Analisi degli Errori di Misura

Misure di grandezze fisiche

La misura di una grandezza fisica è descrivibile tramite tre elementi:

• **valore più probabile**;

• **incertezza** (o "**errore**") ossia la precisione con cui il valore più probabile approssima il valore vero;

• **unità di misura**.

Solo scrivendo **valore più probabile, errore, e unità di misura** forniamo una descrizione sufficientemente completa e accurata della grandezza misurata.

L'errore sulla misura determina il **numero di cifre significative** con cui riportare il valore più probabile.

Non ha senso scrivere la quarta cifra significativa se già c'è una indeterminazione sulla terza cifra!

Misure dirette e misure indirette

Misura diretta quando si confronta direttamente la grandezza misurata con un campione di misura nota.

Esempio: misura di lunghezza con un regolo graduato.

Misura indiretta se ciò che si misura non è la grandezza che interessa, ma altre che siano legate a essa da relazioni funzionali.

Esempio: misura della *distanza* di un oggetto con un sonar.

ovvero

misura del *tempo* percorso dall'onda sonora per andare e tornare dall'oggetto; conoscendo la velocità di propagazione dell'onda posso ricavare la distanza dell'oggetto che l'ha riflessa.

Misure e errori di misura (incertezze)

La **misura** è la stima del **valore vero** di una **grandezza**.

Limiti alla precisione di questa stima:

• **Sensibilità dello strumento di misura**
l'ultima cifra che può essere letta
oppure
la frazione di divisione che può essere apprezzata;

• **Fluttuazioni casuali del valore misurato**

• Possibilità di **errori** nella **procedura** e/o nello **strumento** (errori sistematici: i più difficili da trattare).

$$X_{mis} = X_{vero} + \varepsilon$$

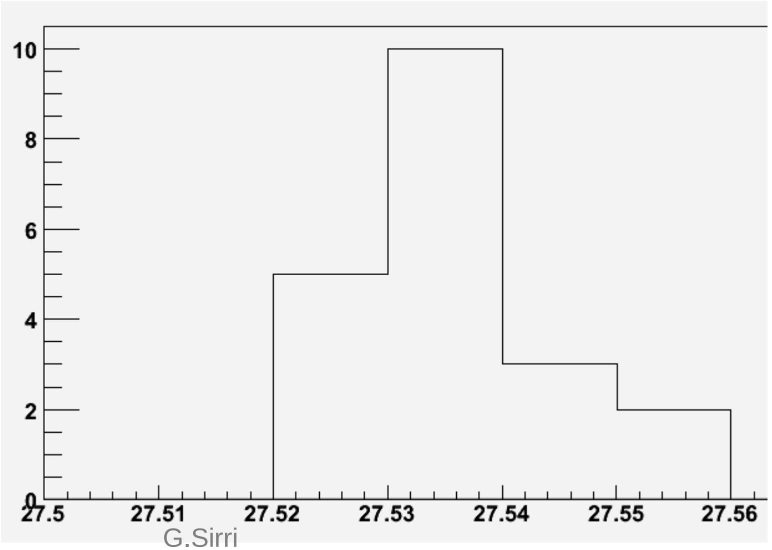
Istogramma di frequenza

Il risultato della misura di una grandezza fisica è una *variabile aleatoria*.

Possiamo **ripetere la misura** molte volte per studiare le variazioni del risultato (se ce ne sono) dovute agli errori (cioè ottenere la *distribuzione di probabilità* della variabile aleatoria).

Queste distribuzioni possono essere riassunte in Tabelle o in Istogrammi o ulteriormente condensate in un numero minore di parametri.

n.prova	risultato
0	27.525
1	27.531
2	27.539
3	27.529
4	….



Se la **sensibilità dello strumento** è **maggiore delle fluttuazioni** derivanti dalla procedura di misurazione, misure ripetute daranno lo stesso valore numerico di $\mathbf{X}_{\mathbf{mis}}$.

➔ L'incertezza su $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ è data dalla sensibilità dello strumento.

