Esperienza del viscosimetro a caduta

Parte del corso di fisica per CTF

dr. Gabriele Sirri
sirri@bo.infn.it

http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/farmacia/all/navarria/stuff/homepage.htm

Esperienza del viscosimetro a caduta

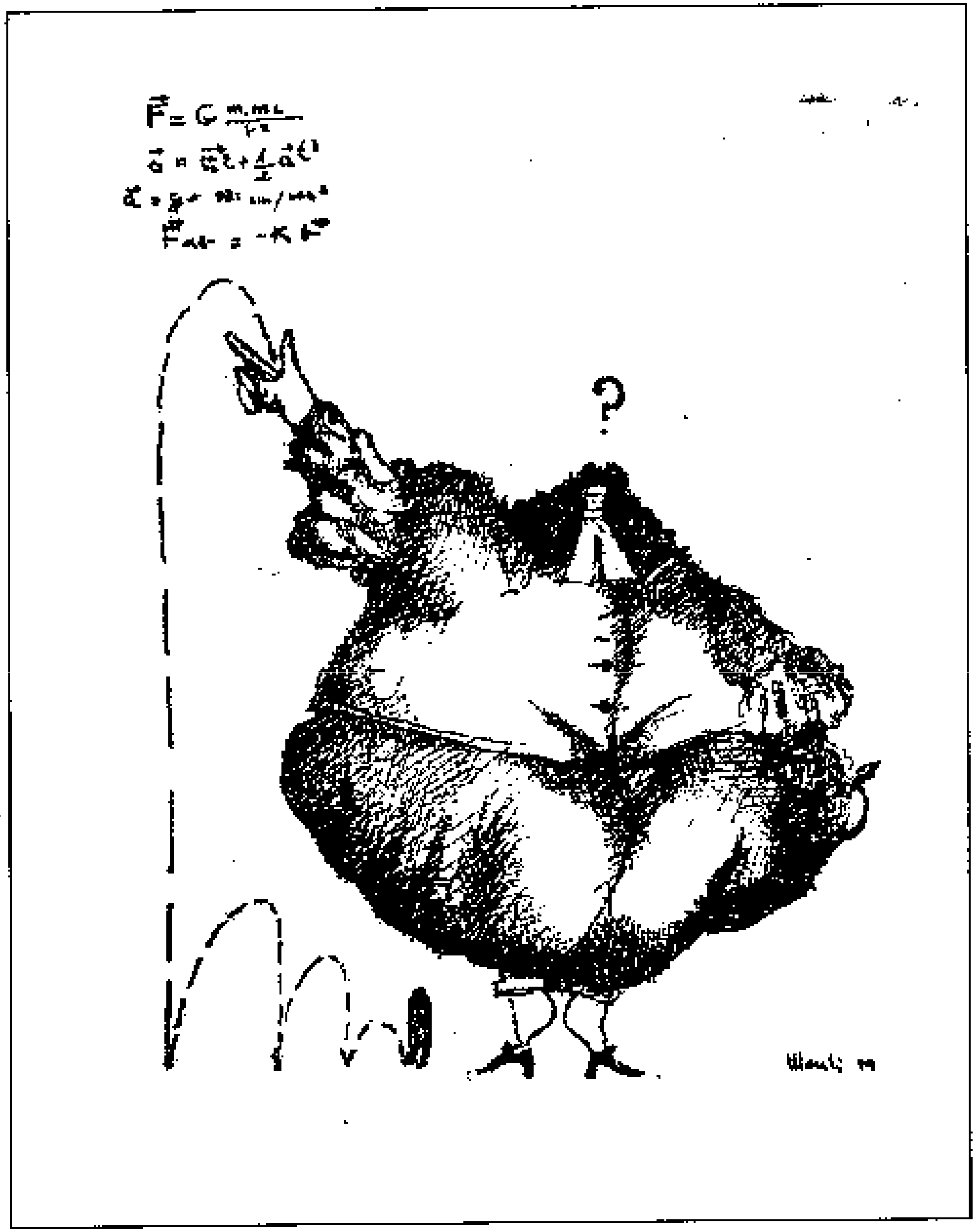
10/3/08 - Elementi di Probabilità

11/3/08 - Misura di grandezze fisiche / Analisi degli Errori

17/4/08 - Il viscosimetro a caduta di sfere

14/5/08 - Prova sperimentale in Laboratorio

22/5/08 - Relazione conclusiva



Un lancio di moneta <u>potrebbe</u> essere seguito
in modo deterministico usando le equazioni di Newton ...

Misura di Grandezze Fisiche

Analisi degli Errori

Misure di grandezze fisiche

La misura di una grandezza fisica è descrivibile tramite tre elementi:

• **valore più probabile**;

• **incertezza** (o "**errore**") ossia la precisione con cui il valore più probabile approssima il valore vero;

• **unità di misura**.

Solo scrivendo **valore più probabile, errore, e unità di misura** forniamo una descrizione sufficientemente completa e accurata della grandezza misurata.

L'errore sulla misura determina il **numero di cifre significative** con cui riportare il valore più probabile.

Non ha senso scrivere la quarta cifra significativa se già c'è una indeterminazione sulla terza cifra!

Misure dirette e misure indirette

Misura diretta quando si confronta direttamente la grandezza misurata con un campione di misura nota.

