

# Elementi di probabilità

**Concetti fondamentali**

**Definizione di probabilità**

**Teoremi sulla probabilità**

**Esercizi**

# Relazione fra eventi

L'evento  $A$  è **dipendente** dall'evento  $B$  se la probabilità che  $A$  accada dipende dal fatto che accada  $B$ .

Esempio:  $A$  = "La Virtus vince lo scudetto del basket",  
 $B$  = "I più forti giocatori della Virtus si infortunano durante i play-off"

L'evento  $A$  è **indipendente** dall'evento  $B$  se la probabilità che  $A$  accada non dipende da  $B$

Esempio:  $A$  = "La Virtus vince lo scudetto del basket"  
 $B$  = "Il Bologna vince il campionato di serie A"

Due eventi  $A$  e  $B$  sono **mutuamente escludentesi** (o **incompatibili**) se non possono verificarsi contemporaneamente.

Esempio:  $A$  = "La Virtus vince lo scudetto del basket"  
 $B$  = "La Scavolini Pesaro vince lo scudetto del basket"

Eventi casuali formano un **gruppo completo di eventi** se **almeno uno** di essi deve **necessariamente** accadere.

(Esempio:  $A_1 \dots A_{16}$  = "L'i-esima squadra del campionato vince lo scudetto")

**Eventi contrari** sono due eventi mutuamente escludentesi che formano un gruppo completo.

Esempio: A = "Nel lancio di una moneta esce Testa"

B = "Nel lancio di una moneta esce Croce"

A = non B

Due o più eventi casuali si dicono **equiprobabili** se la **simmetria** dell'esperimento permette di supporre che essi abbiano tutti la **stessa probabilità** di accadere.

(Esempio:  $A_1 \dots A_6$  = "Nel lancio di un dado non truccato esce la faccia  $i$ ")

Osservazione (che in realtà potremmo fare solo dopo aver definito la probabilità...): in un gruppo completo di N eventi equiprobabili e mutuamente escludentesi, la probabilità di ciascuno di essi è  $P = 1/N$

# Somma e Prodotto di Eventi

**Somma** di due eventi  $A$  e  $B$  è l'evento  $C$  che consiste nel verificarsi di  $A$  o di  $B$  o di entrambi.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A+B) = P(A \text{ o } B)$$

Somma di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di almeno uno di essi.

**Prodotto** di due eventi  $A$  e  $B$  è l'evento  $C$  che consiste nel verificarsi di  $A$  e di  $B$  contemporaneamente.

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A \text{ e } B)$$

Prodotto di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di tutti loro contemporaneamente.

# Probabilità condizionata

Probabilità che un evento  $A$  accada  
a condizione (“**dopo che**”) si sia verificato l'evento  $B$

$$P(A|B)$$

Esempio:

$A$  = passare l'esame di fisica;

$B_0 \dots B_3$  = risolvere correttamente 0...3 esercizi allo scritto.

Chiaramente:  $P(A|B_3) > P(A|B_2) > P(A|B_1) > P(A|B_0)$

*Nota:*

***Potrebbe succedere che  $P(A)$  sia piccola, mentre  $P(A|B)$  sia molto più grande.***

*Es:*  $A$  = “L'ultima in classifica vince il campionato di calcio di serie A”,

$\Rightarrow P(A)$  è molto piccola.

$B$  = “Tutte le altre squadre di serie A sono squalificate per illecito sportivo”,

$\Rightarrow$  anche  $P(B)$  è piccola,

*ma  $P(A|B) \sim 1$  !*

# Variabili aleatorie. Distribuzione di Probabilità

**Variabili aleatorie** : grandezze che, nel corso di una prova, possono assumere un valore sconosciuto a priori.

Si distinguono in:

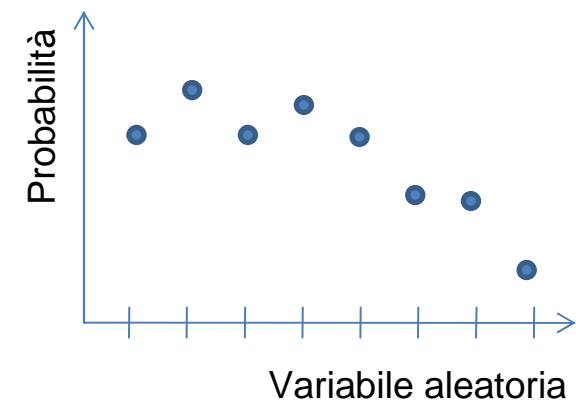
**discrete** : se possono assumere solo un insieme di valori numerabile

es: il numero estratto da un'urna del lotto

**continue** : se possono assumere un insieme di valori continuo

es: il punto in cui una freccetta colpisce un bersaglio

**Distribuzione di probabilità** :  
funzione che associa a ciascun possibile valore assunto dalla variabile aleatoria la corrispondente probabilità.



