Esperienza del viscosimetro a caduta

Parte del corso di fisica per CTF

dr. Gabriele Sirri
sirri@bo.infn.it

http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/farmacia/all/navarria/stuff/homepage.htm

Esperienza del viscosimetro a caduta

10/3/08 - Elementi di Probabilità

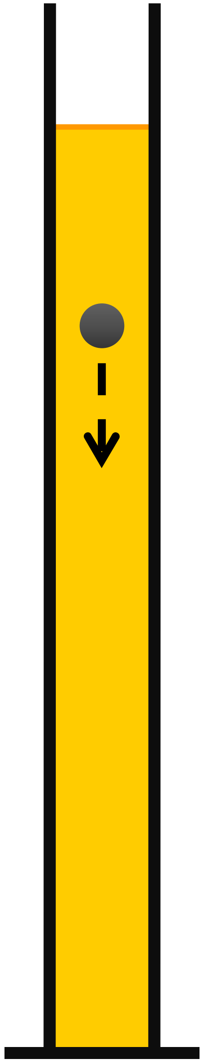
11/3/08 - Misura di grandezze fisiche / Analisi degli Errori

17/4/08 - Il viscosimetro a caduta di sfere

14/5/08 - Prova sperimentale in Laboratorio

22/5/08 - Relazione conclusiva

Viscosimetro a caduta di sfere:



Forze agenti su una sferetta di metallo che cade in un fluido:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{TOTALE}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{GRAVITA}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ARCHIMEDE}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{VISCOSITA}}$$

Osservazione sperimentale: a regime velocità costante **v**

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{TOTALE}} = \mathbf{0}$$

Approssimazione:
- **corpo sferico** (raggio **r**)
- **moto laminare** (non turbolento) nel fluido
- **recipiente di dimensioni infinite**

legge di Stokes: $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{VISCOSITA}} = -6\,\pi\,\eta \cdot \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{v}}$

Otteniamo una formula per la **viscosità (η)** :

$$\eta = 2/9 \cdot r^2 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g / v$$

La viscosità dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura.

Fluido	Temperatura (°C)	η (poise)
acqua	0	$1.79 \cdot 10^{-2}$
acqua	20	$1.00 \cdot 10^{-2}$
acqua	100	$0.30 \cdot 10^{-2}$
alcool etilico	20	$1.20 \cdot 10^{-2}$
mercurio	20	$1.55 \cdot 10^{-2}$
sangue	37	0.23
olio per motori	30	2.5
glicerina	20	15
vetro	700	$1.00 \cdot 10^{11}$
pece	15	$1.30 \cdot 10^{11}$
aria	20	$1.71 \cdot 10^{-4}$
idrogeno	20	$0.88 \cdot 10^{-4}$

Viscosita' per alcuni fluidi a varie temperature.

Liquid	*Approximate Viscosity (Pa·s)*
Glass	10^{40}
Molten glass (500°C)	10^{12}
Asphalt	10^{8}
Molten polymers	10^{3}
Heavy syrup	10^{2}
Honey	10^{1}
Glycerin	10^{0}
Olive oil	10^{-1}
Light oil	10^{-2}
Water	10^{-3}
Air	10^{-5}

Viscosita' per alcuni fluidi a temperatura ambiente.

L'unita' di misura per η nel sistema MKS e' [N] [s] [m^{-2}] = [Pa] [s]

Nella tabella a sinistra sono riportati i valori delle viscosita' di alcuni fluidi nella unita' di misura cgs: il poise [poise].