Esempio: misura di lunghezza con un regolo graduato.

Misura indiretta se ciò che si misura non è la grandezza che interessa, ma altre che siano legate a essa da relazioni funzionali.

Esempio: misura della *distanza* di un oggetto con un sonar.

ovvero

misura del *tempo* percorso dall'onda sonora per andare e tornare dall'oggetto; conoscendo la velocità di propagazione dell'onda posso ricavare la distanza dell'oggetto che l'ha riflessa.

Misure e errori di misura (incertezze)

La **misura** è la stima del **valore vero** di una **grandezza**.

Limiti alla precisione di questa stima:

- **Sensibilità dello strumento di misura**
  l'ultima cifra che può essere letta
  oppure
  la frazione di divisione che può essere apprezzata;

- **Fluttuazioni casuali del valore misurato**

- Possibilità di **errori** nella **procedura** e/o nello **strumento** (errori sistematici: i più difficili da trattare).

$$X_{mis} = X_{vero} + \varepsilon$$

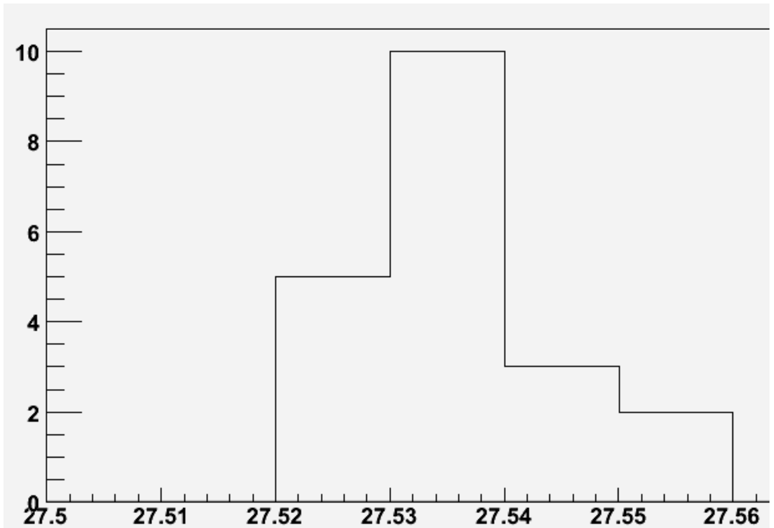
Istogramma di frequenza

Il risultato della misura di una grandezza fisica è una *variabile aleatoria*.

Possiamo **ripetere la misura** molte volte per studiare le variazioni del risultato (se ce ne sono) dovute agli errori (cioè ottenere la *distribuzione di probabilità* della variabile aleatoria).

Queste distribuzioni possono essere riassunte in Tabelle o in Istogrammi o ulteriormente condensate in un numero minore di parametri.

n.prova	risultato
0	27.525
1	27.531
2	27.539
3	27.529
4	….



Se la **sensibilità dello strumento** è **maggiore delle fluttuazioni** derivanti dalla procedura di misurazione, <u>misure ripetute</u> daranno lo stesso valore numerico di $\mathbf{X}_{\mathbf{mis}}$.

➔ L'incertezza su $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ è data dalla sensibilità dello strumento.

Esempio, misura di lunghezza con un metro con sensibilità 1 mm:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{vero}} = \mathbf{27.537609076 \ldots \ cm}$$
$$\mathbf{X}_{\mathbf{mis}} = \mathbf{27.5\ cm}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.1\ cm}$$

$$\mathbf{X = (27.5 \pm 0.1\ )\ cm}$$

In realtà, con un occhio allenato potremmo accorgerci che X_{vero} si trova fra 27.5 e 27.6 cm, e usare la **mezza tacca** come incertezza:

$$\mathbf{X = (27.55 \pm 0.05)\ cm}$$

L’incertezza sul risultato della misura (o **errore sulla misura**) può essere espresso come:

• **errore assoluto** indicato con la stessa unità di misura del valore misurato;

• **errore relativo** indicato come frazione del valore misurato.

L’errore relativo viene spesso espresso in percentuale (%) del valore misurato: la percentuale non è altro che un’altra maniera di indicare una frazione.

Esempio:

$X = (27.5 \pm 0.1)$ cm

Errore assoluto $\rightarrow$ 0.1 cm

Errore relativo $\rightarrow$ $0.1 / 27.5 = 1/275 \sim 0.0036 = 0.36\ \%$

Se le **fluttuazioni** sono **più grandi della sensibilità dello strumento**, misure ripetute daranno risultati diversi.

Se le fluttuazioni sono **casuali**, i vari valori di $\mathbf{X}_{\mathbf{mis}}$ si distribuiranno **casualmente** (cioè a volte prima e a volte dopo) attorno a $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$.

$$X^{i}_{mis} = X_{vero} + \varepsilon^{i}$$

Se si compie un numero molto grande di misure ("**al limite di un numero infinito di operazioni di misura**") le fluttuazioni tenderanno a compensarsi, e **il valor medio delle misure tenderà al valore vero**:

$$< \varepsilon^{i} > \quad \rightarrow \quad 0$$

$$< X^{i}_{mis} > \quad \rightarrow \quad X_{vero}$$

Purtroppo non possiamo fare infinite misure…

dobbiamo **stimare** $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ e la precisione con cui lo conosciamo da un numero finito di misure.