## Esempio di distribuzione di probabilità discreta: gioco del lotto

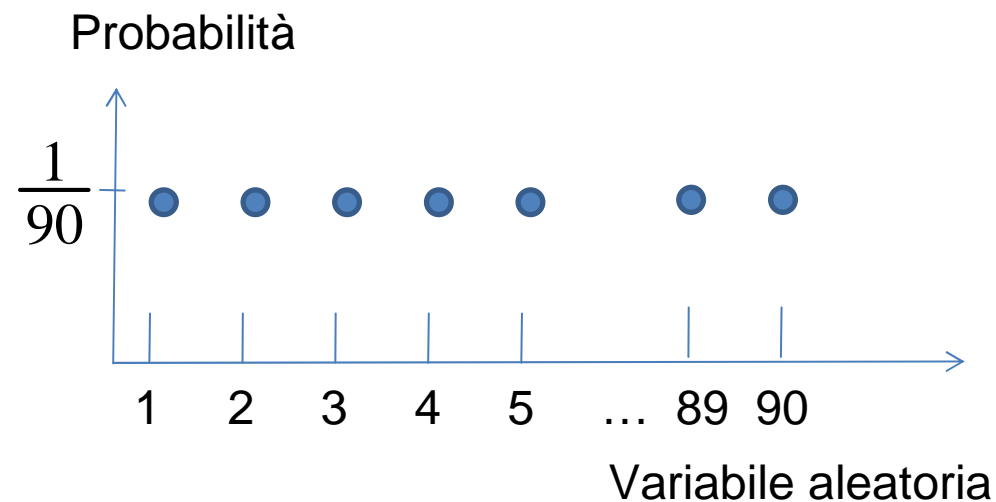
variabile aleatoria  $x_i$  : numero estratto dall'urna

*i possibili valori assunti sono i numeri interi compresi fra 1 e 90*

*la probabilità associata a ciascuno di essi è  $1/90$*

distribuzione di probabilità  $P(x_i)$  : la funzione che associa a ciascun numero intero fra 1 e 90 la probabilità di  $1/90$ :

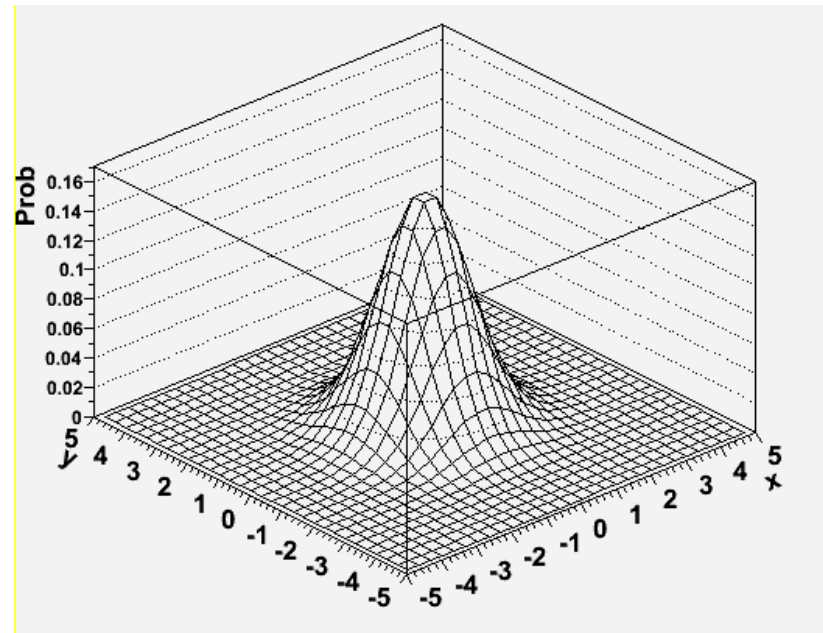
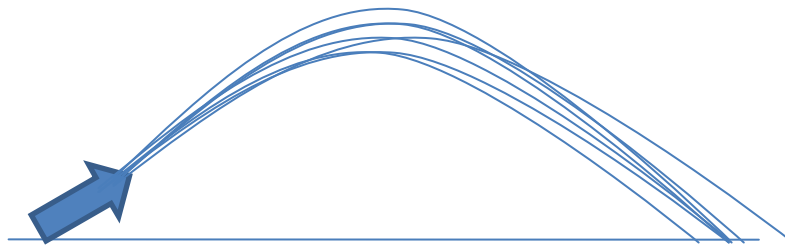
$$P(x_i) = 1/90 \quad \text{con } x_i = 1, \dots, 90$$



## Esempio di distribuzione di probabilità continua: lancio di freccette su un bersaglio

variabile aleatoria  $(x,y)$  : le coordinate del punto in cui la freccetta colpisce il bersaglio

distribuzione di probabilità  $P(x,y)$  : una curva (bidimensionale) con probabilità più elevata nel centro del bersaglio e che decresce man mano che ci si allontana dal centro.



*E' ragionevole pensare che la curva sia tanto più stretta quanto più buona è la mira di chi tira la freccetta.*



# Valore Atteso.

**Valore atteso (o speranza matematica)** di una variabile aleatoria : somma (o integrale) di tutti i possibili valori della variabile aleatoria moltiplicati per la loro probabilità.

Variabile aleatoria discreta (distribuzione di probabilità discreta):

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1, N} x_i \cdot P(x_i)$$

Variabile aleatoria continua (distribuzione di probabilità continua):

$$\langle x \rangle = \int_{\text{tutti gli } x} x \cdot P(x) \cdot dx$$

Si dimostra che il valor medio dei valori misurati di una variabile aleatoria in un numero molto grande di "esperimenti" tende al valore atteso della variabile aleatoria.

# Esercizio

Una serie di misure del calore specifico del ghiaccio eseguita con diversi metodi dà i seguenti valori:

$$c_1 = 0.2129E+04 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$$

$$c_2 = 505.6 \text{ cal}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

$$c_3 = 0.5912E-03 \text{ kWh}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$$

$$c_4 = 0.4976 \text{ cal}/(\text{g}\cdot^\circ\text{C})$$

$$c_5 = 0.5074 \text{ kcal}/(\text{kg}\cdot\text{K}).$$

Si trovi il **valore medio**  $c$  delle misure nel SI.