Si ha la seguente equivalenza : 0.1 Pa s = 1 poise

Misure di temperatura ambiente

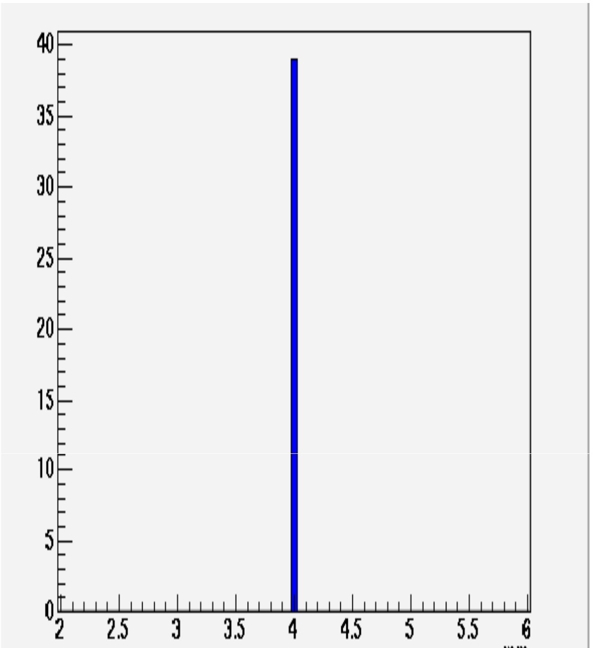
Temperatura ambiente misurata con alcuni termometri posti in sala.

turno 9-11	T ~ 21 - 26 °
turno 11-13	T ~ 22 - 25 °

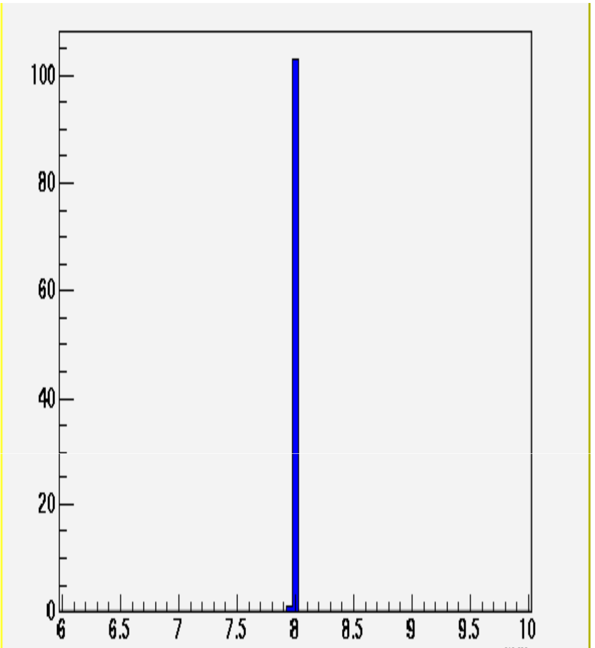
variazione fra l'inizio e la fine della misura di qualche grado

Verosimilmente, le variazioni di temperatura del fluido fra i vari viscosimetri erano simili.

Misure dei diametri delle sfere



Diametro sfere piccole



Diametro sfere grandi

Sensibilità calibro:
1/20 mm
cioè 0.05 mm

1. Trascrivo l'errore di misura

Es. misura:
Diametro:
(4.**00** ± 0.0**5**) mm

2. Arrotondo il valor medio alla cifra corrispondente all'errore oppure se serve aggiungo gli '0'

Tantissime misure, pochissime fluttuazioni:
la precisione garantita dal fornitore è stata verificata….

… da chi ha saputo usare bene il calibro e non ha fatto confusione fra mm e cm e fra diametro e raggio!

Densità del fluido nei due turni

$$\rho_F = M_F / V_F = (M_{T+F} - M_F) / V_F$$

<u>Misure dirette:</u>

V_F =	$(200 \pm 10)\ cm^3$	$(40 \pm 1)\ cm^3$
M_{F+T} =	$(320 \pm 10)\ g$	$(148.97 \pm 0.01)\ g$
M_T =	$(120 \pm 10)\ g$	$(106.97 \pm 0.01)\ g$

<u>Misure indirette:</u>

$M_{F+T} - M_T$ =	$(200 \pm 14)\ g$	$(42.00 \pm 0.014)\ g$
ρ_F =	$(1000 \pm 87)\ kg / m^3$	$(1050 \pm 26)\ kg / m^3$
ρ_F =	$(1000 \pm 90)\ kg / m^3$	$(1050 \pm 30)\ kg / m^3$

Notare <u>errori con una sola cifra significativa</u>!
Il valore medio è troncato alla stessa precisione.