La stima migliore di $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ è la **media su N misure**:

$$X_{medio} = 1/N \cdot \Sigma_{i=1,N} \left(X^{i}_{mis} \right)$$

e, di conseguenza, $\mathbf{X}_{\mathbf{medio}}$ è una approssimazione di $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$, a meno di un incertezza.

$$X_{vero} = X_{medio} \pm \Delta X$$

$\Delta\mathbf{X}$ è l'incertezza con cui conosciamo $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ data la stima migliore della misura $\mathbf{X}_{\mathbf{medio}}$

Valutiamo l'entità dell'errore $\Delta\mathbf{X}$ …

Proviamo a usare il *valor medio degli scarti* $< X^{i}_{mis} - X_{medio} >$?
Purtroppo è sempre uguale a 0 per definizione di media.
→ non possiamo utilizzarlo per stimare la precisione della misura.

Chiamiamo **varianza** il *valor medio del quadrato degli scarti* (scarti = differenze delle singole misure dal valor vero):

$$\sigma_{vero}^{2} = 1/N \cdot \Sigma_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{vero})^{2}$$

La **stima della varianza** si ottiene sostituendo a $\mathbf{X}_{vero}$ la sua stima $\mathbf{X}_{medio}$ e dividendo per N-1, anzichè per N (*):

$$\sigma^{2} = 1/(N-1) \cdot \Sigma_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{medio})^{2}$$

(Scarto quadratico medio)

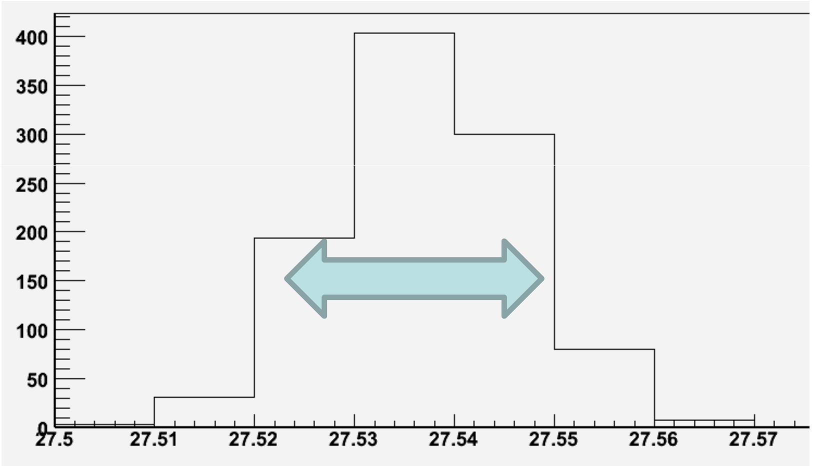
(*) N-1 anziché N perchè uno dei gradi di libertà è stato usato per calcolare $\mathbf{X}_{medio}$

Infine …

consideriamo la radice quadrata dello scarto quadratico medio (**deviazione standard**):

$$\Delta X = \sigma = \sqrt{1/(N-1) \cdot \Sigma_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{medio})^2}$$

La deviazione standard è un indicatore della larghezza della distribuzione delle misure.



Se abbiamo delle misure distribuite in maniera casuale e centrate attorno al loro valor medio, *la deviazione standard è la stima migliore dell'errore con cui si può conoscere il valore vero della grandezza misurata partendo **da una singola misura .***

la deviazione standard è l'incertezza statistica con cui si distribuisce la singola misura attorno al valor vero.

Supponiamo di fare **tante <u>serie</u> di misure**....

Ognuna di queste serie è caratterizzata da un suo valor medio.

I valori medi sono più vicini al valore "vero" rispetto alle singole misure; avranno perciò una distribuzione *più stretta* di quella delle singole misure.

Si **dimostra** che **<u>l'errore da associare al valor medio di tutte le misure</u>** è:

$$\Delta X_{medio} = \sigma/\sqrt{N} = 1/\sqrt{N \cdot (N-1)} \cdot \sqrt{\Sigma_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{medio})^2}$$

(cioè la deviazione standard divisa per la radice di N)

Osservazioni:

• All’aumentare del numero delle misure la varianza (e pertanto anche la deviazione standard) tende ad un valore costante.

Invece, **l’errore sulla media diminuisce come l’inverso della radice quadrata del numero di misure**.

• Un insieme di tante misure (distribuzione di misure) è stato riassunto da due soli valori: **la media e la deviazione standard** (oppure l’errore sulla media, che non è altro che la deviazione standard divisa per la radice quadrata del numero delle misure).

Abbiamo perso il dettaglio (le singole misure), ma abbiamo estratto proprio e solo le quantità che servono ai nostri scopi.

Descrizioni sempre più accurate della distribuzione di partenza si potranno ottenere introducendo ulteriori parametri (es: asimmetrie, etc.).

Misure di Grandezze Fisiche: Riassunto

Una grandezza fisica ha un suo **“valore vero”**, che noi cerchiamo di **stimare** attraverso un’operazione di misura.

Fare una misura vuol dire descrivere una grandezza fisica per mezzo di tre elementi:

- **valore più probabile**;
- **precisione** (altrimenti detta “**errore**” sulla misura);
- **unità di misura**

Le misure possono essere **dirette** o **indirette**.