---

$$\text{Formula risolutiva: } c = (c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)/5$$

Converto tutte le misure nel SI:

$$c_1 = 0.2129E+04 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

$$c_2 = 0.2116E+04 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

$$c_3 = 0.2128E+04 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

$$c_4 = 0.2083E+04 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

$$c_5 = 0.2124E+04 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

$$\text{Valor medio del calore specifico} = 0.212E+04 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

Tabella di conversione:

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

$$1 \text{ Wh} = 3600 \text{ J}$$

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273.15$$

ma il “gradino” della scala resta uguale per cui il calore necessario per alzare la temperatura di 1 K è lo stesso che per alzarla di 1°C

$$1 \text{ J/K} = 1 \text{ J}/^{\circ}\text{C}$$

# Esercizio

Si effettuano diverse misure del raggio di base (R) e dell'altezza (H) di un cilindro, ottenendo le seguenti coppie di valori:

$$R_1 = 23.92 \text{ cm}, \quad H_1 = 17.59 \text{ cm}$$

$$R_2 = 0.2428 \text{ m}, \quad H_2 = 0.1719 \text{ m}$$

$$R_3 = 233.9 \text{ mm}, \quad H_3 = 172.4 \text{ mm}$$

Trovare il **valor medio** del volume del cilindro.

---

Formula risolutiva:  $V_{\text{medio}} = (V_1 + V_2 + V_3)/3$

con  $V_i = \pi \cdot R_i \cdot R_i \cdot h_i$ , dove  $r_i$  = raggio base,  $h_i$  = altezza

Nel SI:

$$R_1 = 0.2392 \text{ m}, \quad H_1 = 0.1759 \text{ m} \quad \rightarrow \quad V_1 = 0.3162\text{E-01} \text{ m}^3$$

$$R_2 = 0.2428 \text{ m}, \quad H_2 = 0.1719 \text{ m} \quad \rightarrow \quad V_2 = 0.3184\text{E-01} \text{ m}^3$$

$$R_3 = 0.2339 \text{ m}, \quad H_3 = 0.1724 \text{ m} \quad \rightarrow \quad V_3 = 0.2963\text{E-01} \text{ m}^3$$

Valor medio del volume =  $0.310\text{E-01} \text{ m}^3$

# Definizioni di probabilità

Finora abbiamo inteso la probabilità in maniera intuitiva.

Formalizziamo il concetto, associando a ogni evento  $x$  un numero  $P(x)$  tale che:

- $P(\text{evento certo}) = 1$
- $P(\text{evento impossibile}) = 0$
- Per ogni evento  $x$ :  $0 \leq P(x) \leq 1$
- Se  $x_1$  e  $x_2$  sono due eventi mutuamente escludentesi  
$$P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)$$
- Se  $\{x_i, i=1,N\}$  è un gruppo completo di eventi mutuamente escludentesi  
$$\sum_i P(x_i) = 1$$

Esistono diverse definizioni possibili di probabilità che soddisfano questi assiomi

# Probabilità classica

La probabilità,  $P(x)$ , di un evento  $x$  è il rapporto tra il numero  $M$  di casi "favorevoli" (cioè il manifestarsi di  $x$ ) e il numero totale  $N$  di risultati ugualmente possibili e mutuamente escludentesi.

Detta anche **probabilità oggettiva** o **probabilità a priori**: stima della probabilità di un evento dalla simmetria del problema.

Esempio: lancio di un dado non truccato  
la probabilità di avere un numero qualsiasi è  $1/6$ :

$$P(x) = \frac{\text{Numero di volte in cui può uscire } x}{\text{Numero di risultati possibili}} = \frac{1}{6}$$

# Probabilità empirica

Definizione **sperimentale** di probabilità come **limite della frequenza** misurabile in una serie di esperimenti.

La probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero di prove.

*Nota : rispetto alla definizione classica sostituiamo il rapporto*

$$\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

*con*

$$\frac{\text{numero di esperimenti con esito favorevole}}{\text{numero complessivo di esperimenti effettuati}}$$

In pratica, se abbiamo un esperimento ripetuto  $N$  volte ed un certo risultato  $x$  che accade  $M$  volte, la probabilità di  $x$  è data dal limite della **frequenza** ( $M/N$ ) quando  $N$  tende all'infinito

$$P(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} M/N$$

Vantaggio: possiamo applicare la definizione anche a

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è uniforme
- casi in cui la distribuzione di probabilità non è ricavabile a priori dalla simmetria dell'esperimento.

## Note: la probabilità empirica

...non è una proprietà solo dell'esperimento ma..  
**dipende del particolare gruppo su cui viene calcolata.**

Es: la probabilità di sopravvivenza ad una certa età, calcolata su diversi campioni di popolazione a cui una stessa persona appartiene (maschi, femmine, fumatori, non fumatori, deltaplanisti, ecc.), risulta diversa.

**...si può rigorosamente applicare soltanto agli esperimenti ripetibili per i quali il limite per N che tende all'infinito ha senso.**

Es: Il risultato di una partita di calcio, il tempo atmosferico di domani e molte altre situazioni della vita quotidiana **non** sono soggette all'uso di questa definizione di probabilità.