Esempio, misura di lunghezza con un metro con sensibilità 1 mm:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{vero}} = \mathbf{27.537609076\ \ldots\ cm}$$
$$\mathbf{X}_{\mathbf{mis}} = \mathbf{27.5\ cm}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.1\ cm}$$

$$\mathbf{X = (27.5 \pm 0.1\ )\ cm}$$

In realtà, con un occhio allenato potremmo accorgerci che X_{vero} si trova fra 27.5 e 27.6 cm, e usare la **mezza tacca** come incertezza:

$$\mathbf{X = (27.55 \pm 0.05)\ cm}$$

L’incertezza sul risultato della misura (o **errore sulla misura**) può essere espresso come:

- **errore assoluto** indicato con la stessa unità di misura del valore misurato;

- **errore relativo** indicato come frazione del valore misurato.

L’errore relativo viene spesso espresso in percentuale (%) del valore misurato: la percentuale non è altro che un’altra maniera di indicare una frazione.

Esempio:

$X = (27.5 \pm 0.1)$ cm

Errore assoluto → 0.1 cm

Errore relativo → $0.1 / 27.5 = 1/275$

$\sim 0.0036 = 0.36$ %

Se le **fluttuazioni** sono **più grandi della sensibilità dello strumento**, <u>misure ripetute</u> daranno risultati diversi.

Se le fluttuazioni sono **casuali**, i vari valori misurati x_i si distribuiranno **casualmente** (cioè a volte prima e a volte dopo) attorno a X_{VERO}.

$$x_i = X_{VERO} + \varepsilon_i$$

Se si compie un numero molto grande di misure ("**al limite di un numero infinito di operazioni di misura**") le fluttuazioni tenderanno a compensarsi, e **il valor medio delle misure tenderà al valore vero**:

$$\langle \varepsilon_i \rangle \rightarrow 0$$
$$\langle x_i \rangle \rightarrow X_{VERO}$$

Purtroppo non possiamo fare infinite misure…

dobbiamo **stimare** $\boldsymbol{X_{VERO}}$ e la precisione con cui lo conosciamo da un numero finito di misure.

La stima migliore di $\boldsymbol{X_{VERO}}$ è la <u>il valor medio di N misure</u>:

$$X_{medio} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

e, di conseguenza, $\boldsymbol{X_{medio}}$ è una approssimazione di $\boldsymbol{X_{VERO}}$, a meno di un incertezza.

$$\boldsymbol{X_{VERO} = X_{medio} \pm \Delta X}$$

$\boldsymbol{\Delta X}$ è l'incertezza con cui conosciamo $\boldsymbol{X_{VERO}}$ data la sua miglior stima $\boldsymbol{X_{medio}}$

Valutiamo l'entità dell'errore Δ**x** …

Proviamo a usare il *valor medio degli scarti* **$< X_i - X_{medio} >$** ?
Purtroppo è sempre uguale a 0 per definizione di media.
→ non possiamo utilizzarlo per stimare la precisione della misura.

Chiamiamo **varianza** il *valor medio del quadrato degli scarti* (scarti = differenze delle singole misure dal valor vero):

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_{VERO})^2}{N}$$

La **stima della varianza** (Scarto quadratico medio) si ottiene sostituendo a $\mathbf{X_{VERO}}$ la sua stima $\mathbf{X_{medio}}$ e dividendo per N-1, anzichè per N (*):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_{medio})^2}{N-1}$$

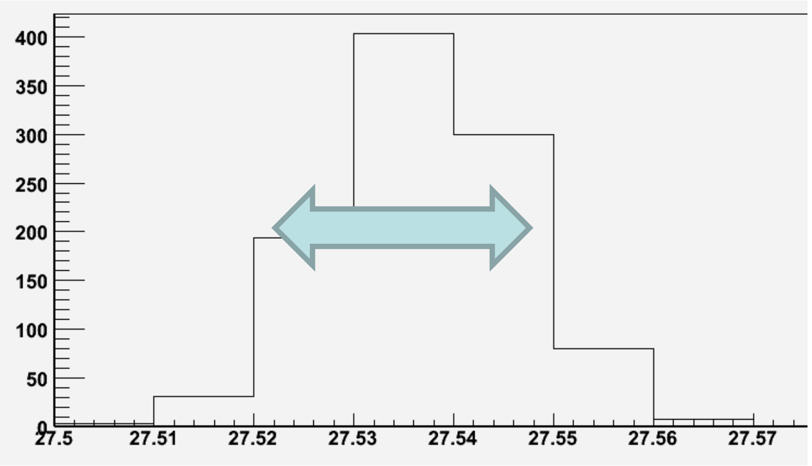
(*) N-1 anziché N perchè uno dei gradi di libertà è stato usato per calcolare $\mathbf{X_{medio}}$

Infine …

considieriamo la radice quadrata dello scarto quadratico medio (**<u>deviazione standard</u>**):

$$\Delta x = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_{medio})^2}{(N-1)}}$$

La deviazione standard è un <u>indicatore</u> della larghezza della distribuzione delle misure.