Masse delle sfere

E’ importante pesare più sfere contemporaneamente.

Esempi tratti dalle misure fatte sulle sfere piccole (diam. 4 mm) con la bilancia di precisione a sensibilità 0.01 s:

- Peso 6 sfere piccole:

  M(6 sfere) = (1.57 ± 0.01) g da cui

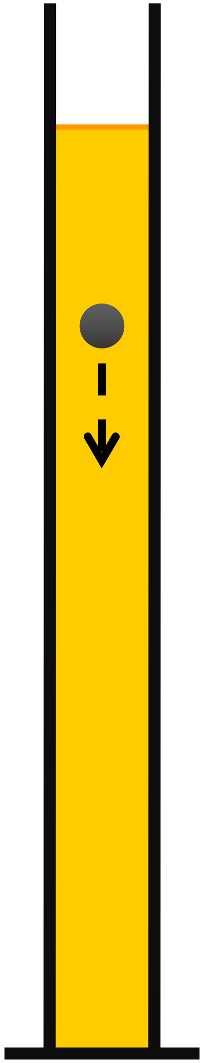
  M(1 sfera) = (0.262 ± 0.002) g (errore relativo 1 %)

- Peso un’unica sfera:

  M(1 sfera) = (0.26 ± 0.01) g (errore relativo 4 %)

Se avessi pesato 60 sfere contemporaneamente, assumendo che tutte abbiano la stessa massa, l’errore relativo sulla pesata complessiva, e quindi sul valor medio, sarebbe stato dello 0.1 %

Lunghezza e raggio interno del tubo di caduta



La lunghezza del percorso di caduta era circa uguale su tutti i tubi, a 60 cm.

Generalmente: **(60.0 ± 0.1) cm**

Sono stati misurati valori che differiscono di pochi mm da questo.

Differenze fra le misure fatte sui vari tubi possono essere dovute a distanze effettivamente differenti fra i traguardi che definiscono il percorso di caduta: <u>non sono necessariamente da considerare imprecisioni nella vostra operazione di misura (errori sistematici) .</u>

<u>Alcuni (sfortunati) gruppi hanno dovuto avvicinare i traguardi in quanto sul fondo del tubo si era creata una zona turbolenta (dove non può essere considerata valida la legge di Stokes).</u>

Tempi di caduta

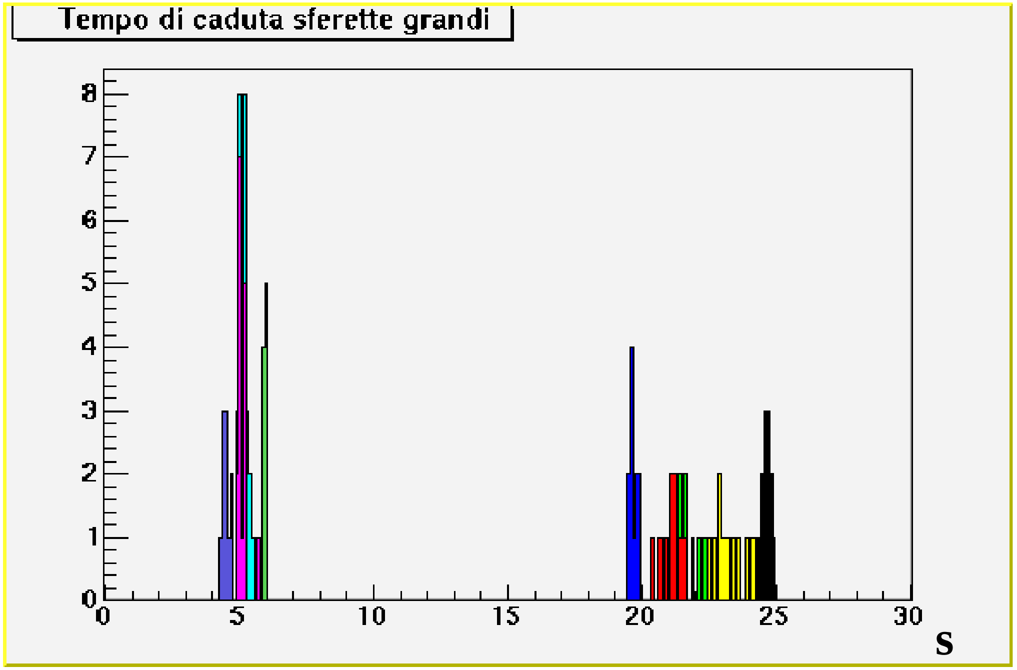
Esempio tratto da alcuni tempi di caduta in diversi turni di laboratori precedenti (ogni colore corrisponde alle misure di tempo prese da un gruppo diverso).

