Esperienza del viscosimetro a caduta

Parte del corso di fisica per CTF

dr. Gabriele Sirri
sirri@bo.infn.it

http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/farmacia/all/navarria/stuff/homepage.htm

Esperienza del viscosimetro a caduta

11/3/09 - <u>Elementi di Probabilità</u>

- **Misura di grandezze fisiche / Analisi degli Errori**
- **Il viscosimetro a caduta di sfere**
- **Prova sperimentale in Laboratorio**
- **Relazione conclusiva**

La Fisica è una scienza sperimentale (come Chimica, Farmacia, …):

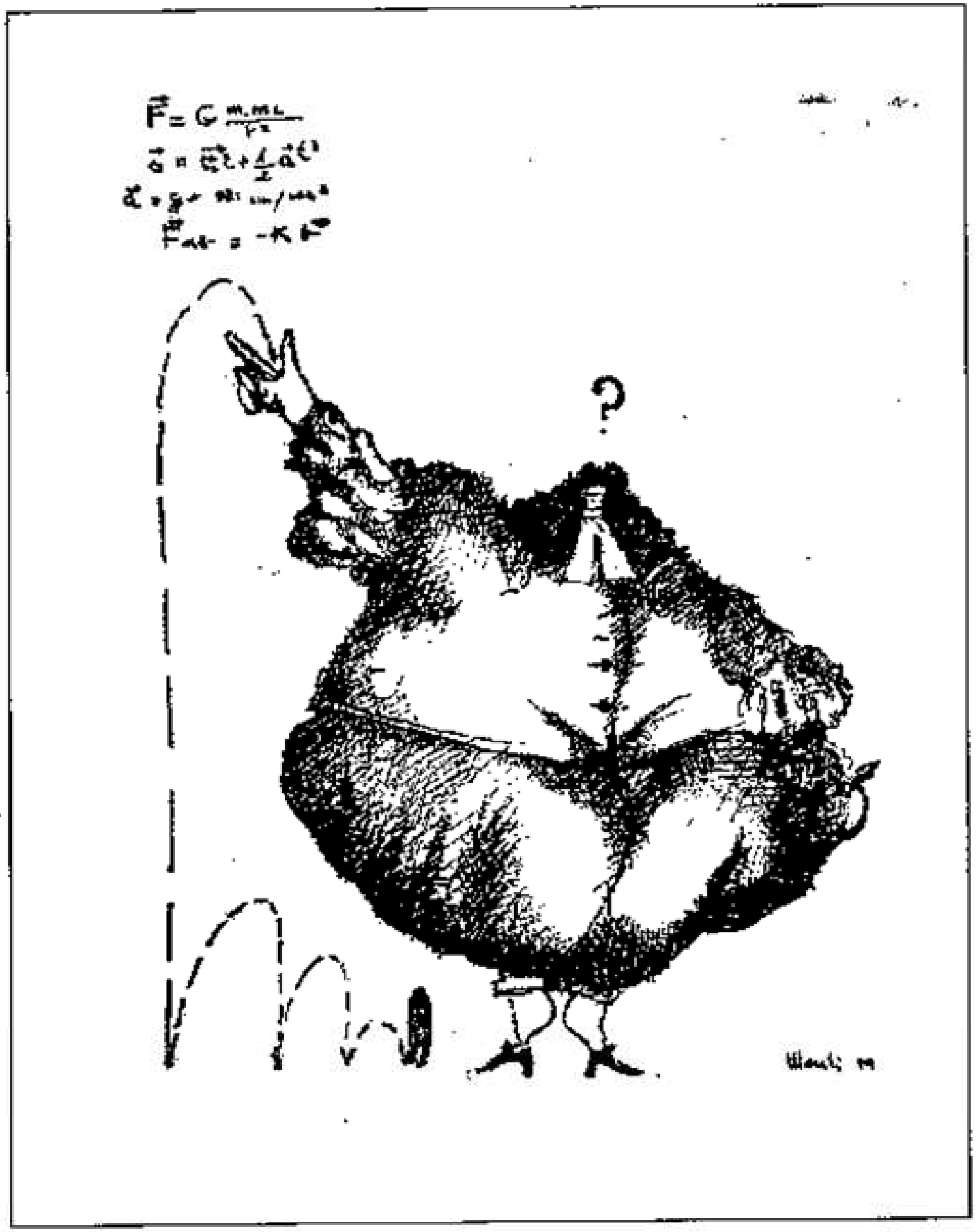
Osservazione (esperienza)

↓

Leggi fisiche

↓

Prevedere il comportamento di un sistema
(e usarlo a proprio vantaggio, quando serve)



Un lancio di moneta potrebbe essere seguito in modo deterministico usando le equazioni di Newton ...