La precisione della misura può essere determinata da:

- **sensibilità** dello strumento di misura;
- **fluttuazioni casuali** fra un’operazione di misura e l’altra
- **errori** nella procedura e/o nello strumento (**errori sistematici**)

L’errore su una misura può essere indicato come **errore assoluto**, oppure **errore relativo** (cioè come frazione del valore misurato)

La grandezza da misurare ha un suo valore atteso $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$

Nel caso di misure con fluttuazioni casuali da un'operazione di misura all'altra, la stima migliore di $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ è la **media su N misure**:

$$X_{medio} = 1/N \cdot \sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis})$$

L'errore da associare alla singola misura è la **stima della deviazione standard**:

$$\Delta X = \sigma / \sqrt{N} = 1/\sqrt{N \cdot (N-1)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{medio})^2}$$

Mentre **l'errore da associare al valor medio** è:

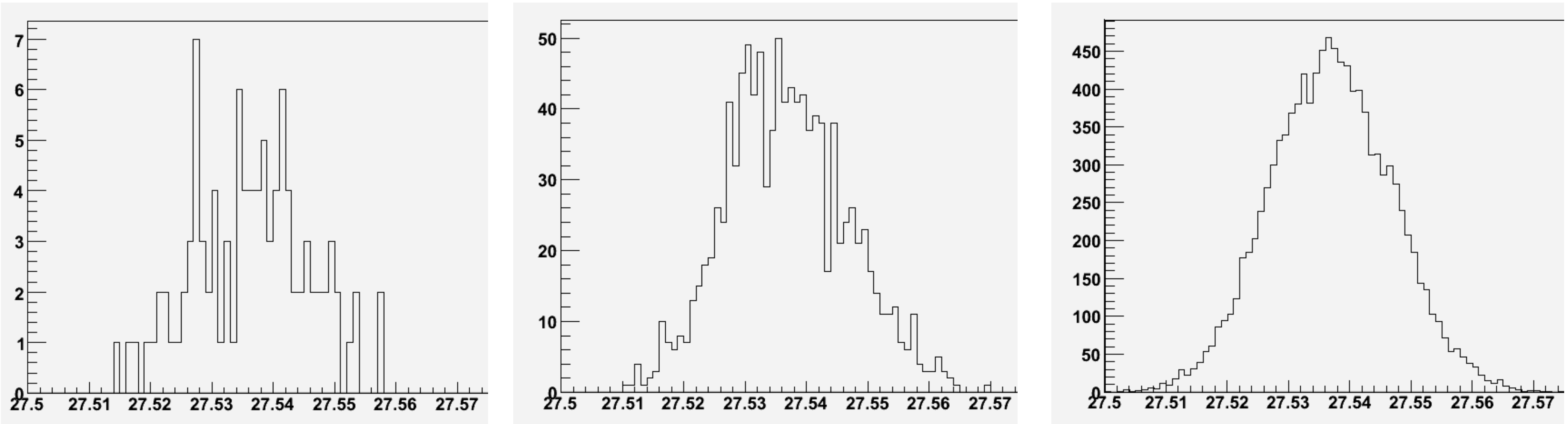
$$\Delta X_{medio} = \sigma / \sqrt{N} = 1/\sqrt{N \cdot (N-1)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{medio})^2}$$

(cioè la deviazione standard divisa per la radice di N)

Verso una interpretazione probabilistica

Qual è la probabilità che il valore vero si trovi all'interno dell'intervallo **valore più probabile ± errore ?**

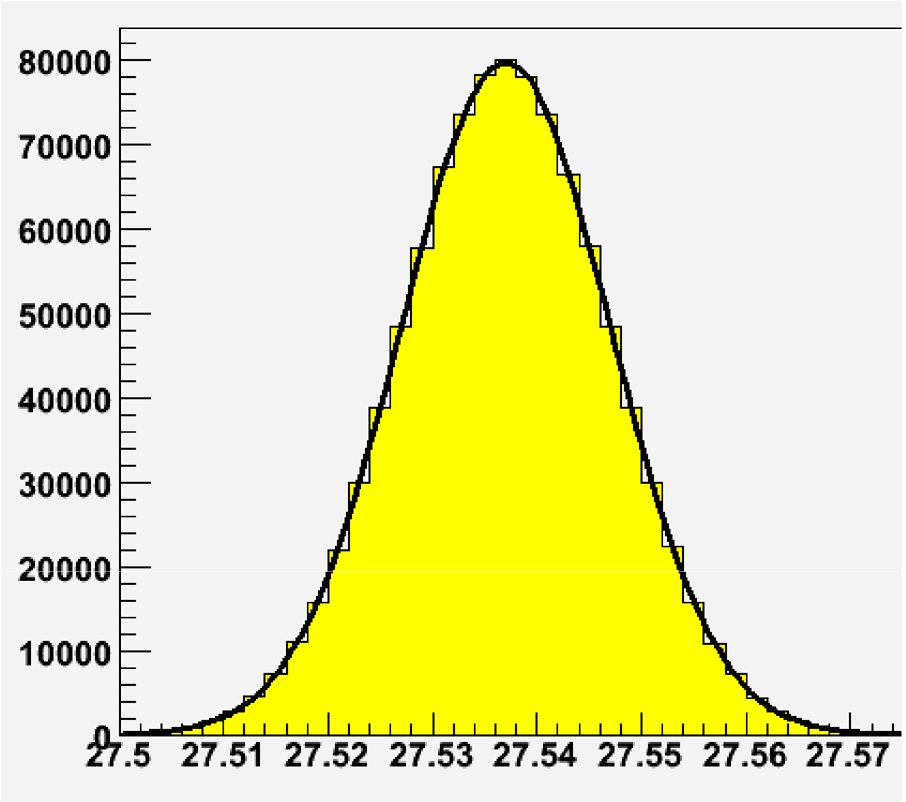
<u>Osservazione</u>:
se i risultati delle misure sono **casuali** e **indipendenti fra loro**, l'**istogramma di frequenza** tende ad assumere una distribuzione simmetrica a campana...