Se abbiamo delle misure distribuite in maniera casuale e centrate attorno al loro valor medio, *<u>la deviazione standard è la stima migliore dell'errore</u> con cui si può conoscere il valore vero della grandezza misurata partendo* ***<u>da una singola misura</u>*** **.**

la deviazione standard è l'incertezza statistica con cui si distribuisce la singola misura attorno al valor vero.

Supponiamo di fare **tante <u>serie</u> di misure**....

Ognuna di queste serie è caratterizzata da un suo valor medio.

I valori medi sono più vicini al valore "vero" rispetto alle singole misure; avranno perciò una distribuzione *più stretta* di quella delle singole misure.

Si **dimostra** che **<u>l'errore da associare al valor medio di tutte le misure</u>** è:

$$\Delta X_{medio} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - X_{medio})^2}{(N-1)}}$$

(cioè la deviazione standard divisa per la radice di N)

Osservazioni:

• All’aumentare del numero delle misure varianza (e deviazione standard) tende ad un valore costante.

MA, **l’errore sulla media diminuisce come l’inverso della radice quadrata del numero di misure**.

• Un insieme di tante misure (distribuzione di misure) è stato riassunto da due soli valori: **la media e la deviazione standard** (oppure l’errore sulla media = deviazione standard / $\sqrt{\text{numero delle misure}}$).

Abbiamo perso il dettaglio (le singole misure), ma abbiamo estratto proprio e solo le quantità che servono ai nostri scopi.

Descrizioni sempre più accurate della distribuzione di partenza si potranno ottenere introducendo ulteriori parametri (es: asimmetrie, etc.).

Misure di Grandezze Fisiche: Riepilogo

Una grandezza fisica ha un suo **"valore vero"**, che noi cerchiamo di **stimare** attraverso un'operazione di misura.

Fare una misura vuol dire descrivere una grandezza fisica per mezzo di <u>tre elementi</u>:

- **valore più probabile**;
- **precisione** (altrimenti detta "**errore**" sulla misura);
- **unità di misura**

Le misure possono essere **dirette** o **indirette**.

La precisione della misura può essere determinata da:

- **sensibilità** dello strumento di misura;
- **fluttuazioni casuali** fra un'operazione di misura e l'altra
- **errori** nella procedura e/o nello strumento (**errori sistematici**)

L'errore su una misura può essere indicato come **errore assoluto**, oppure **errore relativo** (cioè come frazione del valore misurato)

La grandezza da misurare ha un suo valore atteso **X** $_{\textbf{vero}}$

Nel caso di misure con fluttuazioni casuali da un'operazione di misura all'altra, la stima migliore di **X** $_{\textbf{vero}}$ è la **<u>media di N misure</u>** :

$$X_{medio} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

L'errore da associare alla singola misura è la **<u>deviazione standard</u>**:

$$\Delta x = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - X_{medio})^2}{(N-1)}}$$

Mentre **<u>l'errore da associare al valor medio</u>** è:

$$\Delta X_{medio} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - X_{medio})^2}{(N-1)}}$$

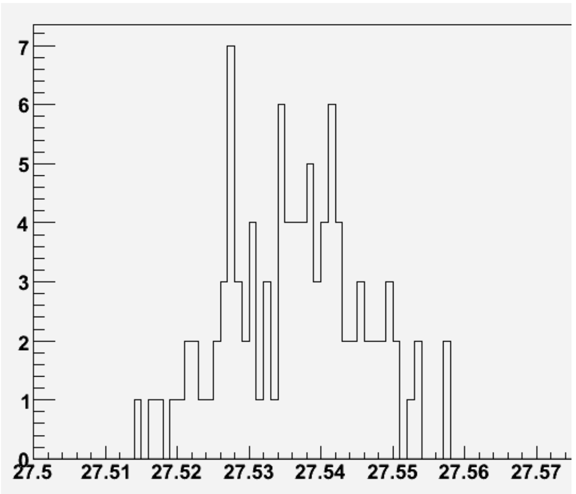
(cioè la deviazione standard divisa per la radice di N)