Probabilità

Concetti fondamentali
Definizione di probabilità
Teoremi sulla probabilità
Esercizi

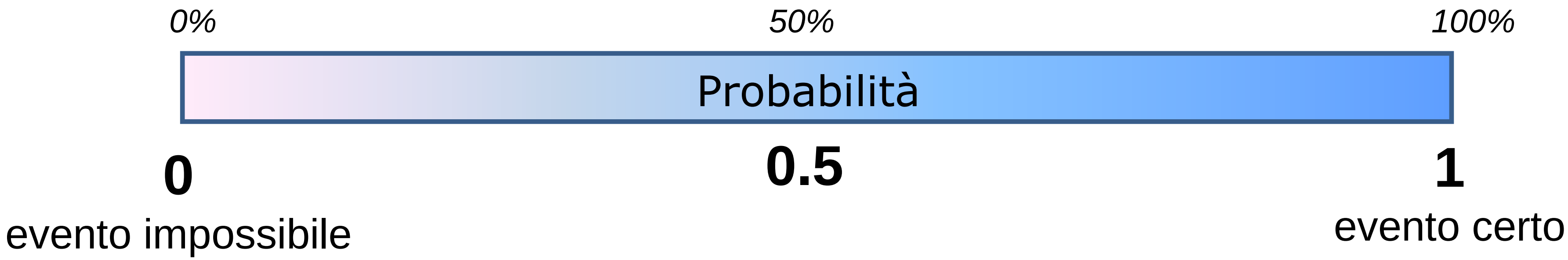
Evento. Probabilità di un Evento

Evento: qualsiasi fatto che può accadere oppure no.

Evento certo: evento che sicuramente accadrà.

Evento impossibile: evento che sicuramente <u>non</u> accadrà.

Probabilità di un evento: numero compreso tra 0 e 1, tanto più alto quanto "più facile" è che l'evento accada
(definizione da rivedere in seguito)



Relazione fra eventi

L'evento A è **dipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada dipende dal fatto che accada B.

Esempio: A = "La Virtus vince lo scudetto del basket",
B = "I più forti giocatori della Virtus si infortunano durante i play-off"

L'evento A è **indipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada non dipende da B

Esempio: A = "La Virtus vince lo scudetto del basket"
B = "Il Bologna vince il campionato di serie A"

Due eventi A e B sono **mutuamente escludentesi (o incompatibili)** se non possono verificarsi contemporaneamente.

Esempio: A = "La Virtus vince lo scudetto del basket"
B = "La Scavolini Pesaro vince lo scudetto del basket"

Eventi casuali formano un **gruppo completo di eventi** se **almeno uno** di essi deve **necessariamente** accadere.
(Esempio: $A_1 \ldots A_{16}$ = "L'i-esima squadra del campionato vince lo scudetto")

Eventi contrari sono due eventi mutuamente escludentesi che formano un gruppo completo.
Esempio: A = "Nel lancio di una moneta esce Testa"
B = "Nel lancio di una moneta esce Croce" A = non B

Due o più eventi casuali si dicono **equiprobabili** se la **simmetria** dell'esperimento permette di supporre che essi abbiano tutti la **stessa probabilità** di accadere.
(Esempio: $A_1 \ldots A_6$ = "Nel lancio di un dado non truccato esce la faccia *i*")

<u>Osservazione</u> (che in realtà potremmo fare solo dopo aver definito la probabilità…): in un gruppo completo di N eventi equiprobabili e mutuamente escludentesi, la probabilità di ciascuno di essi è P = 1/N

Somma e Prodotto di Eventi

Somma di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A o di B o di entrambi.**

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A+B) = P(A \text{ o } B)$$

Somma di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di almeno uno di essi.

Prodotto di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A e di B contemporaneamente.**

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A \text{ e } B)$$

Prodotto di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di tutti loro contemporaneamente.

Probabilità condizionata

Probabilità che un evento A accada
a condizione ("dopo che") si sia verificato l'evento B

$$P\,(A|B)$$

Esempio:

A = passare l'esame di fisica;

$B_0 \ldots B_3$ = risolvere correttamente 0…3 esercizi allo scritto.

Chiaramente: $P\,(A|B_3) > P\,(A|B_2) > P\,(A|B_1) > P\,(A|B_0)$

Nota:

Potrebbe succedere che P(A) sia piccola, mentre P(A|B) sia molto più grande.

Es: *A = "L'ultima in classifica vince il campionato di calcio di serie A",*

=> P(A) è molto piccola.

