\; \mathbf{3.9 \cdot 10^{-5}}$$

(probabilità composta di due eventi indipendenti: centrare il buco e essere registrato dal rivelatore)

In un minuto la sorgente emette (isotropicamente su tutto l'angolo solido)

$$\mathbf{N} \;=\; 2.0 \cdot 10^3 \,(\text{fotoni / s}) \cdot 60 \,(\text{s}) \;=\; 1.20 \cdot 10^5 \;\; \text{fotoni}$$

Siccome ciascuno di questi fotoni ha probabilità **P** di essere rivelato, il numero medio di fotoni rivelati dopo un minuto di acquisizione è

$$\mathbf{< N_{riv} >} \;=\; \mathbf{N \cdot P} \;=\; 4.7 \quad \text{fotoni}$$

Il numero più probabile di fotoni (da pensare come il numero su cui si dovrebbe scommettere volendo avere la più alta probabilità di vittoria) è il numero intero più vicino al valor medio:

$$\mathbf{N_{riv}\ (più\ probabile)} \;=\; \mathbf{5\ fotoni}$$

Esercizio

Un bambino lancia sassi contro una parete forata senza prendere la mira, i fori sulla parete sono disposti a caso (per semplicità si assuma che la grandezza dei sassi sia piccola rispetto alla dimensione dei fori). Se

A = Area parete
k = numero di fori
a = area di ciascun foro

Calcolare la probabilità q che un sasso rimbalzi.

Soluzione:
Simmetria del problema → ogni cm2 ha la stessa probabilità di essere colpito → probabilità p di passare dall'altra parte è data dall'area favorevole (dei fori) diviso l'area totale:

$$p = ka / A$$

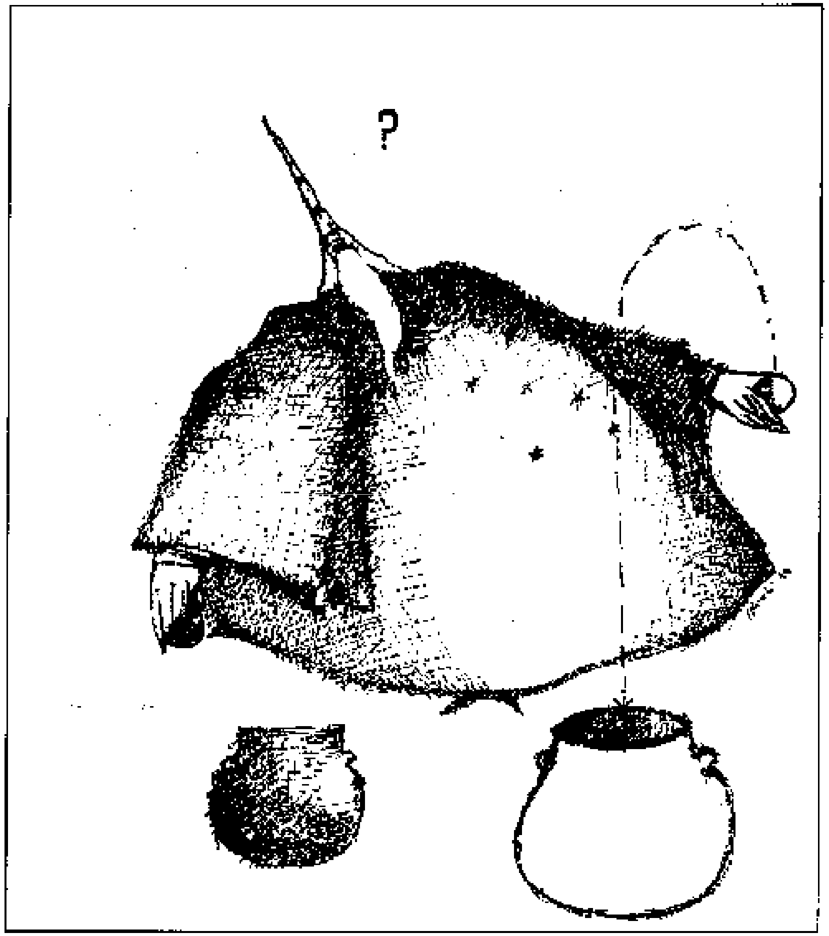
quindi $q = 1 - p = 1 - ka / A = (A - kA) / A$

Esercizio: problema dell'astrologo

Un astrologo dopo aver sbagliato una profezia viene multato a pagare una multa molto salata.

Gli viene offerta la possibilità di condono: riceve 4 palline (due bianche e due nere), che può disporre come vuole in 2 urne; se in una successiva estrazione esce una pallina bianca la multa è condonata, se esce nera no.

Qual è la disposizione più favorevole all'astrologo?



Qual è la disposizione più favorevole all'astrologo?