

Esperienza del viscosimetro a caduta

Parte del corso di fisica per CTF

dr. Gabriele Sirri
sirri@bo.infn.it

<http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/farmacia/all/navarria/stuff/homepage.htm>

Esperienza del viscosimetro a caduta

10/3/08 - Elementi di Probabilità

11/3/08 - Misura di grandezze fisiche / Analisi degli Errori

17/4/08 - Il viscosimetro a caduta di sfere

14/5/08 - Prova sperimentale in Laboratorio

22/5/08 - Relazione conclusiva

Un corpo in caduta libera è sottoposto a una forza costante: **moto uniformemente accelerato**.

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Nel caso di caduta nel campo gravitazionale:

$$\vec{F} = m \vec{g}$$

La velocità aumenta linearmente col tempo:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t$$

Lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo:

$$\vec{s} = \dots + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

Nel caso di una sferetta di metallo che cade in un fluido si osserva sperimentalmente che dopo un breve periodo iniziale di accelerazione, il moto si stabilizza:

$$\vec{v} = \text{costante}$$



Moto rettilineo uniforme



Accelerazione nulla



Forza totale agente sul corpo nulla



$$\vec{F}_{\text{TOT}} = m \cdot \vec{a} = 0$$

Quali forze che agiscono sulla sferetta che cade in un fluido?

- **Gravità;**
- **Spinta idrostatica (spinta di Archimede);**

Forza di gravità

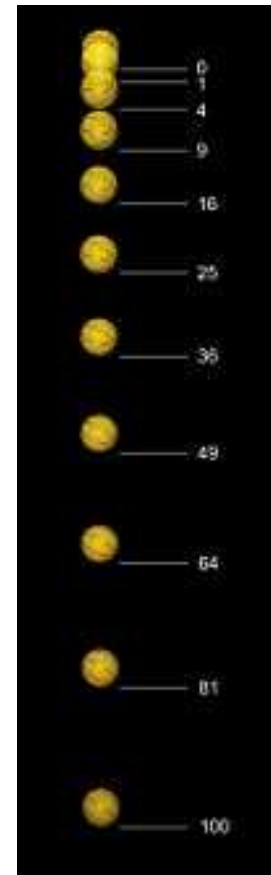
$$\vec{F}_G = m_{\text{sfera}} \cdot \vec{g}$$

$$g = 9.80665 \text{ m/s}^2$$

Forza di gravità agente su una sfera metallica di volume V_{sfera} , raggio r_{sfera} e densità ρ_{sfera} :

$$\vec{F}_G = V_{\text{sfera}} \cdot \rho_{\text{sfera}} \cdot \vec{g}$$

$$= \frac{4}{3} \pi \cdot r_{\text{sfera}}^3 \cdot \rho_{\text{sfera}} \cdot \vec{g}$$



Spinta di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_A &= - \vec{\mathbf{P}}_{\text{fluido spostato}} = - \mathbf{m}_{\text{fluido spostato}} \cdot \vec{\mathbf{g}} \\ &= - \mathbf{V}_{\text{fluido spostato}} \cdot \rho_{\text{fluido}} \cdot \vec{\mathbf{g}}\end{aligned}$$

Spinta di Archimede esercitata dal fluido su una sferetta di raggio \mathbf{r} :

$$\vec{\mathbf{F}}_A = - \frac{4}{3} \pi \cdot \mathbf{r}_{\text{sfera}}^3 \cdot \rho_{\text{fluido}} \cdot \vec{\mathbf{g}}$$

Se agissero solo forza di gravità e spinta idrostatica, il corpo sarebbe sottoposto a una forza non nulla (se il corpo è di densità diversa da quella del fluido in cui è immerso):

$$\vec{F}_G + \vec{F}_A = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot (\rho_{\text{sfera}} - \rho_{\text{fluido}}) \cdot \vec{g}$$

Osservazione sperimentale: il corpo raggiunge una certa velocità (**velocità limite**) e poi prosegue di moto rettilineo uniforme.