Verso una interpretazione probabilistica

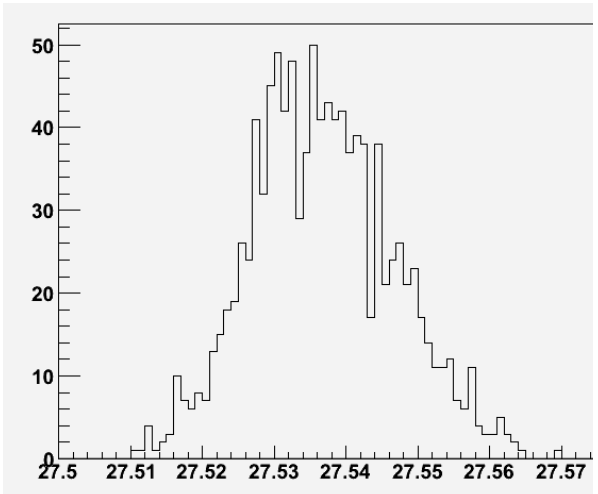
Qual è la probabilità che il valore vero si trovi all'interno dell'intervallo **valore più probabile ± errore ?**

<u>Osservazione</u>:

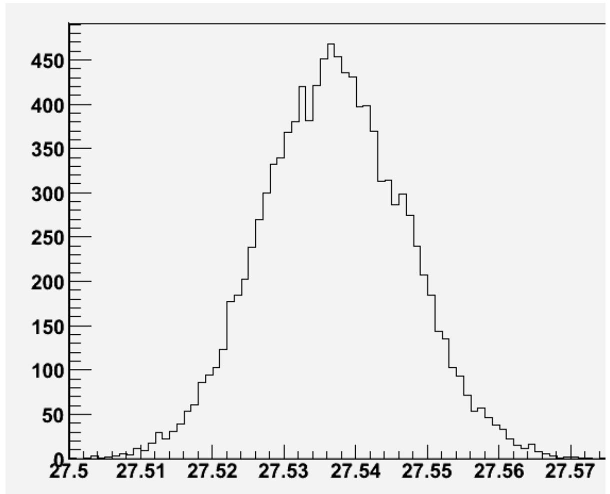
se i risultati delle misure sono **casuali** e **indipendenti fra loro**, l'**istogramma di frequenza** tende ad assumere una distribuzione simmetrica a campana...



100 misure



1000 misure



10000 misure

…centrata sul valor medio e con larghezza dell'ordine della deviazione standard.

PARTE 2

RIASSUNTO:

Misure **dirette** e Misure **indirette**

Errore **assoluto** (185±3) cm
Errore **relativo** (frazione del valore misurato) 185 cm ± 2%

L'errore si esprime con UNA SOLA cifra significativa.

L'errore determina il NUMERO di cifre significative con cui si DEVE approssimare il valore più probabile.

Es: (27.5576 ±3.991) cm

errore con 1 sola
cifra significativa

(27.5576 ± 4) cm

il valore più probabile
è arrotondato …

(28 ± 4) cm

RIASSUNTO:

SENSIBILITA' STRUMENTALE > FLUTTUAZIONI CASUALI

Ripetendo la misura: ottengo sempre lo stesso valore $x_{\mathbf{mis}}$

⇓

Valore più probabile $X = x_{\mathbf{misurato}}$

Errore ΔX**= sensibilità dello strumento**

Il valor vero è contenuto fra $X - \Delta X$ *e* $X + \Delta X$ *con probabilità* ***100%***.

RIASSUNTO:

SENSIBILITA' STRUMENTALE < FLUTTUAZIONI CASUALI

<u>Ripetendo la misura</u>: ottengo valori diversi $x_1, x_2, x_3 \ldots x_N$

Valore più probabile = Valor medio

$$X = X_{medio} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Errore = deviazione standard della media

$$\Delta X = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - X_{medio})^2}{(N-1)}}$$

Il <u>valor vero</u> è contenuto fra $X - \Delta X$ e $X + \Delta X$ *con probabilità* ***68.3%***.