B = "Tutte le altre squadre di seria A sono squalificate per illecito sportivo",

=> anche P(B) è piccola,

ma $P(A|B) \sim 1$ *!*

Variabili aleatorie. Distribuzione di Probabilità

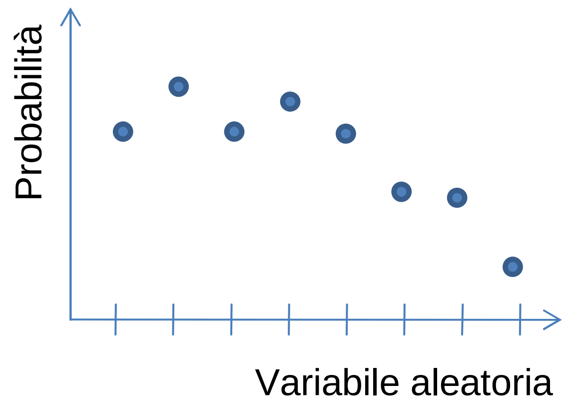
Variabili aleatorie : grandezze che, nel corso di una prova, possono assumere un valore sconosciuto a priori.

Si distinguono in:

discrete : se possono assumere solo un insieme di valori numerabile
es: il numero estratto da un urna del lotto

continue : se possono assumere un insieme di valori continuo
es: il punto in cui una freccetta colpisce un bersaglio

Distribuzione di probabilità :
<u>funzione</u> che associa a ciascun possibile valore assunto dalla variabile aleatoria la corrispondente probabilità.



Esempio di distribuzione di probabilità discreta: gioco del lotto

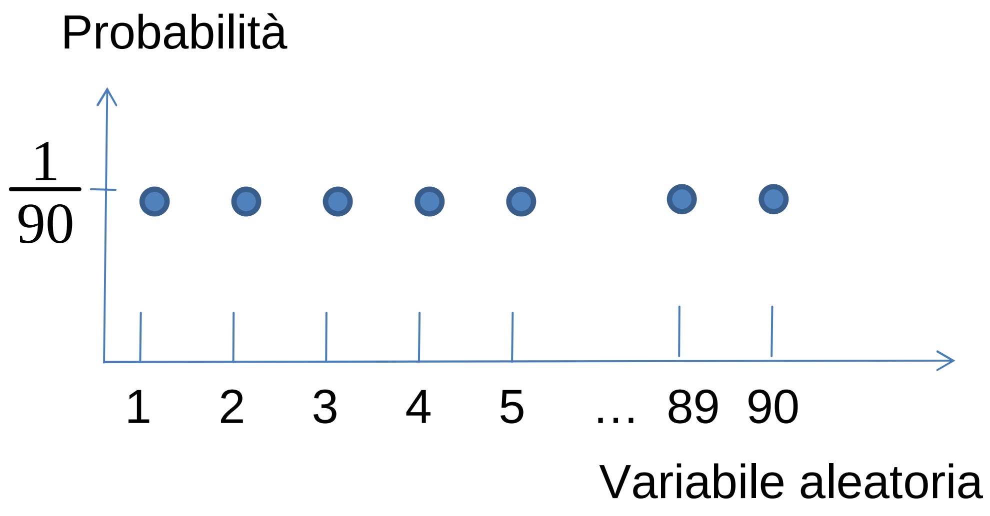
<u>variabile aleatoria</u> x_i : numero estratto dall'urna

i possibili valori assunti sono i numeri interi compresi fra 1 e 90

la probabilità associata a ciascuno di essi è 1/90

<u>distribuzione di probabilità</u> $P(x_i)$: la funzione che associa a ciascun numero intero fra 1 e 90 la probabilità di 1/90:

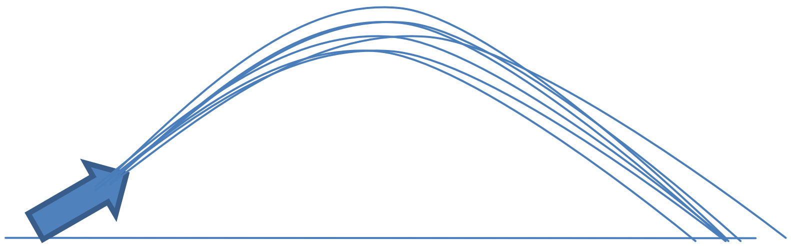
$$P(x_i) = 1/90 \quad \text{con } x_i = 1,\dots,90$$

