Esperienza del viscosimetro a caduta

Parte del corso di fisica per CTF

Tenuto da Andrea Perrotta , perrotta@bo.infn.it

(copia dei trasparenti sarà disponibile alla fine del ciclo di lezioni su:
http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/farmacia/all/navarria/stuff/homepage.htm)

La Fisica è una scienza sperimentale (come anche Chimica, Farmacia, …):

Osservazione (esperienza)

↓

Leggi fisiche

↓

Prevedere il comportamento di un sistema

(e usarlo a proprio vantaggio, quando serve)

Un corpo in caduta libera è sottoposto a una forza costante: **moto uniformemente accelerato**.

$$\vec{\mathcal{F}} = m\,\vec{a}$$

Nel caso di caduta nel campo gravitazionale:

$$\vec{\mathcal{F}} = m\,\vec{g}$$

La velocità aumenta linearmente col tempo:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t$$

Lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo:

$$\vec{s} = \dots + \tfrac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2$$

Nel caso di una sferetta di metallo che cade in un fluido, il moto non è libero ma frenato. Dopo un breve periodo iniziale di accelerazione, la situazione si stabilizza:

$$\vec{v} = \text{costante}$$

Moto rettilineo uniforme

$$\Downarrow$$

Accelerazione nulla

$$\Downarrow$$

Forza totale agente sul corpo nulla

$$\vec{\mathcal{F}}_{\mathbf{TOT}} = m \cdot \vec{a} = 0$$

Quali sono le forze che agiscono sulla sferetta che cade immersa in un fluido?

- **Gravità;**
- **Spinta idrostatica (spinta di Archimede);**
- **Attrito del fluido (viscosità).**

Nello stato stazionario:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_G + \vec{F}_A + \vec{F}_V = 0$$

Forza di gravità

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{G}} = \mathbf{m}_{\mathbf{sfera}} \cdot \vec{\mathbf{g}}$$

La forza di gravità agente su una sfera metallica di volume $\mathbf{V}_{\mathbf{sfera}}$, raggio $\mathbf{r}_{\mathbf{sfera}}$ e densità $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{sfera}}$ è pertanto:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{G}} = \mathbf{V}_{\mathbf{sfera}} \cdot \rho_{\mathbf{sfera}} \cdot \vec{\mathbf{g}}$$

$$= \mathbf{4/3}\ \pi \cdot \mathbf{r}_{\mathbf{sfera}}^{3} \cdot \rho_{\mathbf{sfera}} \cdot \vec{\mathbf{g}}$$

Spinta di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato

$$\vec{F}_A = -\vec{P}_{\text{fluido spostato}} = -m_{\text{fluido spostato}} \cdot \vec{g}$$
$$= -V_{\text{fluido spostato}} \cdot \rho_{\text{fluido}} \cdot \vec{g}$$

Nel caso di una sferetta di raggio **r** , la spinta di Archimede esercitata dal fluido su di essa è:

$$\vec{F}_A = -\ 4/3\ \pi \cdot r_{\text{sfera}}^{3} \cdot \rho_{\text{fluido}} \cdot \vec{g}$$

Se agisse solo la forza peso e la spinta idrostatica, il corpo sarebbe sottoposto a una forza non nulla (se il corpo è di densità diversa da quella del fluido in cui è immerso):

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{G}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}} = \mathbf{4/3}\, \pi\, \mathbf{r^3} \cdot (\rho_{\mathbf{sfera}} - \rho_{\mathbf{fluido}}) \cdot \vec{\mathbf{g}}$$

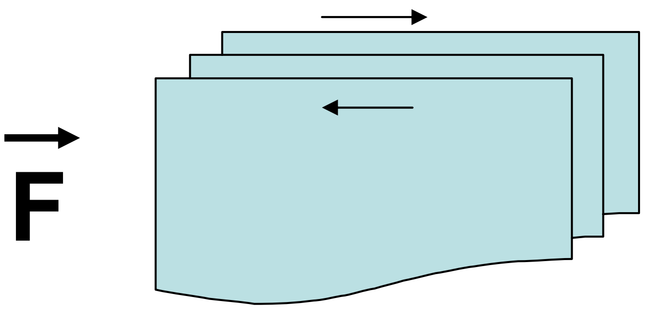
Osservazione sperimentale: il corpo raggiunge una certa velocità (velocità limite) e poi prosegue di moto rettilineo uniforme.