Necessità di "operatività":  
(quasi) tutti sono concordi nel definirla come  
**il valore della frequenza relativa di successo su un numero di prove sufficientemente grande**

non necessariamente tendente all'infinito!!!!



# Probabilità soggettiva

La probabilità di un evento  $x$  è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di  $x$ .

Definizione meno rigorosa, ma più spesso usata per formulare giudizi:

Es: “credo che domenica la mia squadra riuscirà a vincere”,  
“è facile che mi capiti una domanda sulla probabilità all'esame di fisica”,

Nota:

Talvolta siamo forzati a assegnare un determinato grado di fiducia all'avverarsi di un evento.

Esempio:

il grado di fiducia che diamo al fatto che il gruppo su cui abbiamo calcolato la frequenza di un evento sia effettivamente rappresentativo del campione totale.

# Teoremi sulla probabilità

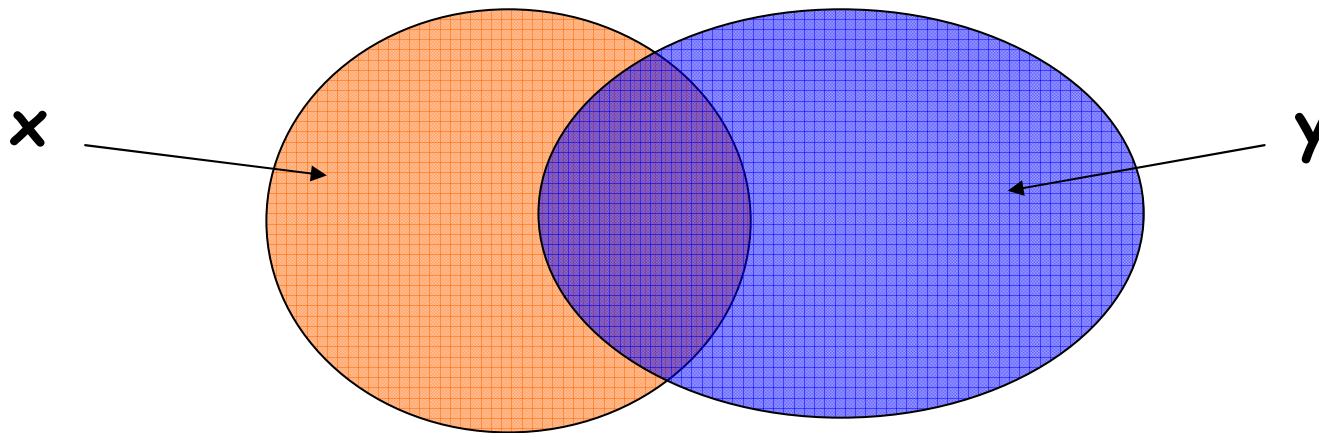
- Teorema della somma
- Teorema del prodotto
- Teorema della probabilità composta
- Teorema della probabilità totale
- Teorema di Bayes

# Teorema della somma

Per due eventi qualsiasi  $x$  e  $y$ , non necessariamente mutuamente escludentesi, vale

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$$

$$( \text{ovvero } P(x+y) = P(x) + P(y) - P(x \cdot y) )$$

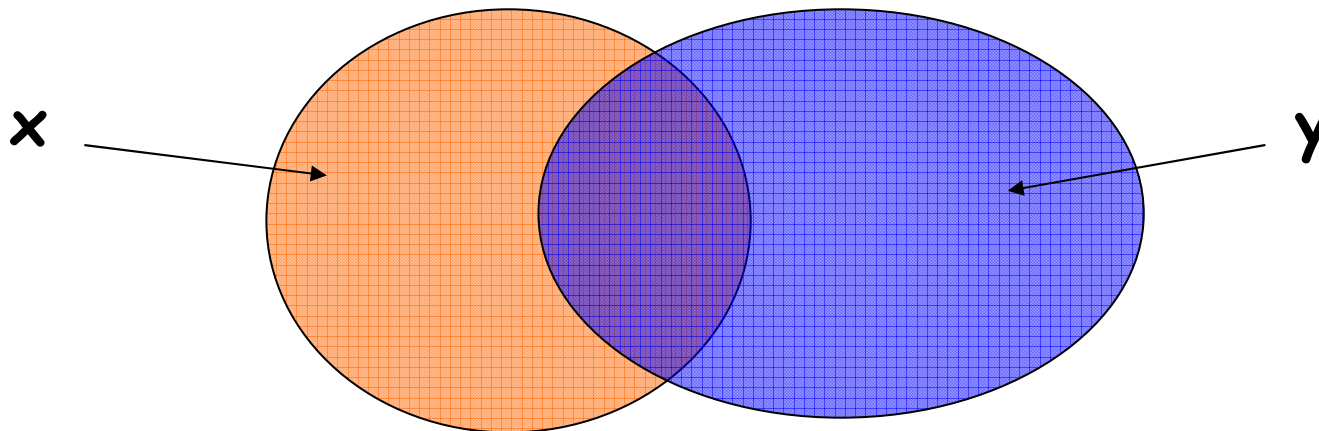


# Teorema del prodotto

Per due eventi qualsiasi  $x$  e  $y$ , non necessariamente mutuamente escludentesi, vale

$$P(x \cap y) = P(x) + P(y) - P(x \cup y)$$

$$( \text{ovvero } P(x \cdot y) = P(x) + P(y) - P(x+y) )$$



# Teorema della probabilità composta

Altro modo per esprimere il teorema del prodotto :

**la probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro calcolata a condizione che il primo abbia luogo:**

$$P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y|x)$$

Si noti che:

- se  $x$  e  $y$  sono mutuamente escludentesi  $P(y|x)=0$  e  $P(x \cap y) = 0$ ;
- se  $x$  e  $y$  sono indipendenti,  $P(y|x) = P(y)$  e  $P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y)$ .