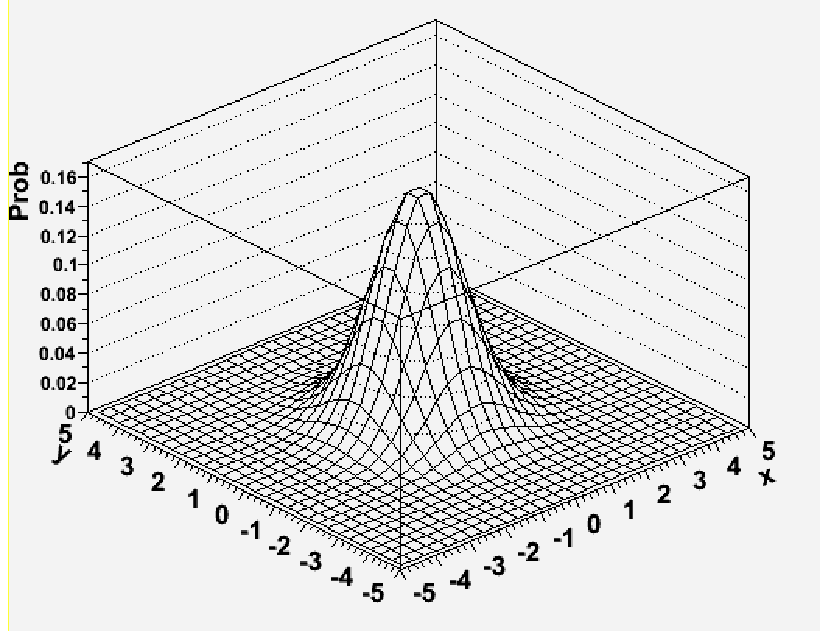


Esempio di distribuzione di probabilità continua: lancio di freccette su un bersaglio

variabile aleatoria (x,y) : le coordinate del punto in cui la freccetta colpisce il bersaglio

distribuzione di probabilità *P(x,y)* : una curva (bidimensionale) con probabilità più elevata nel centro del bersaglio e che decresce man mano che ci si allontana dal centro.





E' ragionevole pensare che la curva sia tanto più stretta quanto più buona è la mira di chi tira la freccetta.

Valore Atteso.

Valore atteso (o **speranza matematica**) di una variabile aleatoria : somma (o integrale) di tutti i possibili valori della variabile aleatoria moltiplicati per la loro probabilità.

Variabile aleatoria discreta (distribuzione di probabilità discreta):

$$\langle x \rangle = \Sigma_{i=1,N} \; x_i \cdot P(x_i)$$

Variabile aleatoria continua (distribuzione di probabilità continua):

$$\langle x \rangle = \int_{\text{tutti } gli\ x} x \cdot P(x) \cdot dx$$

Si dimostra che **il <u>valor medio</u> dei valori misurati di una variabile aleatoria in un numero molto grande di "esperimenti" <u>tende al valore atteso</u> della variabile aleatoria.**

Esercizio

Una serie di misure del calore specifico del ghiaccio eseguita con diversi metodi dà i seguenti valori:

c1 = 0.2129E+04 J/(kg·°C)
c2 = 505.6 cal/(kg·K)
c3 = 0.5912E-03 kWh/(kg·°C)
c4 = 0.4976 cal/(g·°C)
c5 = 0.5074 kcal/(kg·K).

Si trovi il valore medio c delle misure nel SI.

Formula risolutiva: c = (c1+c2+c3+c4+c5)/5

Converto tutte le misure nel SI:
c1 = 0.2129E+04 J/(kg·K)
c2 = 0.2116E+04 J/(kg·K)
c3 = 0.2128E+04 J/(kg·K)
c4 = 0.2083E+04 J/(kg·K)
c5 = 0.2124E+04 J/(kg·K)

Valor medio del calore specifico = 0.212E+04 J/(kg·K)

Tabella di conversione:
1 cal = 4.186 J
1 Wh = 3600 J

T(K) = T(°C) + 273.15
ma il “gradino” della scala resta uguale per cui il calore necessario per alzare la temperatura di 1 K è lo stesso che per alzarla di 1°C
1 J/K = 1 J/°C

Esercizio

Si effettuano diverse misure del raggio di base (R) e dell'altezza (H) di un cilindro, ottenendo le seguenti coppie di valori:

R_1 = 23.92 cm, H_1 = 17.59 cm
R_2 = 0.2428 m, H_2 = 0.1719 m
R_3 = 233.9 mm, H_3 = 172.4 mm

Trovare il valor medio del volume del cilindro.

Formula risolutiva: Vmedio = $(V_1+V_2+V_3)/3$
con $V_i = \pi \cdot R_i \cdot R_i \cdot h_i$, dove r_i = raggio base, h_i = altezza

Nel SI:
R_1 = 0.2392 m, H_1 = 0.1759 m   → V_1 = 0.3162E-01 m3
R_2 = 0.2428 m, H_2 = 0.1719 m   → V_2 = 0.3184E-01 m3
R_3 = 0.2339 m, H_3 = 0.1724 m   → V_3 = 0.2963E-01 m3

Valor medio del volume = 0.310E-01 m3

Definizioni di probabilità

Finora abbiamo inteso la probabilità in maniera intuitiva.