100 misure | 1000 misure | 10000 misure

…centrata sul valor medio e con larghezza dell'ordine della deviazione standard.

Distribuzione normale degli errori

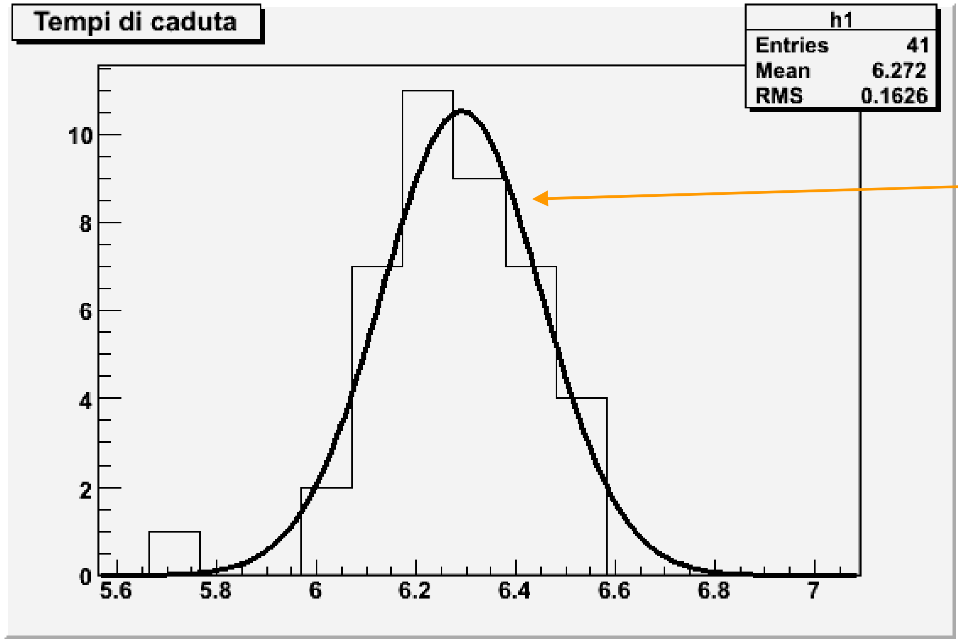


$$f(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La **distribuzione limite** a cui tende la **distribuzione di frequenze** di una serie di misure con errori casuali e indipendenti è la **distribuzione normale** (o **funzione di Gauss** o **gaussiana**) con

μ = valor medio della distribuzione

σ = la sua deviazione standard



$$f(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con

N = 41 ; μ = 6.29 ; σ = 0.161

Riformuliamo in maniera matematicamente (un po' …) più corretta.

<u>Teorema del limite centrale</u>

La distribuzione della somma di un numero elevato di variabili casuali indipendenti tende a distribuirsi normalmente, cioè tende a distribuirsi secondo una **distribuzione di Gauss** (o **distribuzione normale**) avente come parametro **μ** la somma dei valori medi delle misure e come parametro **σ^2** la somma delle varianze delle misure.

Interpretazione probabilistica

Dalle proprietà della funzione di Gauss, sappiamo che

una nuova misura avrà una probabilità:

- **del 68.3% di stare a 1 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 95.4% di stare a 2 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 98.8% di stare a 2.5 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 99.7% di stare a 3 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **…**

Analogamente:

Il valor medio di una serie di misure avrà una probabilità:

- **del 68.3% di stare a 1 $\sigma / \sqrt{N}$ dal valor vero;**
- **del 95.4% di stare a 2 $\sigma / \sqrt{N}$ dal valor vero;**

etc..