Evidentemente, c’erano **fluidi con viscosità diverse** (detersivi di diversa composizione).

Anche le variazioni all’interno delle misure corrispondenti allo stesso tipo di detersivo sono comunque maggiori delle fluttuazioni statistiche fra le misure fatte nello stesso gruppo: **gli effetti sistematici sono dominanti.**

Possibili effetti sistematici:

- deposito e separazione delle componenti nel detersivo più vecchio
- turbolenza nel fluido verificata in alcuni casi;
- differenza nelle temperature dei fluidi contenuti in tubi diversi.



Date le differenze fra le varie misure e i differenti fluidi, non è possibile considerare i risultati di tutti i gruppi insieme.

Scegliamo un unico gruppo come esempio
(dal turno 2).

Risultati delle misure: raggi delle sfere

Misure del diametro con un calibro di sensibilità 0.05 mm (1/20 mm):

4.00 mm	8.00 mm
4.00 mm	8.00 mm
4.00 mm	8.00 mm
4.00 mm	

Misure dei due diametri:

- **d_1 = (0.00400 ± 0.00005) m**
- **d_2 = (0.00800 ± 0.00005) m**

Misure dei due raggi:

Errore relativo ⇓

- **r_1 = (0.002000 ± 0.000025) m = (0.00200 ± 0.00003) m** 1%
- **r_2 = (0.004000 ± 0.000025) m = (0.00400 ± 0.00003) m** 0,6%

Risultati delle misure: densità del fluido

$$\rho_F = M_F / V_F = (M_{T+F} - M_F) / V_F$$

Misure dirette:

		Errore relativo ⇓
V_F	$= (40 \pm 1)\ cm^3$	3%
M_{F+T}	$= (148.97 \pm 0.01)\ g$	0,01 %
M_T	$= (106.97 \pm 0.01)\ g$	0,01 %

Tante cifre significative, ma le ultime sono sempre uguali!
Possibile sottostima dell'errore? → leggere il manuale della bilancia

Misure indirette:

$$M_{F+T} - M_T = (\mathbf{42.000 \pm 0.014})\ g$$

$$\rho_F = (1050 \pm 30)\ kg / m^3$$

errore relativo 3 %

Errore con una sola cifra significativa!
Il valor medio è arrotondato alla stessa precisione.

Dom: ha senso aumentare la precisione di misura della massa?