# Esercizio

Un tiratore ha una probabilità uguale a 0.178 di fare centro ad un qualsiasi colpo. Se prende un autobus per recarsi al poligono di tiro qual è la probabilità che riceva un biglietto dell'autobus con un numero dispari e al tempo stesso di fare centro al secondo colpo?

-----

$P_1$  (biglietto dell'autobus con numero dispari) = 0.5

$P_2$  (fare centro al secondo colpo) = 0.178

*Al secondo colpo è la stessa che ad ogni altro colpo e ...non dipende dal primo colpo*

$P$  = Probabilità che avvengano contemporaneamente (prodotto)

Eventi indipendenti.

Formula risolutiva:  $P = P_1 \cdot P_2$ , con  $P_1 = 0.5$  e  $P_2 = .178$

Probabilità = 0.890E-01

# Esercizio

Un tiratore ha una probabilità uguale a  $0.8918E+00$  di fare centro al primo colpo. Se prende un autobus per recarsi al poligono di tiro qual è la probabilità totale di ricevere un biglietto dell'autobus con un numero dispari oppure di fare centro al primo colpo?

-----

$P1$  (biglietto dell'autobus con numero dispari) = 0.5

$P2$  (fare centro al primo colpo) = 0.8918

$P$  = Probabilità che avvenga almeno uno dei due (somma)

$P(\text{somma}) = P1 + P2 - P(\text{prodotto})$

Eventi indipendenti  $\rightarrow P(\text{prodotto}) = P1 \cdot P2$

Formula risolutiva:  $P = P1 + P2 - P1 \cdot P2$

con  $P1 = 0.5$ ,  $P2 = 0.8918E+00$

Probabilità totale =  $0.946E+00$

## Esercizio su probabilità composta e probabilità condizionata

Gioco del lotto: 5 numeri fra 1 e 90 estratti casualmente da un'urna.

La probabilità che un numero N sia estratto è

$$P(N) = 5/90 = 1/18 = 0.055555... = 5.56\%$$

La probabilità che N non sia estratto è pertanto

$$P(\text{non } N) = 1 - P(N) = 0.944444... = 94.44\%$$

Qual è la probabilità che N non venga mai estratto nel corso di 99 “estrazioni”?

Probabilità composta: l'evento “non N” deve apparire 99 volte:

$$\begin{aligned} P(99 \text{ volte non } N) &= P(\text{non } N) \cdot P(\text{non } N) \cdot \dots \cdot P(\text{non } N) \quad \{99 \text{ volte}\} \\ &= P(\text{non } N)^{99} = 0.94444^{99} = 0.003487 = 0.35 \% \end{aligned}$$

Qual è la probabilità che N non venga mai estratto nel corso di 100 “estrazioni”?

$$\begin{aligned} P(100 \text{ volte non } N) &= P(\text{non } N) \cdot P(\text{non } N) \cdot \dots \cdot P(\text{non } N) \quad \{100 \text{ volte}\} \\ &= P(\text{non } N)^{100} = 0.94444^{100} = 0.003293 = 0.33 \% \end{aligned}$$



Qual è la probabilità che N non venga estratto per 100 “estrazioni”, se già non è stato estratto per 99 “estrazioni”?

Nella centesima “estrazione” ci sono 90 numeri nell’urna  
INDIPENDENTEMENTE dalle estrazioni precedenti !

5 Sono estratti

$$P(\text{non N nella estrazione n.100}) = 85/90 = 94.44\%$$

Ovvero la probabilità che nella centesima “estrazione” il numero N continui a non essere estratto, se non è mai stato estratto nelle 99 “estrazioni” precedenti (probabilità condizionale) è uguale a quella di non essere estratto in una sola “estrazione”:

$$P(\text{non N alla estrazione n.100} \mid 99 \text{ volte non N}) = P(\text{non N}) = 94.44\%$$

Osservazione (ovvia...):

*La probabilità che un numero venga estratto in un gioco casuale come il lotto, in cui le condizioni (urna e palline numerate) sono restaurate dopo ogni giocata, non dipende dal fatto che tale numero sia stato estratto o meno in una giornata precedente.*

## PARTE 2

# Proprietà della Probabilità $P(x)$

RIASSUNTO

- Per ogni evento  $x$ :  $0 \leq P(x) \leq 1$
- $P(\text{evento certo}) = 1$
- $P(\text{evento impossibile}) = 0$
- $P(\text{evento contrario di } x) = 1 - P(x)$
  
- **Somma** :  $P(x_1+x_2) = P(\text{ALMENO UNO } x_1, x_2)$
- **Prodotto** :  $P(x_1 \cdot x_2) = P(x_1, x_2 \text{ Contemporaneamente})$
  
- Se  $x_1$  e  $x_2$  sono due eventi incompatibili  
$$P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)$$
- Se  $\{x_i, i=1, N\}$  è un gruppo completo di eventi incompatibili  
$$P(\text{SOMMA di tutti } x_i) = \sum_i P(x_i) = 1$$