La risultante della forza peso e della spinta di Archimede è bilanciata da una forza proporzionale alla velocità

Forze proporzionali alla velocità sono forze del tipo di attrito.

Quali forze agiscono sulla sferetta che cade in un fluido?

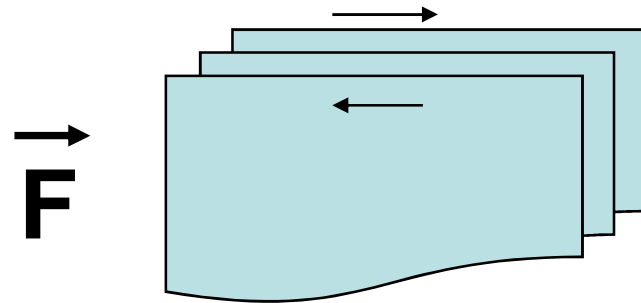
- **Gravità;**
- **Spinta idrostatica (spinta di Archimede);**
- **Attrito del fluido (viscosità).**

Nello stato stazionario:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{TOT}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{G}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{A}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{V}} = \mathbf{0}$$

Viscosità

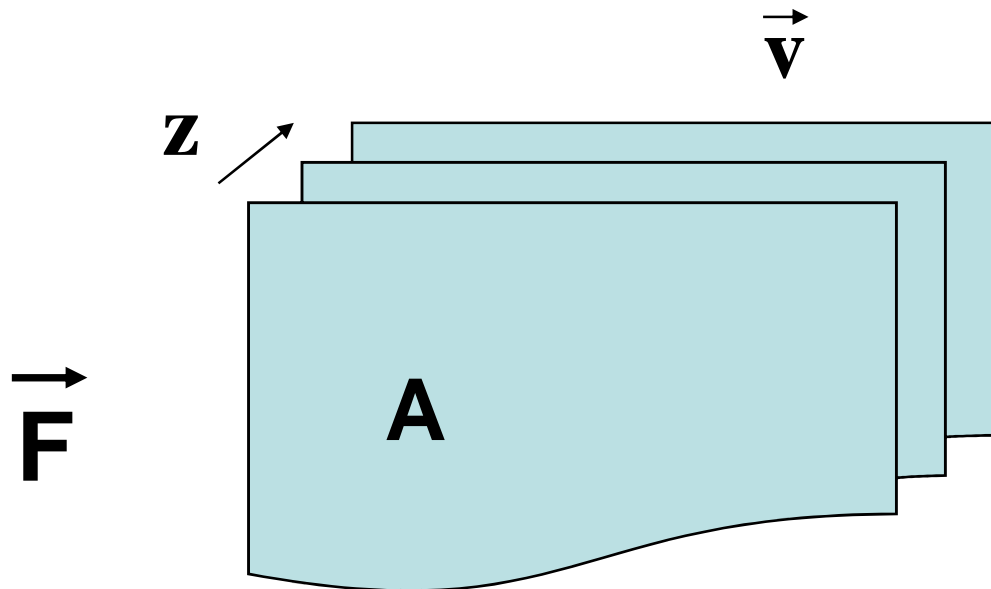
Le forze di legame che agiscono fra le molecole del fluido tendono a tenerle unite: per far slittare un sottile strato di fluido rispetto allo strato adiacente dobbiamo esercitare una forza:



Le forze intermolecolari variano con la temperatura: **la forza che dobbiamo applicare per contrastarle dipende pertanto dalla temperatura.**

Nel caso di due strati paralleli di fluido, di superficie \mathbf{A} e distanza \mathbf{z} fra loro, si verifica che:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}} = - \eta \cdot \mathbf{A} / \mathbf{z} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$



Il coefficiente di proporzionalità η è una caratteristica del fluido ed è detto **viscosità del fluido**.

$$[\eta] = [\mathbf{F}] [\ell] [\ell^{-2}] [\mathbf{v}^{-1}] = [\mathbf{F}] [\ell^{-2}] [\mathbf{t}]$$

Nel Sistema Internazionale (SI) :

$$[\eta] = \mathbf{N} / \mathbf{m}^2 \cdot \mathbf{s} = \mathbf{Pa} \cdot \mathbf{s}$$

La viscosità dipende dalla temperatura:
tipicamente diminuisce al crescere della temperatura
(le forze intermolecolari tendono a diminuire con la temperatura).