Esempi

(Tratti da misure fatte con il viscosimetro a caduta nel laboratorio dell'anno scorso)

Proviamo a verificare alcuni tipi di distribuzione di misure e a valutarne gli errori associati:

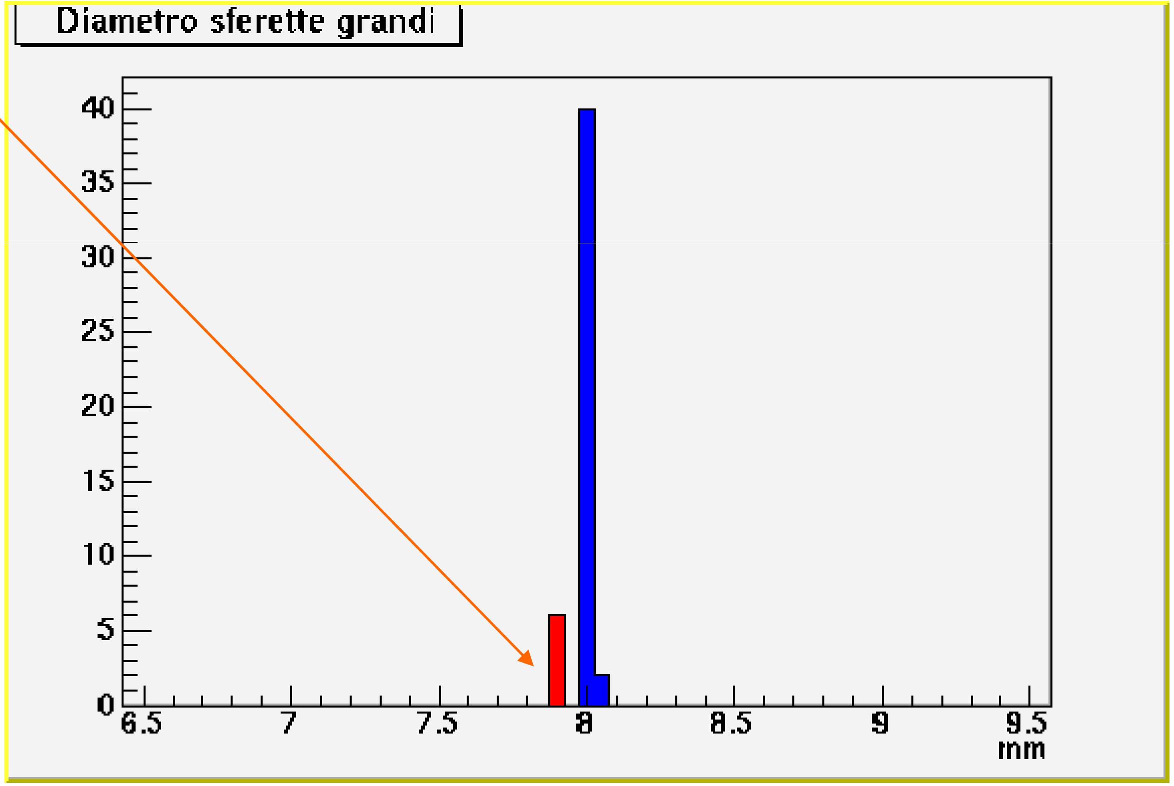
- **Misura del diametro di una sferetta di acciaio**
  - Riproducibilità della misura: che errore associamo?

- **Misura del tempo di caduta della sferetta nel fluido**
  - Istogramma di frequenza
  - Distribuzione dei valori misurati
  - Valor medio e deviazione standard della misura
  - Errore sul valor medio
  - Approssimazione dell'istogramma di frequenza con una curva di Gauss

Istogrammi di frequenza e distribuzione limite

Diametro della sferetta d'acciaio

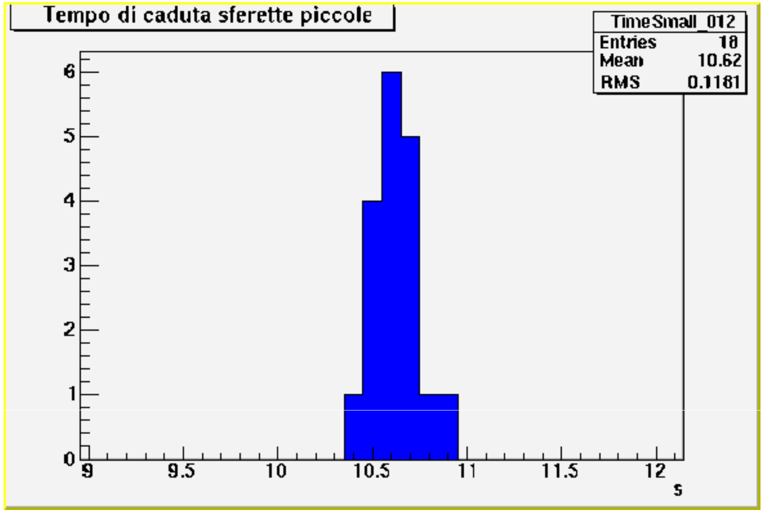
Tutte le misure in rosso provengono dallo stesso gruppo: probabile errore sistematico.
Vista la sostanziale costanza di tutte le altre misure, posso affermare che la variazione statistica è più piccola della sensibilità del calibro: utilizziamo pertanto la sensibilità del calibro come stima della precisione della misura.