La risultante della forza peso e della spinta di Archimede è bilanciata da una forza proporzionale alla velocità

Forze proporzionali alla velocità sono forze del tipo di attrito.

Viscosità

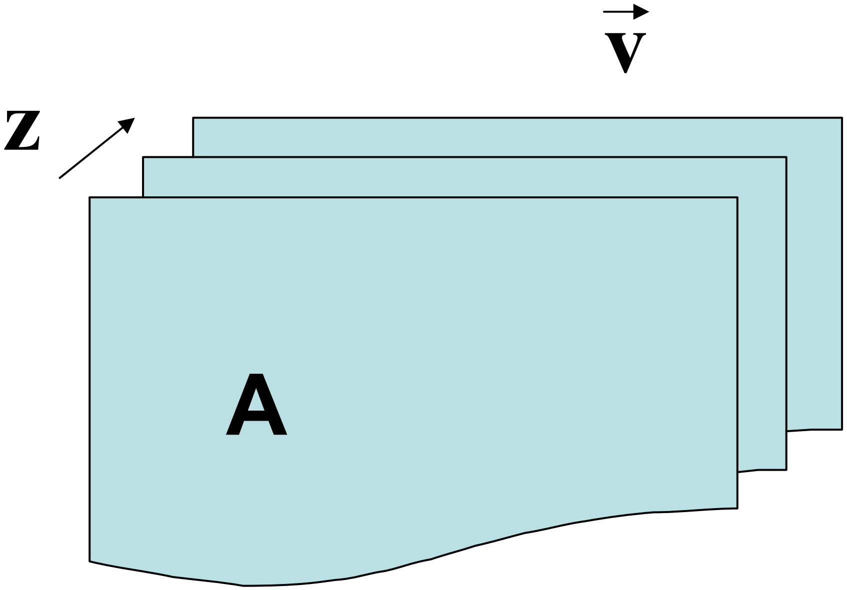
Le forze di legame che agiscono fra le molecole del fluido tendono a tenerle unite: per far slittare uno straterello di fluido rispetto allo strato adiacente dobbiamo esercitare una forza:



Le forze intermolecolari variano con la temperatura: **la forza che dobbiamo applicare per contrastarle dipende pertanto dalla temperatura.**

Nel caso di due lastre parallele di fluido, di superficie **A** e distanza **z** fra loro, si verifica che:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{V}} = - \eta \cdot \mathbf{A} / \mathbf{z} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$



Il coefficiente di proporzionalità η è una caratteristica del fluido ed è detto **viscosità del fluido**.

$$[\,\eta\,] = [\,F\,][\,l\,][\,l^{-2}\,][\,v^{-1}\,] = [\,F\,][\,l^{-2}\,][\,t\,]$$

Nel Sistema Internazionale (SI) :

$$[\,\eta\,] = N / m^2 \cdot s = Pa \cdot s$$

Tipicamente, la viscosità diminuisce col crescere della temperatura, perché le forze intermolecolari del fluido tendono a diminuire con la temperatura

Anche un corpo che si muove all'interno di un fluido viene frenato dalla viscosità del fluido. Le relazioni fra le grandezze fisiche in questo caso sono più complicate. Stokes ne ha formulata una nella seguente approssimazione:

- **corpo sferico** (di raggio **r**);
- **moto laminare** (non turbolento) nel fluido;
- fluido contenuto in un **recipiente di dimensioni infinite** (cioè è trascurabile l'interazione con le pareti del recipiente).

In questo caso vale la **legge di Stokes**:

$$\vec{F}_V = -6 \pi \eta \cdot r \cdot \vec{v}$$

Nel caso delle nostre sfere d'acciaio in caduta nel fluido:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{TOT}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{G}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{V}}$$

A regime, v = costante (come abbiamo verificato) e $F_{TOT} = 0$.

Assumendo che valgano le approssimazioni per cui è stata formulata la legge di Stokes:

$$\mathbf{4/3\ \pi \cdot r^3 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot \vec{g} - 6\pi\ \eta \cdot r \cdot \vec{v} = 0}$$

Il moto, la gravità e la spinta di Archimede agiscono solo sull'asse verticale → l'equazione vettoriale (sistema di tre equazioni) può diventare un'equazione scalare (una sola equazione, quella che corrisponde all'asse verticale), che può essere risolta per trovare la viscosità η.