Un corpo che si muove all'interno di un fluido è frenato dalla viscosità del fluido.

Nella seguente approssimazione:

- **corpo sferico** (di raggio r);
- **moto laminare** (non turbolento) nel fluido;
- fluido contenuto in un **recipiente di dimensioni infinite** (cioè è trascurabile l'interazione con le pareti del recipiente).

è valida la **legge di Stokes**:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{V}} = - 6 \pi \eta \cdot \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Nel caso delle nostre sfere d'acciaio in caduta nel fluido:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{TOT}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{G}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{A}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{V}} = \mathbf{0}$$

A regime
v = costante

Assumendo le condizioni per cui è valida la legge di Stokes:

$$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot \vec{\mathbf{g}} - 6\pi \eta \cdot r \cdot \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

Gravità, Spinta di Archimede e il moto agiscono sull'asse verticale



l'equazione vettoriale può ridursi ad una sola equazione che può essere risolta per trovare la viscosità η .

Formula per la misura (indiretta) della viscosità col viscosimetro a caduta

Se $g = |\vec{g}|$ e $v = |\vec{v}|$, risolvendo l'equazione precedente per η :

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot r^2 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g / v$$

Misura **indiretta** ottenuta combinando fra loro altre misure:

$$r, \rho_s, \rho_f, v$$

che, a loro volta, potranno essere state misurate direttamente o indirettamente.

Attenzione

La viscosità di un fluido **dipende fortemente dalla sua temperatura**: la temperatura è un parametro che va monitorato per sapere a quale temperatura corrisponde il valore di η misurato, e per **controllare che una eventuale variazione di temperatura durante la prova non infici il risultato finale.**

La formula trovata per η vale nelle approssimazioni della legge di Stokes. Per avere il fluido in regime laminare, bisogna stare **attenti a non agitarlo, non creargli delle bolle d'aria, etc.**

Misureremo anche il diametro interno del tubo contenente il fluido viscoso, per valutare l'effetto della deviazione dalla legge di Stokes.

Ricordiamoci le condizioni per cui vale la legge di Stokes (nella formulazione semplice che abbiamo dato) :

- corpo sferico;
- **moto laminare (non turbolento) nel fluido;**
- **fluido contenuto in un recipiente di dimensioni infinite** (cioè è trascurabile l'interazione con le pareti del recipiente).

Quantificazione delle deviazioni dalla legge di Stokes (termini principali)

Correzione per il raggio finito (R) del tubo:

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 - 2.104 \cdot r / R + \dots)$$

Correzione per la non laminarità del moto:

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 - 27/16 \cdot v^2 / (g \cdot r) \cdot \rho_F / (\rho_S - \rho_F) + \dots)$$

Viscosimetri ad uso professionale

La tecnica di misura per determinare la viscosità di un fluido è detta **viscosimetria**



**Esempi di viscosimetri
a caduta di sfere**



**Viscosimetri
a bolla**



**Viscosimetro
rotazionale**

*I fluidi si possono dividere in **Newtoniani** e **non Newtoniani**. I Newtoniani non cambiano il loro valore di viscosità al variare della forza applicata, mentre i non Newtoniani possono cambiare la loro viscosità non solo all'aumentare o al diminuire della forza, ma anche in relazione al tempo di applicazione della stessa. I fluidi non Newtoniani possono pertanto essere divisi in **tempo indipendenti** e **tempo dipendenti**.*

Esempio di viscosimetro a caduta di sfere di tipo “professionale”



Le dimensioni della sfera sono confrontabili con quelle del tubo di caduta (ottenendo così uno strumento decisamente più maneggevole dei nostri tubi!).

La misura della viscosità è una misura **relativa** (cioè riferita a dei liquidi di viscosità nota): lo strumento va **calibrato**. Dalla curva di calibrazione si ricava il fattore di conversione che traduce direttamente il tempo di caduta nella viscosità del fluido.