D = (8.00 ± 0.05) mm

Istogrammi di frequenza e distribuzione limite

Tempo di caduta



$<t> = 10.62$ s

$\sigma = 0.12$ s

$\Delta(<t>) = \sigma/\sqrt{N} = 0.027$ s

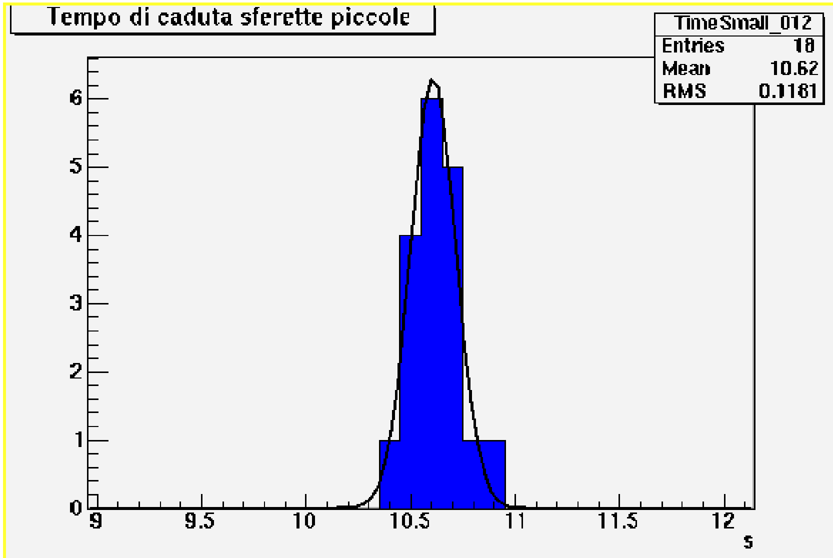
t = (10.62 ± 0.03) s

Si può agevolmente adattare una curva gaussiana alla distribuzione dei tempi misurati rappresentata nell'istogramma di frequenza.

La curva che meglio si adatta ai dati ha come parametri

μ = (10.61 ± 0.03) s

σ = (0.11 ± 0.02) s



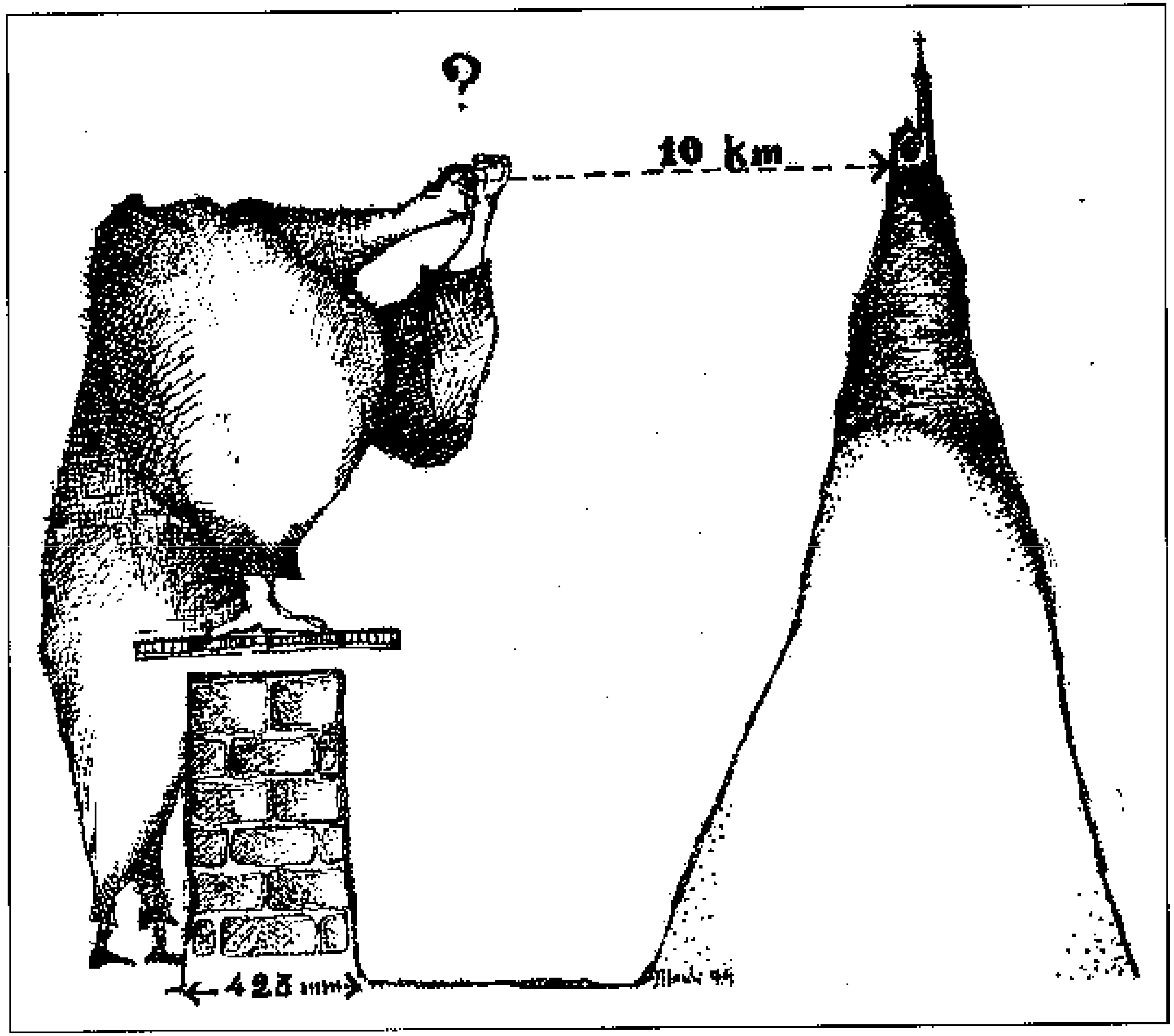
Propagazione degli errori

Misure dirette:
l’errore sulla misura si ricava dalla sensibilità dello strumento oppure dall’errore sulla media di più misure ripetute.