Formula per la misura (indiretta) della viscosità col viscosimetro a caduta

Se $g = |\vec{g}|$ e $v = |\vec{v}|$, risolvendo l'equazione precedente per η:

$$\boxed{\eta \;=\; \mathbf{2/9 \cdot r^2 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g \,/\, v}}$$

La misura è **indiretta** perché non è fatta direttamente confrontando la grandezza da misurare con una grandezza di riferimento (es: misura di altezza con un metro) oppure leggendo il valore fornito direttamente dal display di uno strumento (es: misura di peso con una bilancia ad ago o a display a cristalli liquidi), ma è fatta utilizzando e combinando fra loro altre misure: $\mathbf{r}$, $\rho_{\mathbf{s}}$, $\rho_{\mathbf{f}}$, $\mathbf{v}$.
Anche queste grandezze potranno, a loro volta, essere state misurate direttamente o indirettamente.

Attenzione

La viscosità di un fluido **dipende fortemente dalla sua temperatura**: la temperatura è un parametro che va monitorato per sapere a quale temperatura corrisponde il valore di η misurato, e per **controllare che una eventuale variazione di temperatura durante la prova non infici il risultato finale**.

La formula trovata per η vale nelle approssimazioni della legge di Stokes. Per avere il fluido in regime laminare, bisogna stare **attenti a non agitarlo, non creargli delle bolle d'aria, etc**.

Misureremo anche il diametro interno del tubo contenente il fluido viscoso, per valutare l'effetto della deviazione dalla legge di Stokes.

Ricordiamoci le condizioni per cui vale la legge di Stokes (nella formulazione semplice che abbiamo dato) :

• corpo sferico;

• **moto laminare (non turbolento) nel fluido**;

• **fluido contenuto in un recipiente di dimensioni infinite** (cioè è trascurabile l'interazione con le pareti del recipiente).

Quantificazione delle deviazioni dalla legge di Stokes (termini principali)

Correzione per il raggio finito (R) del tubo:

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 - 2.104 \cdot r / R + \ldots)$$

Correzione per la non laminarità del moto:

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 - 27/16 \cdot v^2 / (g \cdot r) \cdot \rho_F / (\rho_S - \rho_F) + \ldots)$$

Viscosimetri ad uso professionale

La tecnica di misura per determinare la viscosità di un fluido è detta **viscosimetria**

Esempi di viscosimetri a caduta di sfere

Viscosimetri a bolla

Viscosimetro rotazionale

*I fluidi si possono dividere in **Newtoniani** e **non Newtoniani.** I Newtoniani non cambiano il loro valore di viscosità al variare della forza applicata, mentre i non Newtoniani possono cambiare la loro viscosità non solo all'aumentare o al diminuire della forza, ma anche in relazione al tempo di applicazione della stessa. I fluidi non Newtoniani possono pertanto essere divisi in **tempo indipendenti** e **tempo dipendenti**.*

Esempio di viscosimetro a caduta di sfere di tipo "professionale"

Le dimensioni della sfera sono confrontabili con quelle del tubo di caduta (ottenendo così uno strumento decisamente più maneggevole dei nostri tubi!).

La misura della viscosità è una misura **relativa** (cioè riferita a dei liquidi di viscosità nota): lo strumento va **calibrato**. Dalla curva di calibrazione si ricava il fattore di conversione che traduce direttamente il tempo di caduta nella viscosità del fluido.

Misure di grandezze fisiche

La misura di una grandezza fisica è descrivibile tramite <u>tre elementi</u>:

• **valore più probabile**;

• **precisione** con cui questo valore più probabile approssima il valore vero (altrimenti detta "**errore**" sulla misura);

• **unità di misura**.

Solo scrivendo **valore più probabile, errore, e unità di misura** forniamo una descrizione sufficientemente completa e accurata della grandezza misurata.

L'errore sulla misura mi determina il **numero di cifre significative** con cui riportare il valore più probabile: non ha senso scrivere la quarta cifra significativa se già c'è una indeterminazione sulla terza cifra!