Formalizziamo il concetto, associando a ogni evento x un numero P(x) tale che:

- **P(evento certo) = 1**
- **P(evento impossibile) = 0**
- Per ogni evento x: **$0 \leq P(x) \leq 1$**
- Se x_1 e x_2 sono due eventi **mutuamente escludentesi**

  $$P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)$$
- Se $\{x_i, i=1,N\}$ è un **gruppo completo di eventi mutuamente escludentesi**

  $$\Sigma_i P(x_i) = 1$$

Esistono diverse definizioni possibili di probabilità che soddisfano questi assiomi

Probabilità classica

La probabilità, P(x), di un evento x è il rapporto tra il numero M di casi "favorevoli" (cioè il manifestarsi di x) e il numero totale N di risultati ugualmente possibili e mutuamente escludentesi.

Detta anche **probabilità oggettiva** o **probabilità a priori**: stima della probabilità di un evento dalla simmetria del problema.

Esempio: lancio di un dado non truccato
la probabilità di avere un numero qualsiasi è 1/6:

$$P(x) = \frac{\text{Numero di volte in cui può uscire x}}{\text{Numero di risultati possibili}} \qquad \frac{1}{6}$$

Probabilità empirica

Definizione **sperimentale** di probabilità come **limite della frequenza** misurabile in una serie di esperimenti.

La probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero di prove.

Nota : rispetto alla definizione classica sostituiamo il rapporto

$$\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

con

$$\frac{\text{numero di esperimenti con esito favorevole}}{\text{numero complessivo di esperimenti effettuati}}$$

In pratica, se abbiamo un esperimento ripetuto N volte ed un certo risultato x che accade M volte, la probabilità di x è data dal limite della **frequenza** (M/N) quando N tende all'infinito

$$P(x) = \lim_{N\to\infty} M/N$$

Vantaggio: possiamo applicare la definizione anche a

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è uniforme

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è ricavabile a priori dalla simmetria dell'esperimento.

Note: la probabilità empirica

…non è una proprietà solo dell'esperimento ma..
dipende del particolare gruppo su cui viene calcolata.

Es: la probabilità di sopravvivenza ad una certa età, calcolata su diversi campioni di popolazione a cui una stessa persona appartiene (maschi, femmine, fumatori, non fumatori, deltaplanisti, ecc.), risulta diversa.

…**si può rigorosamente applicare soltanto agli esperimenti ripetibili** per i quali il limite per N che tende all'infinito ha senso.

Es: Il risultato di una partita di calcio, il tempo atmosferico di domani e molte altre situazioni della vita quotidiana **non** sono soggette all'uso di questa definizione di probabilità.

Necessità di "operatività":
(quasi) tutti sono concordi nel definirla come
il valore della frequenza relativa di successo <u>su un numero di prove sufficientemente grande</u>

non necessariamente tendente all'infinito!!!!

Probabilità soggettiva

La probabilità di un evento x è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di x.

Definizione meno rigorosa, ma più spesso usata per formulare giudizi:

Es: “credo che domenica la mia squadra riuscirà a vincere”,
“è facile che mi capiti una domanda sulla probabilità all’esame di fisica”,

Nota:
Talvolta siamo forzati a assegnare un determinato grado di fiducia all’avverarsi di un evento.

Esempio:
il grado di fiducia che diamo al fatto che il gruppo su cui abbiamo calcolato la frequenza di un evento sia effettivamente rappresentativo del campione totale.

Teoremi sulla probabilità

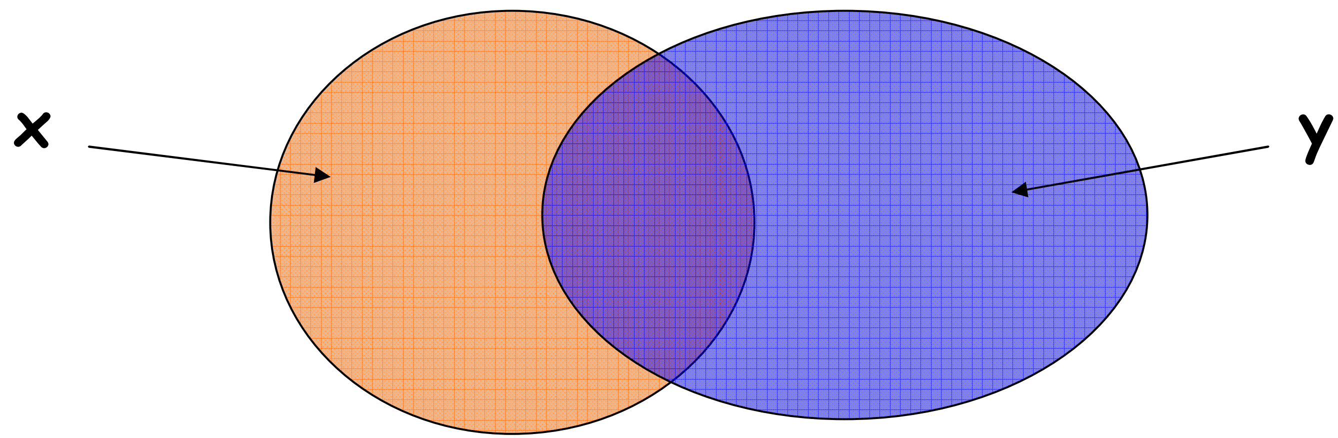
- Teorema della somma
- Teorema del prodotto
- Teorema della probabilità composta
- Teorema della probabilità totale
- Teorema di Bayes