Raggio della sferetta d'acciaio: r

Si misura direttamente con un calibro.

(In realtà la misura diretta è quella del diametro...).

Misure ripetute danno gli stessi risultati



La precisione della misura è data dalla sensibilità dello strumento



L'errore da associare al valore misurato è la più piccola divisione apprezzabile dello strumento di misura.

Densità delle sfere d'acciaio: ρ_s

Misura indiretta:

$$\rho_s = M_s / V_s = M_s / (4/3 \pi r_s^3)$$

Si pesa la sferetta con una bilancia di precisione, ottenendone la massa. Il raggio si misura col calibro.

Errori:

$$(\Delta\rho_s/\rho_s)^2 = (\Delta M_s/M_s)^2 + (3 \cdot \Delta r_s/r_s)^2$$

La precisione della bilancia (ΔM) è indipendente dalla massa pesata. Si ottiene un errore relativo più piccolo sulla massa se si pesa una massa più grande \rightarrow pesare N sferette dello stesso raggio contemporaneamente riduce il primo termine dell'errore.

Densità del fluido: ρ_F

Misura indiretta:

$$\rho_F = M_F / V_F$$

Si misura la massa di fluido contenuta in un recipiente di volume noto (es: provetta graduata).

$$M_F = M_{F + tara} - M_{tara}$$

(NB: in realtà, la misura di massa è indiretta: quello che si misura direttamente sulla bilancia è la forza peso, che va poi divisa per g)

Errori:

$$(\Delta\rho_F/\rho_F)^2 = (\Delta M_F/M_F)^2 + (\Delta V_F/V_F)^2$$

$$(\Delta M_F)^2 = (\Delta M_{F + tara})^2 + (\Delta M_{tara})^2$$

Differenza delle due densità

Nella formula per l'errore finale entra l'errore sulla differenza fra le due densità, delle sferetta d'acciaio e del fluido:

$$\Delta(\rho_S - \rho_F) / (\rho_S - \rho_F)$$

Per le regole viste di propagazione degli errori:

$$[\Delta(\rho_S - \rho_F)]^2 = [\Delta\rho_S]^2 + [\Delta\rho_F]^2$$

La precisione sulla misura della viscosità dipende dalla precisione sulla misura della differenza delle densità:

Si migliora la precisione della misura finale se si riesce a migliorare la misura meno precisa fra quelle delle due densità. Non si ottiene nessun vantaggio, in pratica, a migliorare la misura delle due che è già più precisa, se non si riesce a ridurre l'errore anche dell'altra.

Velocità a regime di caduta della sfera:

$$v = L / T$$

Misura indiretta:

rapporto fra la misura diretta della lunghezza di caduta L (con un metro graduato) e la misura diretta del tempo di caduta T (col cronometro).

La sensibilità del cronometro è migliore della precisione con cui si riesce a fare la misura del tempo di caduta \rightarrow fluttuazioni casuali \rightarrow l'errore da associare alla misura di T sarà l'errore sulla media della distribuzione delle misure fatte.

NB: sfere di raggio diverso cadranno con velocità di regime diversa. η però dipende solo dal fluido, e il valore misurato della viscosità deve essere sempre lo stesso, entro gli errori sperimentali.

Propagazione degli errori nella nostra misura di viscosità

Utilizziamo le regole di propagazione degli errori per valutare l'errore sulla misura finale e per studiare degli accorgimenti per migliorare la precisione della nostra misura di viscosità.

Formula per la misura indiretta della viscosità col viscosimetro a caduta:

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot r^2 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g \cdot T / L$$

Formula per il calcolo dell'errore associato alla misura:

$$\begin{aligned} (\Delta\eta / \eta)^2 &= (2 \cdot \Delta r / r)^2 \\ &+ (\Delta(\rho_S - \rho_F) / (\rho_S - \rho_F))^2 \\ &+ (\Delta T / T)^2 \\ &+ (\Delta L / L)^2 \end{aligned}$$