Misure dirette e misure indirette

Una misura si dice **diretta** quando si confronta direttamente la grandezza misurata con un campione di misura nota.
Esempio: misura di lunghezza con un regolo graduato.

Una misura si dice **indiretta** se ciò che si misura non è la grandezza che interessa, ma altre che siano legate a essa da relazioni funzionali.
Esempio: misura della distanza di un oggetto con un sonar. Quello che misuro è il tempo percorso dall'onda sonora per andare e tornare dall'oggetto; conoscendo la velocità di propagazione dell'onda posso ricavare la distanza dell'oggetto che l'ha riflessa.

Misure e errori di misura (incertezze)

Ogni volta che facciamo una **misura** cerchiamo di stimare il **valore vero** di una **grandezza**. C'è un limite alla precisione con la quale facciamo questa stima:

• **Sensibilità dello strumento di misura**;

• **Fluttuazioni casuali del valore misurato**;

• **Possibilità di errori** nella procedura e/o nello strumento (errori sistematici: i più difficili da trattare).

$$X_{mis} = X_{vero} + \varepsilon$$

Se la sensibilità dello strumento è maggiore delle fluttuazioni derivanti dalla procedura di misurazione, misure ripetute daranno lo stesso valore numerico di $\mathbf{X}_{\mathbf{mis}}$. L'incertezza con cui conosciamo $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ è pertanto data dalla sensibilità dello strumento di misura usato.

Esempio, misura di lunghezza con un metro con sensibilità 1 mm:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{vero}} = \mathbf{27.537609076 \ldots \ cm}$$
$$\mathbf{X}_{\mathbf{mis}} = \mathbf{27.5\ cm}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.1\ cm}$$

$$\mathbf{X = (27.5 \pm 0.1\ )\ cm}$$

In realtà, con un occhio allenato potremmo accorgerci che X_{vero} si trova fra 27.5 e 27.6 cm, e usare la **mezza tacca** come incertezza:

$$\mathbf{X = (27.55 \pm 0.05)\ cm}$$

L’incertezza sul risultato della misura (o **errore sulla misura**) può essere espresso come:

- **errore assoluto**, cioè indicato con le stesse unità di misura del valore misurato;
- **errore relativo**, cioè indicato come frazione del valore misurato.

L’errore relativo viene spesso espresso in percentuale (%) del valore misurato: la percentuale non è altro che un’altra maniera di indicare una frazione.

Esempio:

$X = (27.5 \pm 0.1)$ cm

Errore assoluto $\rightarrow$ 0.1 cm

Errore relativo $\rightarrow$ $0.1 / 27.5 = 1/275$

$\sim 0.0036 = 0.36\ \%$

Se le fluttuazioni sono più grandi della sensibilità dello strumento, misure ripetute daranno tipicamente risultati diversi. Se le fluttuazioni sono **casuali**, i vari valori di $\mathbf{X}_{\mathbf{mis}}$ si distribuiranno **casualmente** (cioè a volte prima e a volte dopo) attorno a $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$.

$$\mathbf{X}^{i}_{\mathbf{mis}} = \mathbf{X}_{\mathbf{vero}} + \varepsilon^{i}$$

Se si compie un numero molto grande di misure ("**al limite di un numero infinito di operazioni di misura**") le fluttuazioni tenderanno a compensarsi, e **il valor medio delle misure tenderà al valore vero**:

$$\langle \varepsilon^{i} \rangle \rightarrow \mathbf{0}$$

$$\langle \mathbf{X}^{i}_{\mathbf{mis}} \rangle \rightarrow \mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$$

Non possiamo fare infinite misure: dobbiamo **stimare** $\mathbf{X}_{vero}$ e la precisione con cui lo conosciamo da un numero finito di misure.

La stima migliore di $\mathbf{X}_{vero}$ è la **media su N misure**:

$$\mathbf{X}_{mis} = 1/N \cdot \sum_{i=1,N} (\mathbf{X}^{i}_{mis})$$

e di conseguenza, $\mathbf{X}_{mis}$ è una approssimazione di $\mathbf{X}_{vero}$, a meno di un incertezza (che rappresenta l'incertezza con cui riusciamo a conoscere il valore $\mathbf{X}_{vero}$ dato $\mathbf{X}_{mis}$).

$$\mathbf{X}_{vero} = \mathbf{X}_{mis} \pm \Delta\mathbf{X}$$

Per valutare l'entità dell'errore ΔX da associare, osserviamo che il valor medio degli scarti $< X^i_{mis} - X_{mis} >$ è uguale a zero, per definizione di media: non possiamo pertanto utilizzarlo per stimare la precisione della misura.