# Definizioni di Probabilità

RIASSUNTO

**Prob. oggettiva o Prob. a priori:**  
stima dalla simmetria del problema.

$$P(x) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{risultati possibili}}$$

**Prob. empirica :**  
limite sperimentale della frequenza misurabile

$$P(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{numero di esperimenti con esito favorevole}}{\text{numero complessivo di esperimenti effettuati}}$$

**Prob. soggettiva :**  
grado di fiducia attribuito soggettivamente al verificarsi dell'evento  $x$

# Teoremi sulla probabilità

RIASSUNTO

- Teorema della somma

$$P(x+y) = P(x) + P(y) - P(x \cdot y)$$

- Teorema del prodotto

$$P(x \cdot y) = P(x) + P(y) - P(x+y)$$

- Teorema della probabilità composta

$$P(x \cdot y) = P(x) \cdot P(y|x)$$

- x, y incompatibili  $P(y|x)=0$   $\rightarrow P(x \cdot y) = 0$
- x, y indipendenti  $P(y|x) = P(y)$   $\rightarrow P(x \cdot y) = P(x) \cdot P(y)$

# Esercizio

Un bambino lancia sassi contro una parete circolare di raggio 0.514 m in cui sono stati praticati 26 fori circolari del diametro di 5.70 cm. Se il bambino non mira e i sassi sono piccoli rispetto alle dimensioni dei fori, qual è il numero più probabile di sassi che passerà oltre la parete ogni 3670 lanci? Qual è la probabilità che un sasso rimbalzi ?

## Soluzione:

Simmetria del problema  $\rightarrow$  ogni cm<sup>2</sup> ha la stessa probabilità di essere colpito  $\rightarrow$  probabilità  $p$  di passare dall'altra parte è data dall'area favorevole (dei fori)  $s$  diviso l'area totale  $S$ :

$$p = s / S$$

$$\begin{aligned} \text{con } s &= \text{superficie totale dei fori} = n_{\text{fori}} \cdot \pi \cdot r^2 \\ S &= \text{superficie della parete} = \pi \cdot R^2 \\ r &= \text{raggio dei fori} = 0.285\text{E-01 m} \\ R &= \text{raggio della parete} = 0.514\text{E+00 m} \end{aligned}$$

$$\text{Numero più probabile sassi} = N_{\text{lanci}} \cdot p = N_{\text{lanci}} \cdot s / S = 11$$

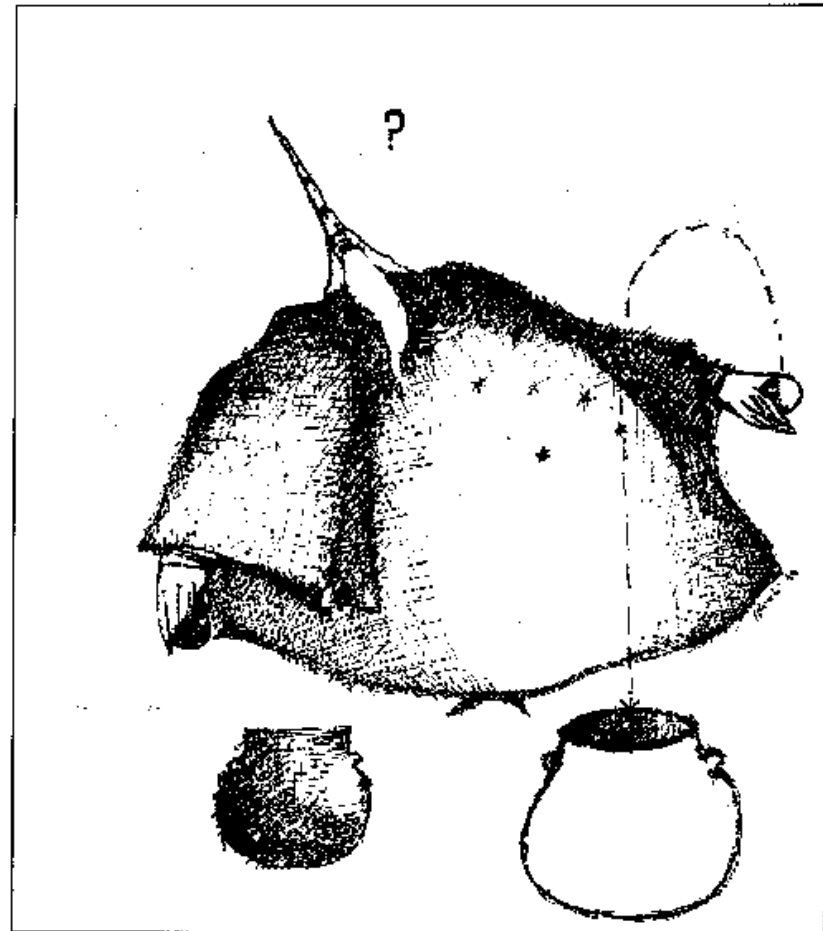
$$\text{La probabilità che rimbalzi } q = 1 - p = 1 - s / S = 0.997$$

# Esercizio: problema dell'astrologo

Un astrologo dopo aver sbagliato una profezia viene multato a pagare una multa molto salata. Il Sultano gli offre una possibilità di condono:

*Eccoti 4 palline, due bianche e due nere che metterai in due urne come vorrai. Poi sceglierò un'urna e da essa estrarrò una pallina. Se la pallina è bianca la multa è condonata altrimenti, se la pallina è nera o se non troverò nulla, la pagherai.*

Qual è la disposizione più favorevole all'astrologo?