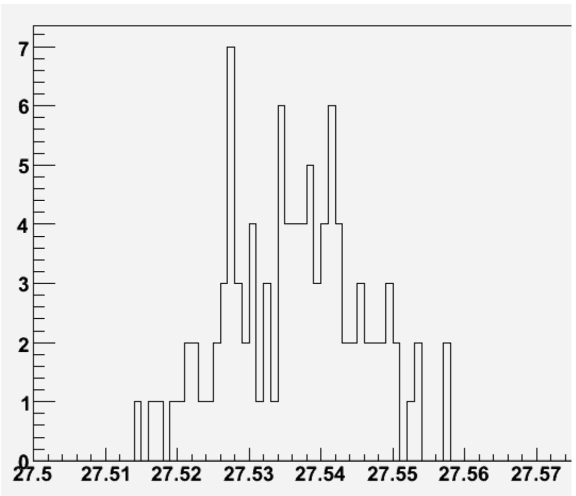
fra $X - 3\Delta X$ e $X + 3\Delta X$ *con probabilità* ***99.7%***.

Qual è la probabilità che il valore vero si trovi nell'intervallo **valore più probabile ± errore ?**

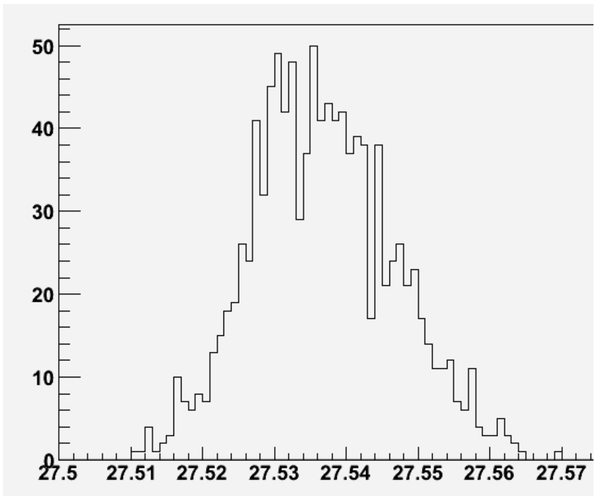
Osservazione:

Se le **misure** sono **casuali** e **indipendenti fra loro**

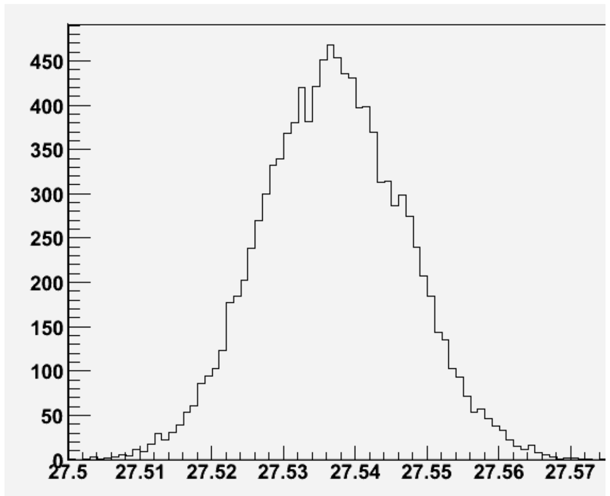
⇨ l'**istogramma di frequenza** tende ad assumere forma a campana...



100 misure



1000 misure

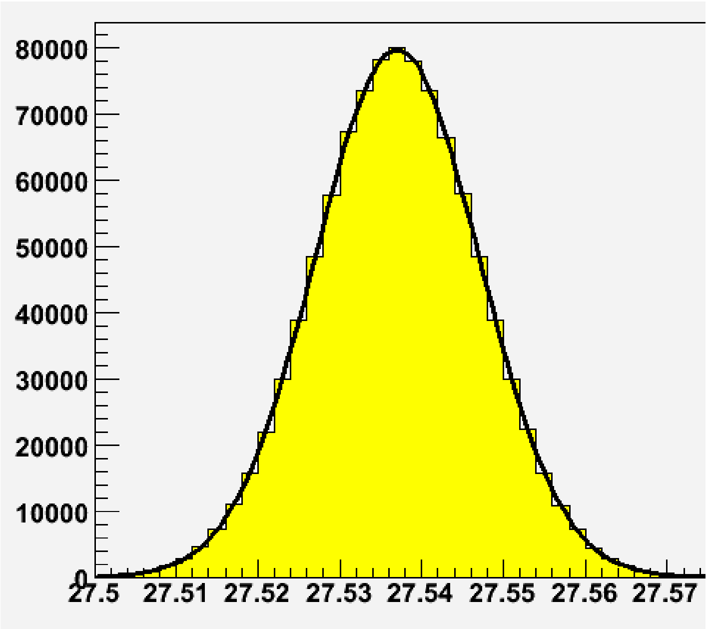


10000 misure

…centrata sul valor medio

…con larghezza dell'ordine della deviazione standard

…cioè secondo la **distribuzione normale** (o **di Gauss** o **gaussiana**)



$$f(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con:

N = numero di misure

μ = valor medio

σ = deviazione standard

<u>Teorema del limite centrale :</u>

La distribuzione della *somma* di un numero elevato di variabili casuali indipendenti tende a distribuirsi *normalmente*, cioè una **distribuzione normale** avente come **μ** la somma dei valori medi delle misure e come **σ²** la somma delle varianze delle misure.

Interpretazione probabilistica

Dalle proprietà della funzione di Gauss

⇨ una **nuova misura** avrà una probabilità:

	68.3%		**1 σ**	
del	**95.4%**	**di stare a**	**2 σ**	**dal valor medio della distribuzione**
	99.7%		**3 σ**	

σ = deviazione standard

Analogamente:

Il **valor medio di una serie di misure** avrà una probabilità:

	68.3%		**1 σ / √ N**	
del	**95.4%**	**di stare a**	**2 σ / √ N**	**dal valor vero**
	99.7%		**3 σ / √ N**	

σ / √ N = deviazione standard della media

Esempi

(Tratti da misure fatte con il viscosimetro a caduta nel laboratorio dell'anno scorso)

Proviamo a verificare alcuni tipi di distribuzione di misure e a valutarne gli errori associati:

- **Misura del diametro di una sferetta di acciaio**

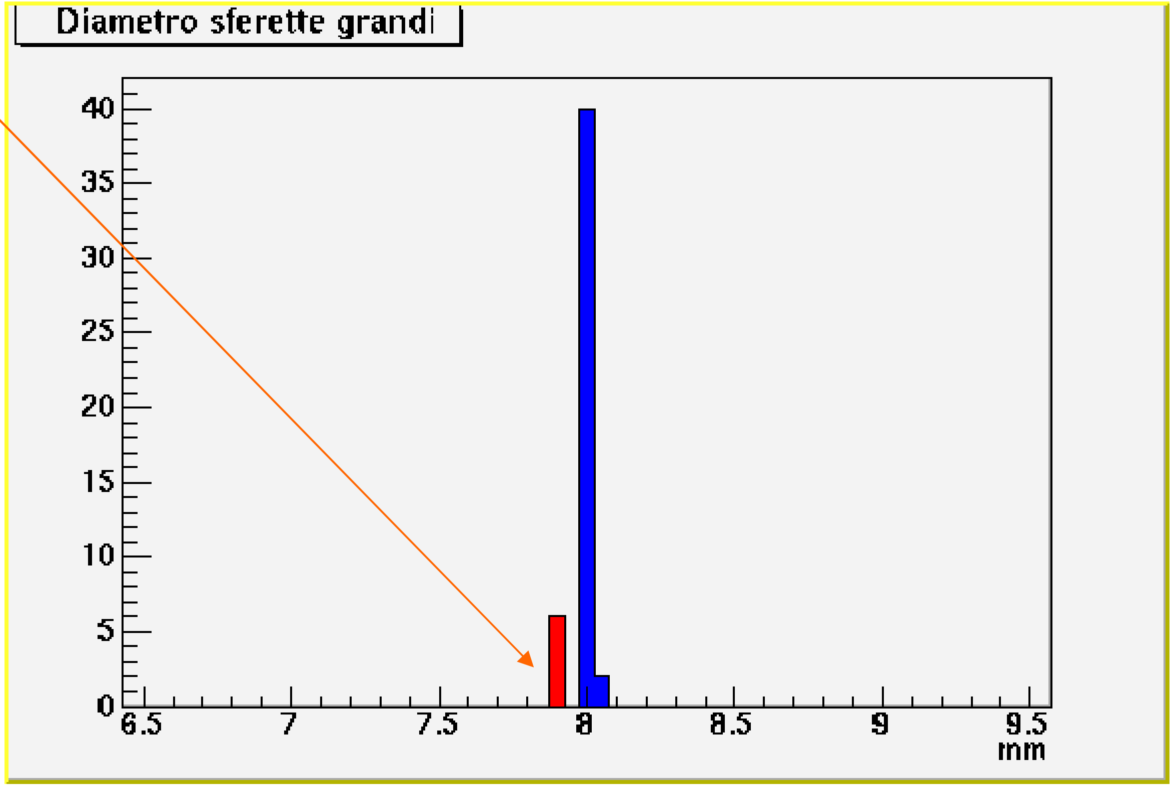
- **Misura del tempo di caduta della sferetta nel fluido**

Istogrammi di frequenza e distribuzione limite

Diametro della sferetta d'acciaio

Tutte le misure in rosso provengono dallo stesso gruppo: probabile errore sistematico.