Teorema della somma

Per due eventi qualsiasi x e y, non necessariamente mutuamente escludentesi, vale

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$$

(ovvero $P(x+y) = P(x) + P(y) - P(x \cdot y)$)

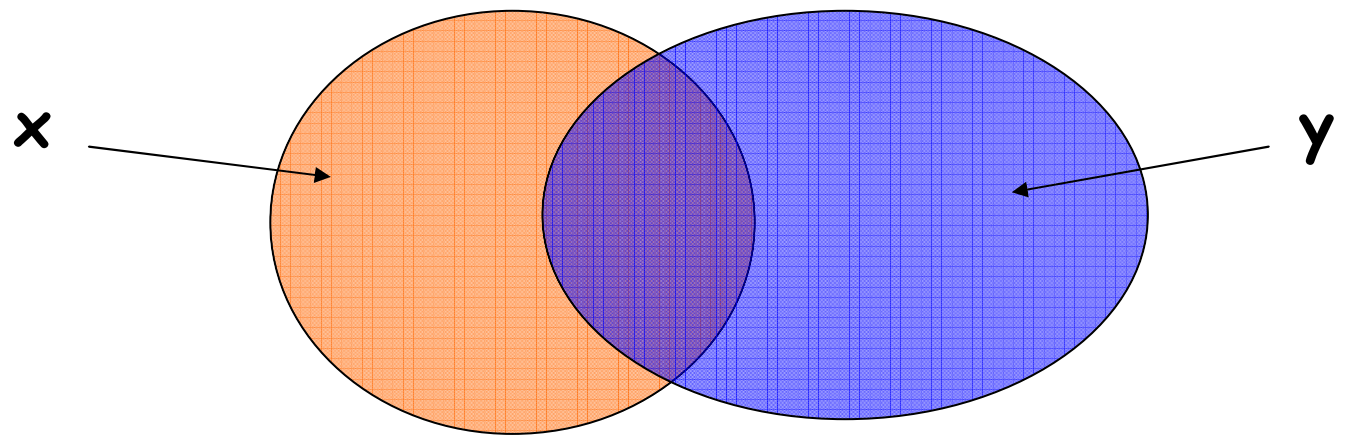


Teorema del prodotto

Per due eventi qualsiasi x e y, non necessariamente mutuamente escludentesi, vale

$$P(x \cap y) = P(x) + P(y) - P(x \cup y)$$

(ovvero $P(x \cdot y) = P(x) + P(y) - P(x+y)$)



Teorema della probabilità composta

Altro modo per esprimere il teorema del prodotto :

la probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro calcolata a condizione che il primo abbia luogo:

$$P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y|x)$$

Si noti che:

- se x e y sono mutuamente escludentesi $P(y|x)=0$ e $P(x \cap y) = 0$;
- se x e y sono indipendenti, $P(y|x) = P(y)$ e $P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y)$.

Esercizio

Un tiratore ha una probabilità uguale a 0.178 di fare centro ad un qualsiasi colpo. Se prende un autobus per recarsi al poligono di tiro qual è la probabilità che riceva un biglietto dell'autobus con un numero dispari e al tempo stesso di fare centro al secondo colpo?

P1 (biglietto dell'autobus con numero dispari) = 0.5
P2 (fare centro al secondo colpo) = 0.178
Al secondo colpo è la stessa che ad ogni altro colpo e …non dipende dal primo colpo

P = Probabilità che avvengano contemporaneamente (prodotto)
Eventi indipendenti.

Formula risolutiva: P = P1·P2, con P1 = 0.5 e P2 = .178

Probabilità = 0.890E-01

Esercizio

Un tiratore ha una probabilità uguale a 0.8918E+00 di fare centro al primo colpo. Se prende un autobus per recarsi al poligono di tiro qual è la probabilità totale di ricevere un biglietto dell'autobus con un numero dispari oppure di fare centro al primo colpo?