Qual è la disposizione più favorevole all'astrologo?

$O = \text{estrazione di una pallina Bianca} = O \cdot \text{urnaA} + O \cdot \text{urnaB}$

$$P(O) = P(O \cdot \text{urnaA} + O \cdot \text{urnaB} )$$

poiché  $P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)$  per eventi incompatibili

$$= P(O \cdot \text{urnaA}) + P(O \cdot \text{urnaB} )$$

poiché  $P(x \cdot y) = P(x) \cdot P(y|x)$

$$= P(\text{urnaA}) \cdot P(O | \text{urnaA}) + P(\text{urnaB}) \cdot P(O | \text{urnaB})$$

$$= 0,5 \cdot \underline{\hspace{2cm}} + 0,5 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$$

Urna A	Urna B
●	○○●
○○	●●
○●	○●
○●●	○
○○●●	

$$0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot \frac{2}{3} = 0,333$$

$$0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0 = 0,500$$

$$0,5 \cdot \frac{1}{2} + 0,5 \cdot \frac{1}{2} = 0,500$$

$$0,5 \cdot \frac{1}{3} + 0,5 \cdot 1 = \mathbf{0,667}$$

$$0,5 \cdot \frac{2}{4} + 0,5 \cdot 0 = 0,250$$



# Teorema della probabilità totale

Sia  $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$  gruppo completo di N eventi incompatibili (**insieme delle ipotesi**)

la probabilità di un evento  $x$  che può avvenire contemporaneamente a esse :

$$P(x) = \sum_{i=1, N} P(A_i) \cdot P(x|A_i)$$

È la somma dei prodotti delle probabilità di ciascuna ipotesi per la probabilità condizionata dell'evento con tali ipotesi

## Esempio di applicazione del teorema della probabilità totale

Estrazione di una pallina da un'urna che contiene due palline.

Possibile insieme delle ipotesi è:

$A_1$  = Entrambe le palline nell'urna sono rosse;

$A_2$  = Entrambe le palline nell'urna non sono rosse;

$A_3$  = Una pallina è rossa e l'altra no.

Qual è la probabilità dell'evento  $x$  = “estrarre una pallina rossa”?

$$P(x|A_1) = 1$$

$$P(x|A_2) = 0$$

$$P(x|A_3) = 1/2 = 0.5$$

$$P(x) = 1 \cdot P(A_1) + 0.5 \cdot P(A_3) = ?$$

Ci manca un dato: le probabilità delle varie ipotesi a priori.

Se però estraggo una pallina rossa, so che almeno una pallina rossa c'era nell'urna, cioè che  $P(A_2)=0$ !

In genere: dal risultato di un esperimento (l'osservazione dell'evento  $x$ ) si cerca di capire la causa che l'ha generato (cioè con quale probabilità l'ipotesi  $A_i$  può essere considerata l'origine dell'evento osservato). Ci serve cioè il teorema di Bayes...

# Teorema di Bayes

Osserviamo un evento  $x$ . Esiste un insieme delle ipotesi  $\{A_i\}$ .

Come viene modificata la probabilità che assegniamo all'ipotesi  $A_i$  dopo l'osservazione  $x$ ?

(qual è la prob. condizionata dell'ipotesi  $A_i$  dopo l'osservazione di  $x$ ?)

Per il teorema della moltiplicazione:

$$P(x \cdot A_i) = P(x) \cdot P(A_i | x) = P(A_i) \cdot P(x | A_i)$$

$$\rightarrow P(A_i | x) = P(A_i) \cdot P(x | A_i) / P(x)$$

$$\rightarrow P(A_i | x) = \frac{P(A_i) \cdot P(x | A_i)}{\sum_{i=1, N} P(A_i) \cdot P(x | A_i)}$$

## Continuiamo l'esempio dell'urna con due palline...

A priori non sappiamo se nell'urna ci sono palline rosse o di altri colori. Possiamo assegnare alle tre ipotesi la stessa probabilità a priori (a questo punto è una probabilità soggettiva!):

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$$

Come viene modificata la probabilità che assegniamo a ciascuna ipotesi dopo l'osservazione dell'evento  $x$  (estrazione di una pallina rossa)?

$$\begin{aligned} P(A_1) \cdot P(x|A_1) + P(A_2) \cdot P(x|A_2) + P(A_3) \cdot P(x|A_3) &= \\ 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0.5 &= 0.5 \end{aligned}$$

e

$$P(A_1|x) = 1/3 \cdot 1 / 0.5 = 2/3 = 66.7 \%$$

$$P(A_2|x) = 1/3 \cdot 0 / 0.5 = 0$$

$$P(A_3|x) = 1/3 \cdot 0.5 / 0.5 = 1/3 = 33.3 \%$$

Partendo da una conoscenza limitata (in questo caso, una stima soggettiva della probabilità delle varie ipotesi) l'osservazione dell'evento  $x$  ci ha permesso di modificare, migliorandola, la conoscenza delle ipotesi.

Cosa succede però alle nostre conclusioni se utilizziamo delle ipotesi differenti?

Provare a calcolare, ad esempio, qual è la probabilità che nell'urna ci siano due palline rosse in caso di osservazione dell'evento  $x$ ="estrazione di una pallina rosse" e se l'insieme delle ipotesi è il seguente

**$A_1$  = nell'urna ci sono due palline rosse**

**$A_2$  = nell'urna ci sono due palline gialle**

**$A_3$  = nell'urna ci sono due palline blu**

**$A_4$  = nell'urna ci sono una pallina rossa e una gialla**

**$A_5$  = nell'urna ci sono una pallina rossa e una blu**

**$A_6$  = nell'urna ci sono una pallina gialla e una blu**

e a ciascuna di esse associamo la stessa probabilità a priori,  $1/6$ .