Nel formulario o sulla lavagna era scritto che:

$(\Delta M_F)^2 = (\Delta M_{F+T})^2 + (\Delta M_T)^2$ **errore di una differenza**

$\Delta V / V = 3\, \Delta R / R$ **errore dell'elevamento a potenza**

$(\Delta \rho / \rho)^2 = (\Delta M / M)^2 + (\Delta V / V)^2$ **err. di un quoziente**

Significavano rispettivamente che:

$$\Delta M_F = \sqrt{(\Delta M_{F+T})^2 + (\Delta M_T)^2}$$

$$\Delta V = 3\, \Delta R / R \cdot V$$

$$\Delta \rho = \rho \cdot \sqrt{(\Delta M / M)^2 + (\Delta V / V)^2}$$

Alcuni gruppi non hanno risolto le equazioni, prima di fare i calcoli…

Risultati delle misure: densità delle sfere

$$\rho_S = M_S / V_S$$

Misure dirette:

$M_{6\ \text{Sfere piccole}} = (1.57 \pm 0.01)\ g \rightarrow M_{1S} = (0.262 \pm 0.002)\ g$ 1%

$M_{2\ \text{Sfere grandi}} = (4.16 \pm 0.01)\ g \rightarrow M_{1S} = (2.080 \pm 0.005)\ g$ 0.2%

Misure indirette:

$V_S = (4/3\ \pi\ r_S^{\ 3}) = (33 \pm 1)\ mm^3$ (sfere piccole) 3%

$= (268 \pm 5)\ mm^3$ (sfere grandi) 2%

$\rho_S = (7813 \pm 297)\ kg/m^3$ (piccole) $\rightarrow$ **$(7800 \pm 300)\ kg/m^3$**

$= (7763 \pm 147)\ kg/m^3$ (grandi) $\rightarrow$ **$(7800 \pm 100)\ kg/m^3$**

Altro gruppo I turno:

$= (7748 \pm 146)\ kg/m^3$ (grandi) $\rightarrow$ **$(7700 \pm 100)\ kg/m^3$**

Dom: le misure di densità sono compatibili?
Risp: Si! (differenza più piccola degli errori)

Differenza delle due densità:

$$\rho_S^P - \rho_F = (7813. \pm 297.)\ kg/m^3 - (1050. \pm 26.)\ kg/m^3$$
$$\rho_S^G - \rho_F = (7763. \pm 147.)\ kg/m^3 - (1050. \pm 26.)\ kg/m^3$$

Scritte tutte le cifre risultanti dal calcolo: inutile! Il primo termine ha già l'incertezza sulla seconda cifra significativa: nel risultato non potranno esserci più di due cifre significative senza errore.

Teniamo tre (3 = 2 + 1) cifre significative nei calcoli, e poi approssimiamo il risultato che scriviamo alla seconda cifra:

$7810. - 1050. = 6763. \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\rho_S^P - \rho_F = (6700. \pm 300.)\ kg/m^3}$

$\sqrt{300.^2 + 30.^2} = 298$

$7760. - 1050. = 6713. \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\rho_S^G - \rho_F = (6800. \pm 100.)\ kg/m^3}$

$\sqrt{150.^2 + 30.^2} = 149$

Notiamo che la precisione è data dalla misura della densità delle sfere di acciaio: non si aumenta la precisione sulla misura della differenza di densità se si migliora (solo) la precisione della misura di densità del fluido.