P1 (biglietto dell'autobus con numero dispari) = 0.5
P2 (fare centro al primo colpo) = 0.8918

P = Probabilità che avvenga almeno uno dei due (somma)

P(somma) = P1 + P2 – P(prodotto)

Eventi indipendenti → P(prodotto) = P1·P2

Formula risolutiva: P = P1 + P2 - P1·P2

con P1 = 0.5, P2 = 0.8918E+00
Probabilità totale = 0.946E+00

Esercizio su probabilità composta e probabilità condizionata

Gioco del lotto: 5 numeri fra 1 e 90 estratti casualmente da un'urna.

La probabilità che un numero N sia estratto è

$$P(N) = 5/90 = 1/18 = 0.055555... = 5.56\%$$

La probabilità che N non sia estratto è pertanto

$$P(\text{non } N) = 1 - P(N) = 0.944444\ldots = 94.44\%$$

Qual è la probabilità che N non venga mai estratto nel corso di 99 "estrazioni"?

Probabilità composta: l'evento "non N" deve apparire 99 volte:

$$\begin{aligned} P(99 \text{ volte non } N) &= P(\text{non } N) \cdot P(\text{non } N) \cdot \ldots \cdot P(\text{non } N) \qquad \{99 \text{ volte}\} \\ &= P(\text{non } N)^{99} = 0.94444^{99} = 0.003487 = 0.35\ \% \end{aligned}$$

Qual è la probabilità che N non venga mai estratto nel corso di 100 "estrazioni"?

$$\begin{aligned} P(100 \text{ volte non } N) &= P(\text{non } N) \cdot P(\text{non } N) \cdot \ldots \cdot P(\text{non } N) \qquad \{100 \text{ volte}\} \\ &= P(\text{non } N)^{100} = 0.94444^{100} = 0.003293 = 0.33\ \% \end{aligned}$$

Qual è la probabilità che N non venga estratto per 100 “estrazioni”, se già non è stato estratto per 99 “estrazioni”?

Nella centesima “estrazione” ci sono 90 numeri nell’urna INDIPENDENTEMENTE dalle estrazioni precedenti !

5 Sono estratti

P(non N nella estrazione n.100) = 85/90 = 94.44%

Ovvero la probabilità che nella centesima “estrazione” il numero N continui a non essere estratto, se non è mai stato estratto nelle 99 “estrazioni” precedenti (probabilità condizionale) è uguale a quella di non essere estratto in una sola “estrazione”:

P(non N alla estrazione n.100 | 99 volte non N) = P(non N) = 94.44%

Osservazione (ovvia…):
La probabilità che un numero venga estratto in un gioco casuale come il lotto, in cui le condizioni (urna e palline numerate) sono restaurate dopo ogni giocata, non dipende dal fatto che tale numero sia stato estratto o meno in una giornata precedente.

Esercizio

Un bambino lancia sassi contro una parete circolare di raggio 0.514 m in cui sono stati praticati 26 fori circolari del diametro di 5.70 cm. Se il bambino non mira e i sassi sono piccoli rispetto alle dimensioni dei fori, qual è il numero più probabile di sassi che passerà oltre la parete ogni 3670 lanci? Qual è la probabilità che un sasso rimbalzi ?

Soluzione:

Simmetria del problema → ogni cm2 ha la stessa probabilità di essere colpito → probabilità *p* di passare dall'altra parte è data dall'area favorevole (dei fori) *s* diviso l'area totale *S*:

$$p = s / S$$

con s = superficie totale dei fori = nfori$\cdot\pi\cdot r^2$

S = superficie della parete = $\pi\cdot R^2$

r = raggio dei fori = 0.285E-01 m

R = raggio della parete = 0.514E+00 m

Numero più probabile sassi = Nlanci·p = Nlanci·s / S = 11

La probabilità che rimbalzi $q = 1 - p = 1 - s/S = 0.997$

Esercizio

Uno schermo circonda completamente una sorgente radioattiva di fotoni, a parte una apertura circolare di $2r = 0.5$ cm di diametro posta a $R=10$ cm di distanza dalla sorgente.

Dietro all'apertura è posizionato un rivelatore che ha il 25% di efficienza per i fotoni emessi da quella sorgente (l'efficienza è la probabilità che un fotone che colpisce il rivelatore sia effettivamente registrato e rivelato).

Qual'è la probabilità che un fotone emesso dalla sorgente sia visto dal rivelatore posto dietro all'apertura?

Supponendo che la sorgente emetta $2.0 \cdot 10^3$ fotoni al secondo, su tutto l'angolo solido, qual è il numero più probabile di fotoni rivelati in un minuto di acquisizione?