Chiamiamo **varianza** il valor medio del quadrato delle differenze delle singole misure dal valor vero:

$$\sigma_{vero}^2 = 1/N \cdot \sum_{i=1,N} (X^i_{mis} - X_{vero})^2$$

La **stima della varianza** la si ottiene sostituendo a X_{vero} la sua stima X_{mis}, e dividendo per N-1, invece che per N (visto che uno dei gradi di libertà è già stato "usato" per calcolare X_{mis}):

$$\sigma^2 = 1/(N-1) \cdot \sum_{i=1,N} (X^i_{mis} - X_{mis})^2$$

(Scarto quadratico medio)

Consideriamo infine la radice quadrata dello scarto quadratico medio (ovvero la **deviazione standard**), che è un indicatore della larghezza della distribuzione delle misure:

$$\Delta X = \sigma = \sqrt{1/(N-1) \cdot \sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{mis})^2}$$

Se abbiamo delle misure distribuite in maniera casuale e centrate attorno al loro valor medio, la deviazione standard è la stima migliore dell'errore con cui si può conoscere il valore vero della grandezza misurata partendo **da una singola misura**

Supponiamo di fare **tante serie di misure**. Ognuna di queste serie è caratterizzata dal suo valor medio.

I valori medi sono più vicini al valore "vero" rispetto alle singole misure; avranno perciò una distribuzione più stretta di quella delle singole misure.

Si **dimostra** che, mentre la deviazione standard è l'incertezza statistica con cui si distribuisce la singola misura attorno al valor vero, **l'errore da associare al valor medio di tutte le misure** è:

$$\Delta X_{mis} = \sigma / \sqrt{N} = 1/\sqrt{N \cdot (N-1)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{mis})^2}$$

(cioè la deviazione standard divisa per la radice di N)

Osservazioni:

• All’aumentare del numero delle misure la varianza (e pertanto anche la deviazione standard) tende ad un valore costante.
Invece, **l’errore sulla media diminuisce come l’inverso della radice quadrata del numero di misure**.

• Un insieme di tante misure (distribuzione di misure) è stato riassunto da due soli valori: **la media e la deviazione standard** (oppure l’errore sulla media, che non è altro che la deviazione standard divisa per la radice quadrata del numero delle misure).
Abbiamo perso il dettaglio (le singole misure), ma abbiamo estratto proprio e solo le quantità che servono ai nostri scopi.

Descrizioni sempre più accurate della distribuzione di partenza si potranno ottenere introducendo ulteriori parametri (es: asimmetrie, etc.).

Misure di grandezze fisiche

Una grandezza fisica ha un suo **"valore vero"**, che noi cerchiamo di **stimare** attraverso un'operazione di misura.

Fare una misura vuol dire descrivere una grandezza fisica per mezzo di tre elementi:
- **valore più probabile**;
- **precisione** (altrimenti detta "**errore**" sulla misura);
- **unità di misura**

Le misure possono essere **dirette** o **indirette**.

La precisione della misura può essere determinata da:
- **sensibilità** dello strumento di misura;
- **fluttuazioni casuali** fra un'operazione di misura e l'altra
- **errori** nella procedura e/o nello strumento (**errori sistematici**)

L'errore su una misura può essere indicato come **errore assoluto**, oppure **errore relativo** (cioè come frazione del valore misurato)

La grandezza da misurare esiste e ha sicuramente un suo valore, che chiamiamo $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$.