Soluzione:

$$P(A_1) \cdot P(x|A_1) + P(A_2) \cdot P(x|A_2) + P(A_3) \cdot P(x|A_3) + P(A_4) \cdot P(x|A_4) + P(A_5) \cdot P(x|A_5) + P(A_6) \cdot P(x|A_6) =$$

$$1/6 \cdot 1 + 1/6 \cdot 0 + 1/6 \cdot 0 + 1/6 \cdot 0.5 + 1/6 \cdot 0.5 + 1/6 \cdot 0 = 1/3$$

e

$$P(A_1|x) = 1/6 \cdot 1 / 1/3 = 1/2 = 50 \%$$

Osservazione: il teorema di Bayes è un teorema matematico rigoroso che ci permette di ricavare conclusioni sulla probabilità di determinati eventi (vedi esercizio successivo, in cui calcoleremo la probabilità che una persona positiva a un test clinico sia effettivamente malata).

Può essere usato per migliorare la conoscenza che si ha su determinate ipotesi, come nell'esempio precedente delle due palline nell'urna. Il risultato di un esperimento modifica la stima che abbiamo sulla probabilità delle ipotesi, aiutandoci a scegliere quella più probabile.

Partendo da priori diversi si può arrivare a conclusioni diverse (la scelta dei priori deve essere oculata, anche se soggettiva). In ogni caso, l'utilizzo del risultato di un esperimento con il teorema di Bayes migliora la conoscenza che abbiamo delle ipotesi. L'applicazione ripetuta del teorema di Bayes (tanti esperimenti) converge verso una "stima oggettiva" della probabilità delle ipotesi, indipendente dalla scelta iniziale dei priori.

*Altro esempio: valuto la risposta di soggetti malati ad un gruppo di farmaci, per cercare di capire qual'è il meccanismo che ha causato la malattia e che deve essere inibito per curarla.*

# Esercizio: screening con falsi positivi

Per facilitare un'identificazione precoce dei tumori colon-rettali, le persone al di sopra di una certa età sono incoraggiate a sottoporsi a uno screening consistente nella ricerca di sangue occulto nelle feci, anche se non presentano sintomi specifici.

Per la popolazione al di sopra dei 55 anni di età valgono le seguenti informazioni (valori approssimati a scopo didattico):

- la probabilità di essere malati è dello 0.3%;
- in caso di malattia, la probabilità di risultare positivi al test (sensibilità del test) è del 50%;
- se non si è malati, la probabilità di risultare positivi al test (falsi positivi) è comunque del 3%.

Supponiamo che una persona sottoposta a screening risulti positiva al test: qual'è la probabilità che sia malata?

# Soluzione

Probabilità di essere malati:  $P(M) = 0.3\% = 0.003$   
Probabilità di essere sani:  $P(S) = 1 - 0.3\% = 99.7\% = 0.997$   
Probabilità di avere il test positivo se malati (prob. condizionata):  
 $P(+ | M) = 50\% = 0.50$   
Probabilità di avere il test positivo se sani (prob. condizionata):  
 $P(+ | S) = 3\% = 0.30$

Per il teorema di Bayes:

$$\begin{aligned} P(M|+) &= P(+ | M) \cdot P(M) / [ P(+ | M) \cdot P(M) + P(+ | S) \cdot P(S) ] \\ &= 0.50 \cdot 0.003 / [ 0.50 \cdot 0.003 + 0.03 \cdot 0.997 ] \\ &= 0.0478 = 4.8\% \end{aligned}$$

Cioè la frazione di persone effettivamente malate fra quelle che risultano positive al test eseguito su un campione casuale (screening) è del 4.8%: ulteriori accertamenti sono necessari per diagnosticare con certezza la malattia!

*E' chiaro che se l'analisi è eseguita su un campione **non** casuale, ad esempio su soggetti che presentano qualche tipo di sintomo, o per i quali ci sia ereditarietà, le probabilità a priori sono differenti, e di conseguenza sono differenti le conclusioni sulla probabilità di essere malati data la positività al test.*



A qualcuno potrebbe risultare più semplice pensare in termini di frequenza (numero di casi possibili) invece che in termini di probabilità. Il procedimento non è concettualmente diverso.

Supponiamo un campione di 1000 persone che si sottopone al test. Di esse:

Numero medio di malati:  $N(M) = 1000 \cdot P(M) = 1000 \cdot 0.003 = 3$

Numero medio di sani:  $N(S) = 1000 - 3 = 997$

Numero di individui malati che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+ | M) = N(M) \cdot P(+|M) = 3 \cdot 0.50 = 1.5$$

Numero di individui sani che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+ | S) = N(S) \cdot P(+|S) = 997 \cdot 0.03 = 29.9$$

Pertanto,  $1.5+29.9=31.4$  persone su 1000 risulteranno, in media, positive al test.

La frazione di queste che è effettivamente malata è:

$$N(+|M) / [ N(+|M) + N(+|S) ] = 1.5/31.4 = 0.0478 = 4.8\%$$

Cioè la **frazione** di persone effettivamente malate fra quelle che risultano positive al test in oggetto è del 4.8%