Risultati delle misure: <u>distanza fra i traguardi del tubo</u>

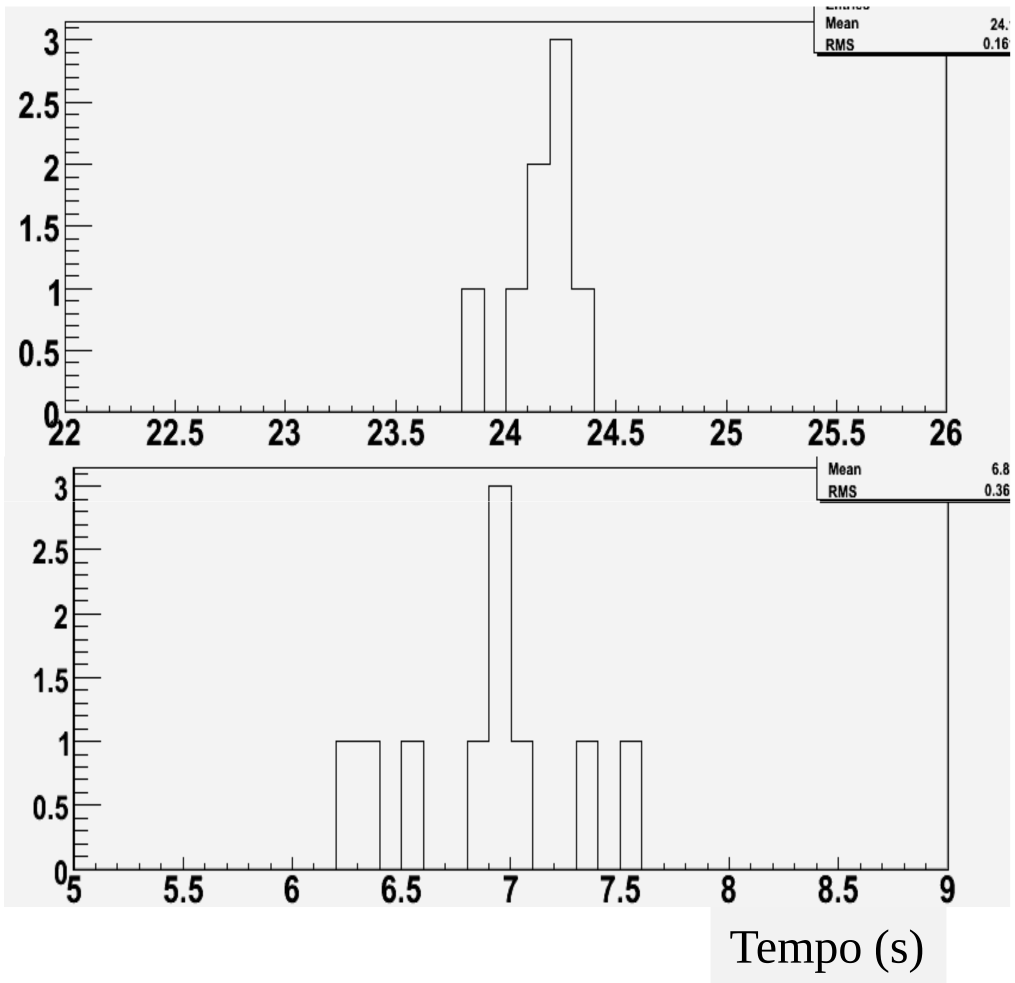
Un'unica misura, ottenuta con un metro di precisione 1 mm:

$$L = (60.4 \pm 0.1)\ \text{cm} = (0.604 \pm 0.001)\ \text{m}$$

Risultati delle misure: <u>tempi di caduta</u>

Misure di tempo di caduta, in secondi, per i due raggi della sfera considerati, con cronometri di precisione 0.01 s:

Piccola	Grande
23.83	6.33
24.10	6.58
24.39	6.27
24.27	7.00
24.21	7.30
24.24	7.50
24.01	6.95
24.11	6.91
…..	6.90
	6.85



Valori medi e errori sui valori medi delle 8 (10) misure:

$$T_1 = (\,24.58 \pm 0.22)\ \text{s} \qquad = (\,24.6 \pm 0.2)\ \text{s}$$

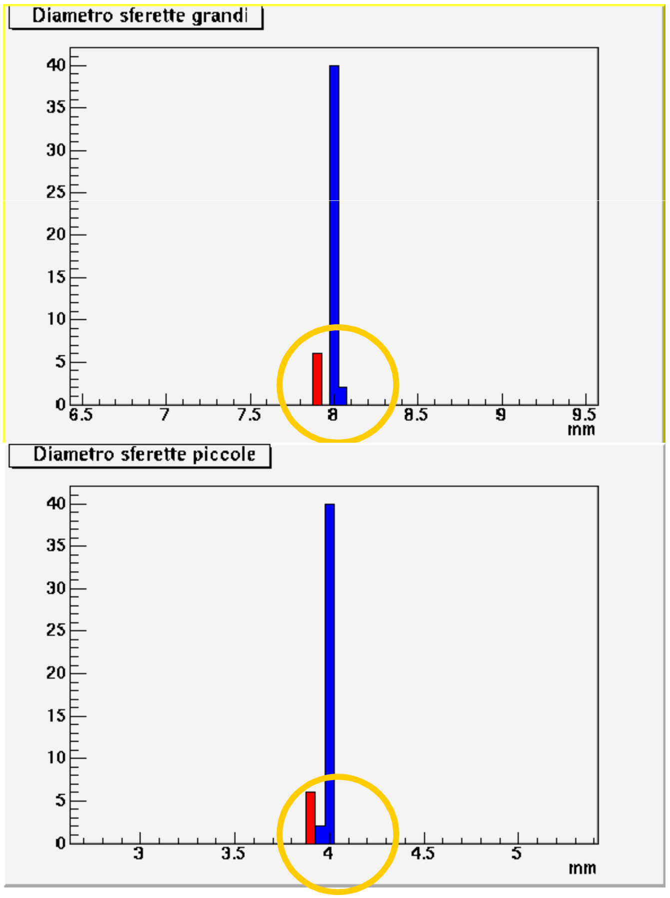
$$T_2 = (\,6.86 \pm 0.12)\ \text{s} \qquad = (\,6.9 \pm 0.1)\ \text{s}$$

Rappresentare i risultati sotto forma di istogramma (grafico) aiuta a visualizzare e comprendere meglio eventuali problemi.

Ad esempio, la presenza di un picco spostato rispetto a quello principale poteva essere indizio che uno dei cronometri non era calibrato bene; oppure che una delle sfere era composta di un materiale differente, oppure di volume differente.

Un singolo risultato al di fuori del picco (o comunque pochi e scorrelati fra loro) può essere dovuto a imprecisioni in quella particolare misura.
Se col ragionamento si ritiene che alcune delle misure hanno una elevata probabilità di non essere corrette, si potrebbe anche decidere di non considerare quelle misure.

Esempio: i grafici dei diametri delle sferette dal laboratorio del 2006, dove le misure in rosso erano state prese tutte dallo stesso gruppo.



Misura della viscosità col viscosimetro a caduta

$$\eta = 2/9 \cdot r^2 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g \cdot T / L$$

$r_1 = (0.002000 \pm 0.000025)$ m $\quad$ $r_2 = (0.004000 \pm 0.000025)$ m

$(\rho_S - \rho_F)_1 = (6760 \pm 300)$ Kg / m^3 $\quad$ $(\rho_S - \rho_F)_2 = (6710. \pm 150)$ Kg / m^3

$g = 9.81$ m / s^2

$T_1 = (24.58 \pm 0.22)$ s $\quad$ $T_2 = (6.86 \pm 0.12)$ s

$L = (0.604 \pm 0.001)$ m

Nei calcoli tronco alla seconda cifra significativa dell'errore, per non avere problemi di arrotondamento.

$\Rightarrow$

Nel risultato finale ci sarà solo una cifra significativa per l'errore.

Errore associato alla misura della viscosità (dalle formule viste per la propagazione degli errori di misura nei calcoli):

$$\eta \;=\; \mathbf{2/9} \cdot \mathbf{r}^{2} \cdot (\rho_{S} - \rho_{F}) \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{T} / \mathbf{L}$$

$$\begin{aligned}(\Delta\eta / \eta)^2 \;=\; & (\, 2 \cdot \Delta r / r \,)^2 \\ & + (\, \Delta(\rho_S - \rho_F) / (\rho_S - \rho_F) \,)^2 \\ & + (\, \Delta T / T \,)^2 \\ & + (\, \Delta L / L \,)^2\end{aligned}$$