Soluzione

L'area del foro è

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{r}^{\mathbf{2}} = 3.14159 \cdot (0.5 / 2)^2 \text{ cm}^2 = 0.1966 \text{ cm}^2$$

L'area della superficie circolare alla distanza a cui e' posto il foro è

$$\mathbf{S} = \mathbf{4}\, \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{R}^{\mathbf{2}} = 4 \cdot 3.14159 \cdot (10)^2 \text{ cm}^2 = 1256.6 \text{ cm}^2$$

La probabilità che un fotone emesso dalla sorgente centri il foro è

$$\mathbf{P}_{\mathbf{geom}} = \mathbf{s} / \mathbf{S} = 0.1966 \,(\text{cm}^2) / 1256.6 \,(\text{cm}^2) = 0.156 \cdot 10^{-3}$$

La probabilità che un fotone emesso dalla sorgente centri il foro e sia rivelato è

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{geom}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{efficenza}} = \mathbf{0.156 \cdot 10^{-3} \cdot 0.25 = 3.9 \cdot 10^{-5}}$$

(probabilità composta di due eventi indipendenti: centrare il buco e essere registrato dal rivelatore)

In un minuto la sorgente emette (isotropicamente su tutto l'angolo solido)

$$\mathbf{N} = 2.0 \cdot 10^3 \text{ (fotoni / s)} \cdot 60 \text{ (s)} = 1.20 \cdot 10^5 \text{ fotoni}$$

Siccome ciascuno di questi fotoni ha probabilità **P** di essere rivelato, il numero medio di fotoni rivelati dopo un minuto di acquisizione è

$$\mathbf{< N_{riv} >} = \mathbf{N \cdot P} = 4.7 \quad \text{fotoni}$$

Il numero più probabile di fotoni (da pensare come il numero su cui si dovrebbe scommettere volendo avere la più alta probabilità di vittoria) è il numero intero più vicino al valor medio:

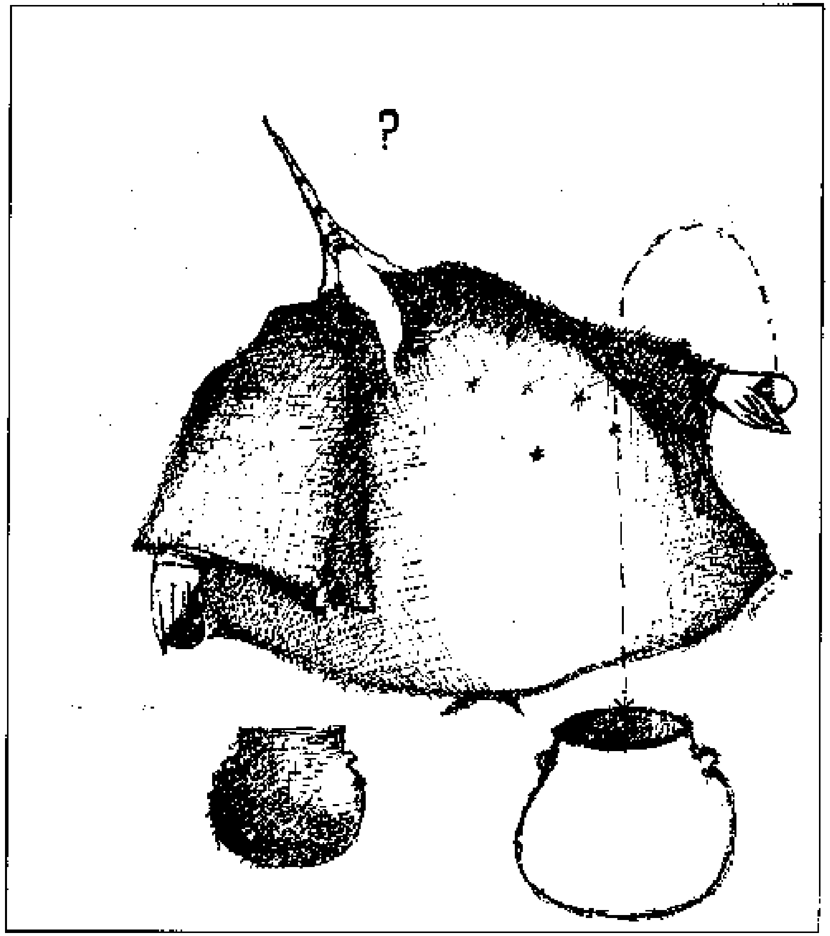
$$\mathbf{N_{riv}\ (\text{più probabile}) = 5\ \text{fotoni}}$$

Esercizio: problema dell'astrologo

Un astrologo dopo aver sbagliato una profezia viene multato a pagare una multa molto salata.

Gli viene offerta la possibilità di condono: riceve 4 palline (due bianche e due nere), che può disporre come vuole in 2 urne; se in una successiva estrazione esce una pallina bianca la multa è condonata, se esce nera no.

Qual è la disposizione più favorevole all'astrologo?



Qual è la disposizione più favorevole all'astrologo?