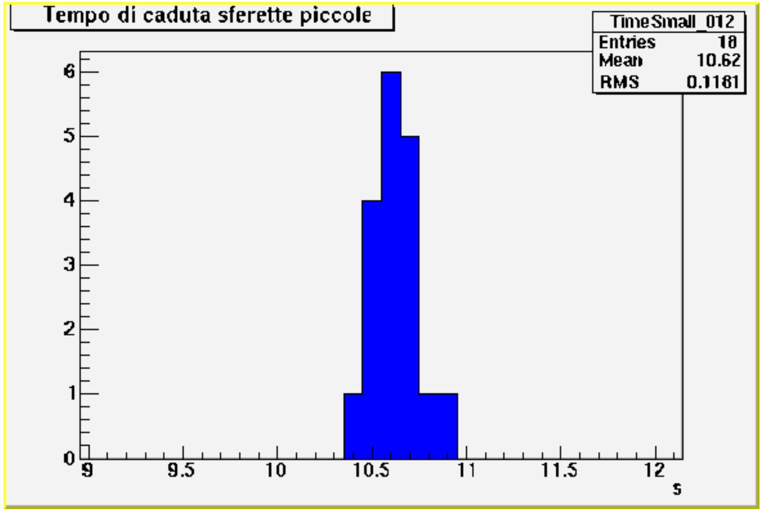
Vista la sostanziale costanza di tutte le altre misure, posso affermare che *la fluttuazione casuale è più piccola della sensibilità del calibro*: pertanto la sensibilità del calibro è la miglior stima della incertezza della misura.



D = (8.00 ± 0.05) mm

Istogrammi di frequenza e distribuzione limite

Tempo di caduta



$\langle t \rangle = 10.62$ s

$\sigma = 0.12$ s

$\Delta(\langle t \rangle) = \sigma/\sqrt{N} = 0.027$ s

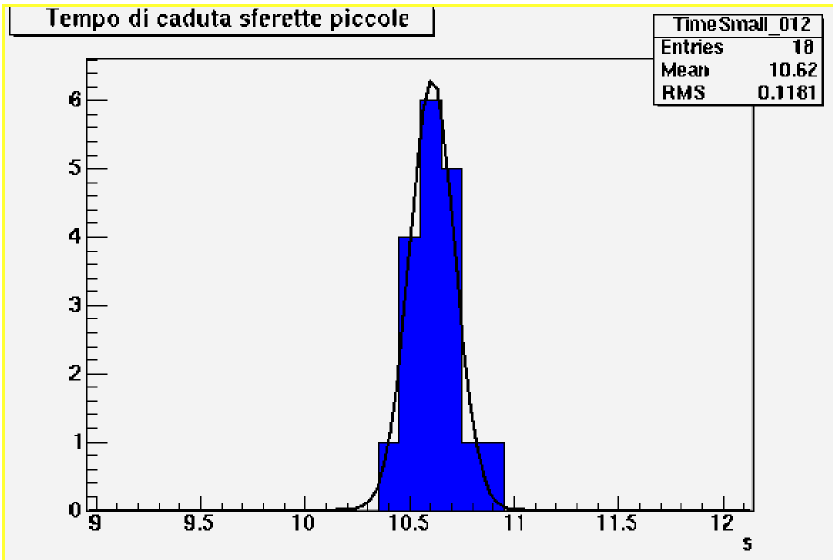
$t = (10.62 \pm 0.03)$ s

Si può agevolmente adattare una curva gaussiana alla distribuzione dei tempi misurati rappresentata nell'istogramma di frequenza.

La curva che meglio si adatta ai dati ha come parametri

$\mu = (10.61 \pm 0.03)$ s

$\sigma = (0.11 \pm 0.02)$ s



Propagazione degli errori

Misure dirette:
l'errore sulla misura si ricava dalla sensibilità dello strumento oppure dall'errore sulla media di più misure ripetute.