Risultati (con contributi all'errore)

	Sfere piccole	Sfere Grandi
VISCOSITA'	2.399 Pa· s	2.658 Pa· s
Contributi all'errore		
Raggio Sfera	0.060 Pa· s	0.033 Pa· s
Densità materiali	0.106 Pa· s	0.059 Pa· s
Lunghezza tubo	0.021 Pa· s	0.047 Pa· s
Tempo di caduta	0.004 Pa· s	0.004 Pa· s
Errore Totale	0.124 Pa· s	0.082 Pa· s

$$\eta_1 = (2.4 \pm 0.1)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

$$\eta_2 = (2.66 \pm 0.08)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

Le due misure sono compatibili ?

L’errore (incertezza) va interpretato in termini probabilistici.

I due risultati differiscono di circa due volte l’errore

$\Downarrow$

Scarsa probabilità (circa 5 %) che
siano due misure della stessa grandezza

Condizioni per cui vale la legge di Stokes (nella formulazione semplice che abbiamo dato) :

• corpo sferico;

• **moto laminare (non turbolento) nel fluido**;

• **fluido contenuto in un recipiente di dimensioni infinite** (cioè è trascurabile l'interazione con le pareti del recipiente).

Correzione per il raggio finito del tubo

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 - 2.104 \cdot r / R + \ldots)$$

Raggio interno del tubo : **R = (2.7 ± 0.1) cm**

	Sfere piccole	Sfere Grandi
VISCOSITA'	2.025 Pa· s	1.830 Pa· s
Contributi all'errore		
Raggio Sfera	0.060 Pa· s	0.033 Pa· s
Densità materiali	0.106 Pa· s	0.059 Pa· s
Lunghezza tubo	0.021 Pa· s	0.047 Pa· s
Tempo di caduta	0.004 Pa· s	0.004 Pa· s
Raggio del tubo	0.012 Pa· s	0.021 Pa· s
Errore Totale	0.124 Pa· s	0.085 Pa· s

$$\eta_1 = (2.0 \pm 0.1)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$
$$\eta_2 = (1.83 \pm 0.09)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

Correzione per la non laminarità

$$\eta = \eta_0 \cdot \left(1 - 27/16 \cdot v^2 / (g \cdot r) \cdot \rho_F / (\rho_S - \rho_F) + \ldots \right)$$

	Sfere piccole	Sfere Grandi
VISCOSITA'	2.009 Pa· s	1.734 Pa· s
Contributi all'errore		
Raggio Sfera	0.060 Pa· s	0.033 Pa· s
Densità materiali	0.106 Pa· s	0.059 Pa· s
Lunghezza tubo	0.021 Pa· s	0.047 Pa· s
Tempo di caduta	0.004 Pa· s	0.004 Pa· s
Raggio del tubo	0.012 Pa· s	0.021 Pa· s
Numero Reynolds	0.001 Pa· s	0.006 Pa· s
Errore Totale	0.124 Pa· s	0.085 Pa· s

$$\eta_1 = (2.0 \pm 0.1)\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$$

$$\eta_2 = (1.73 \pm 0.09)\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$$

Osservazioni

Volendo migliorare la precisione della misura che cosa fareste ?

E se mi fossi scordato qualche correzione ? Che cosa fareste per essere sicuri della misura, cioè per poter usare effettivamente lo strumento come **viscosimetro** ?

RISPOSTE

Volendo migliorare la precisione della misura bisognerà agire sulle misure dirette che propagano sul risultato finale l'errore maggiore. Migliorando l'errore loro associato, anche l'errore sul risultato finale diventerà più piccolo.

Ogni strumento di misura va tarato e calibrato con grandezze note: nel nostro caso, la viscosità dell'acqua, della glicerina, e di altri fluidi campione è nota (in funzione della temperatura), e può essere usata per calibrare lo strumento.