Misure indirette, il valore che ci interessa è dato da una combinazione di altre misure (secondo una **relazione matematica**).

come posso determinare **quale errore associare** ?

Bisogna sapere come propagare gli errori.

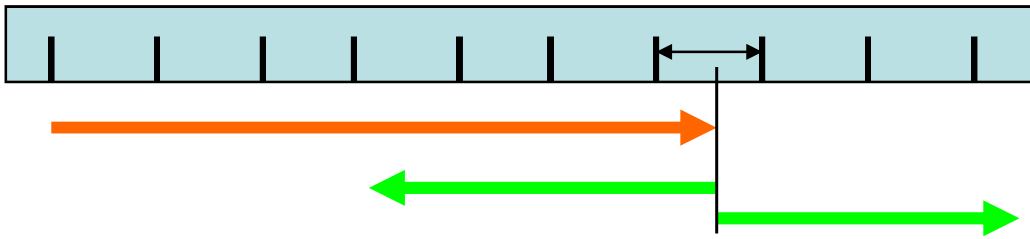


.. (10 ± 1) km + (423 ± 1) mm = (10.000423 ± 1) km:

... le cifre successive a quella su cui cade l'errore non hanno alcun significato!

Propagazione degli errori
Somma o differenza di due grandezze

L'incertezza **assoluta** sulla somma o sulla differenza di due grandezze ($X = A \pm B$) è uguale.



Singola misura: $$X_i = A_i \pm B_i$$

Valor medio: $$\langle X_i \rangle = \langle A_i \rangle \pm \langle B_i \rangle$$

Varianza: $$\langle (X_i - X)^2 \rangle = \langle (A_i - A)^2 \rangle + \langle (B_i - B)^2 \rangle$$

Errore: $$\Delta X = \sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}$$

<u>Nella somma o differenza di due grandezze si sommano (in quadratura) gli errori assoluti</u>.

Propagazione degli errori
Prodotto di una costante per una grandezza

$$X = \mathbf{k} \cdot A$$

Singola misura: $X_i = \mathbf{k} \cdot A_i$

Valor medio: $< X_i > = \mathbf{k} \cdot < A_i >$

Varianza: $< (X - X_i)^2 > = \mathbf{k^2} \cdot < (A - A_i)^2 >$

Errore: $\Delta X = \mathbf{k} \cdot \Delta A$

L'ultima relazione può anche essere scritta come errore relativo, invece che assoluto:

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta A}{A}$$

Propagazione degli errori
Prodotto (o rapporto) di due grandezze

$$X = A \cdot B$$

Singola misura: $X_i = A_i \cdot B_i$

Valor medio: $< X_i > = < A_i > \cdot < B_i >$

Errore: $\dfrac{\Delta X}{X} = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta B}{B}\right)^2}$

Nel caso di un rapporto,

$$X = A / B = A \cdot B^{-1}$$

siccome $(\Delta B^{-1} / B^{-1}) = (\Delta B / B)$, vale sempre la regola per cui si sommano in quadratura gli errori **relativi**.

Propagazione degli errori
Elevazione a potenza di una grandezza

$$X = A^n$$

Equivale a

$$X = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \qquad \textbf{n} \text{ volte}$$

Essendo un prodotto di grandezze, si sommano gli **errori relativi**. Questa volta **linearmente** perché tutte le fluttuazioni dei singoli fattori sono uguali e vanno nella stessa direzione (cioè, non sono indipendenti):

$$\Delta X/X = \Delta A/A + \Delta A/A + \Delta A/A + \ldots \quad \textbf{n} \text{ volte}$$

$$\Delta X/X = n \cdot (\Delta A/A)$$

Propagazione degli errori nella misura di densità di una sfera

Utilizziamo le regole di propagazione degli errori per valutare l'errore sulla misura di densità di una sfera (misura indiretta).

$$\rho = \mathbf{M / V}$$

$$\textbf{con } \mathbf{V = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3 = 1/6 \cdot \pi \cdot d^3}$$

M = massa, V = volume, r = raggio, d = 2 · r = diametro

La formula per il calcolo dell'errore associato alla misura:

$$\mathbf{\Delta V / V = 3 \cdot \Delta d / d}$$

$$\mathbf{(\Delta \rho / \rho)^2 = (\Delta M / M)^2 + (\Delta V / V)^2}$$

Propagazione degli errori nella nostra misura di viscosità

Utilizziamo le regole di propagazione degli errori per valutare l'errore sulla misura finale, e per studiare degli accorgimenti per migliorare la precisione della nostra misura di viscosità.

Formula per la misura indiretta della viscosità col viscosimetro a caduta:

$$\eta = 2/9 \cdot r^2 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g \cdot T / L$$

Formula per il calcolo dell'errore associato alla misura:

$$(\Delta\eta / \eta)^2 = (2 \cdot \Delta r / r)^2 + (\Delta(\rho_S - \rho_F) / (\rho_S - \rho_F))^2 + (\Delta T / T)^2 + (\Delta L / L)^2$$