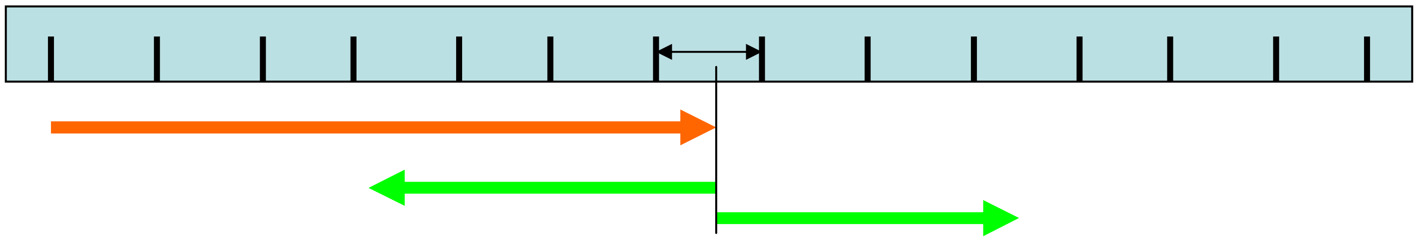
Misure indirette, il valore che ci interessa è dato da una combinazione di altre misure (secondo una **relazione matematica**).

come posso determinare **quale errore associare** ?

Bisogna sapere come propagare gli errori.

Propagazione degli errori
Somma o differenza di due grandezze

L'incertezza **assoluta** sulla somma (X = A + B) o sulla differenza (X = A - B) di due grandezze è uguale.



Valor medio: $<X_i> = <A_i> + <B_i>$ $<X_i> = <A_i> - <B_i>$

Errore: $\boldsymbol{\Delta X = \sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}}$

<u>si sommano (in quadratura) gli errori assoluti</u>.

Propagazione degli errori
Prodotto di una costante per una grandezza

$$X = \mathbf{k} \cdot A$$

Valor medio: $< X_i > = \mathbf{k} \cdot < A_i >$

Errore: $\Delta X = \mathbf{k} \cdot \Delta A$

NOTA: L'errore relativo non cambia

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta A}{A}$$

Propagazione degli errori
Prodotto (o rapporto) di due grandezze

$X = A \cdot B$ $\qquad$ $X = A / B$

Valor medio: $< X_i > = < A_i > \cdot < B_i >$ $\qquad$ $< X_i > = < A_i > / < B_i >$

Errore:

$$\frac{\Delta X}{X} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

si sommano in quadratura gli errori **relativi**.

Propagazione degli errori
Elevazione a potenza di una grandezza

$X = A^n \qquad = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots$ **n** volte

È un prodotto → si sommano gli **errori relativi**.

…ma **linearmente** perché non sono indipendenti
[le fluttuazioni dei singoli fattori vanno nella stessa direzione e non si compensano]:

$\Delta X/X = \Delta A/A + \Delta A/A + \Delta A/A + \ldots$ **n** volte

$$\boldsymbol{\Delta X/X = n \cdot (\Delta A/A)}$$

Propagazione degli errori nella misura di densità di una sfera

Utilizziamo le regole di propagazione degli errori per valutare l'errore sulla misura di densità di una sfera (misura <u>indiretta</u>).

$$\rho = M / V$$

$$\text{con } V = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3 = 1/6 \cdot \pi \cdot d^3$$

M = massa, V = volume, r = raggio, d = 2 · r = diametro

La formula per il calcolo dell'errore associato alla misura:

$$\Delta V / V = 3 \cdot \Delta d / d$$

$$(\Delta \rho / \rho)^2 = (\Delta M / M)^2 + (\Delta V / V)^2$$

Propagazione degli errori nella nostra misura di viscosità

Utilizziamo le regole di propagazione degli errori per valutare l'errore sulla misura finale, e per studiare degli accorgimenti per migliorare la precisione della nostra misura di viscosità.

Formula per la misura indiretta della viscosità col viscosimetro a caduta:

$$\eta \;=\; 2/9 \cdot r^{2} \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g \cdot T / L$$

Formula per il calcolo dell'errore associato alla misura:

$$(\Delta\eta / \eta)^2 = (2 \cdot \Delta r / r)^2 + (\Delta(\rho_S - \rho_F) / (\rho_S - \rho_F))^2 + (\Delta T / T)^2 + (\Delta L / L)^2$$