Nel caso di misure con fluttuazioni casuali da un'operazione di misura all'altra, la stima migliore di $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ è la **media su N misure**:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{mis}} = 1/N \cdot \sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis})$$

L'errore da associare alla singola misura è la **stima della deviazione standard**:

$$\Delta X = \sigma / \sqrt{N} = 1/\sqrt{N\cdot(N-1)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{mis})^2}$$

Mentre **l'errore da associare al valor medio** è:

$$\Delta X_{mis} = \sigma / \sqrt{N} = 1/\sqrt{N\cdot(N-1)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1,N} (X^{i}_{mis} - X_{mis})^2}$$

(cioè la deviazione standard divisa per la radice di N)

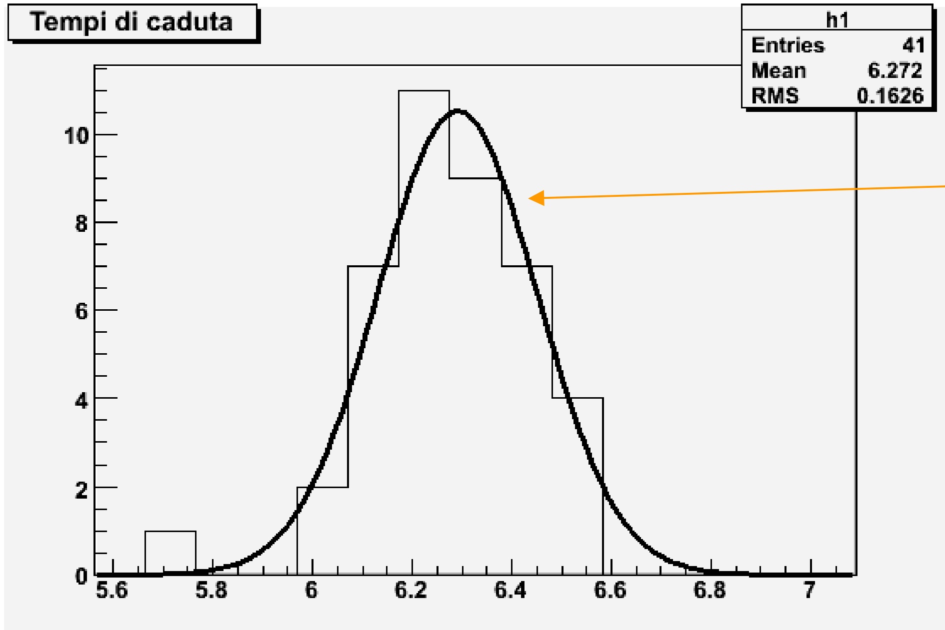
Verso una interpretazione probabilistica

Vogliamo quantificare la probabilità che il valore vero si trovi all'interno dell'intervallo **valore più probabile ± errore**

Osservazione: se i risultati delle misure sono **casuali** e **indipendenti fra loro**, l'**istogramma di frequenza** delle misure tende ad assumere una distribuzione simmetrica a campana, centrata sul valor medio e con larghezza dell'ordine della deviazione standard.

La **distribuzione limite** a cui tende la **distribuzione di frequenze** di una serie di misure con errori casuali e indipendenti fra di loro è la **distribuzione normale**, che può essere descritta da una **funzione di Gauss** (o **gaussiana**) con parametro **μ** uguale al valor medio della distribuzione, e come parametro **σ** la sua deviazione standard:

$$f(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$f(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con

N = 41 ; μ = 6.29 ; σ = 0.161

Riformuliamo in maniera matematicamente (un po' …) più corretta.

Teorema del limite centrale

La distribuzione della somma di un numero elevato di variabili casuali indipendenti tende a distribuirsi normalmente, cioè tende a distribuirsi secondo una **distribuzione di Gauss** (o **distribuzione normale**) avente come parametro **μ** la somma dei valori medi delle misure e come parametro $\boldsymbol{\sigma^2}$ la somma delle varianze delle misure.

Interpretazione probabilistica

Date le proprietà della funzione di Gauss, sappiamo che una nuova misura avrà una probabilità:

- **del 68.3% di stare a 1 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 95.4% di stare a 2 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 98.8% di stare a 2.5 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 99.7% di stare a 3 σ dal valor medio della distribuzione;**
- …

Gli stessi valori valgono per la probabilità del valor medio di una serie di misure di stare a K volte l'errore sulla media dal valor vero.

Esempi

(Tratti da misure fatte con il viscosimetro a caduta nel laboratorio dell'anno scorso)

Proviamo a verificare alcuni tipi di distribuzione di misure e a valutarne gli errori associati:

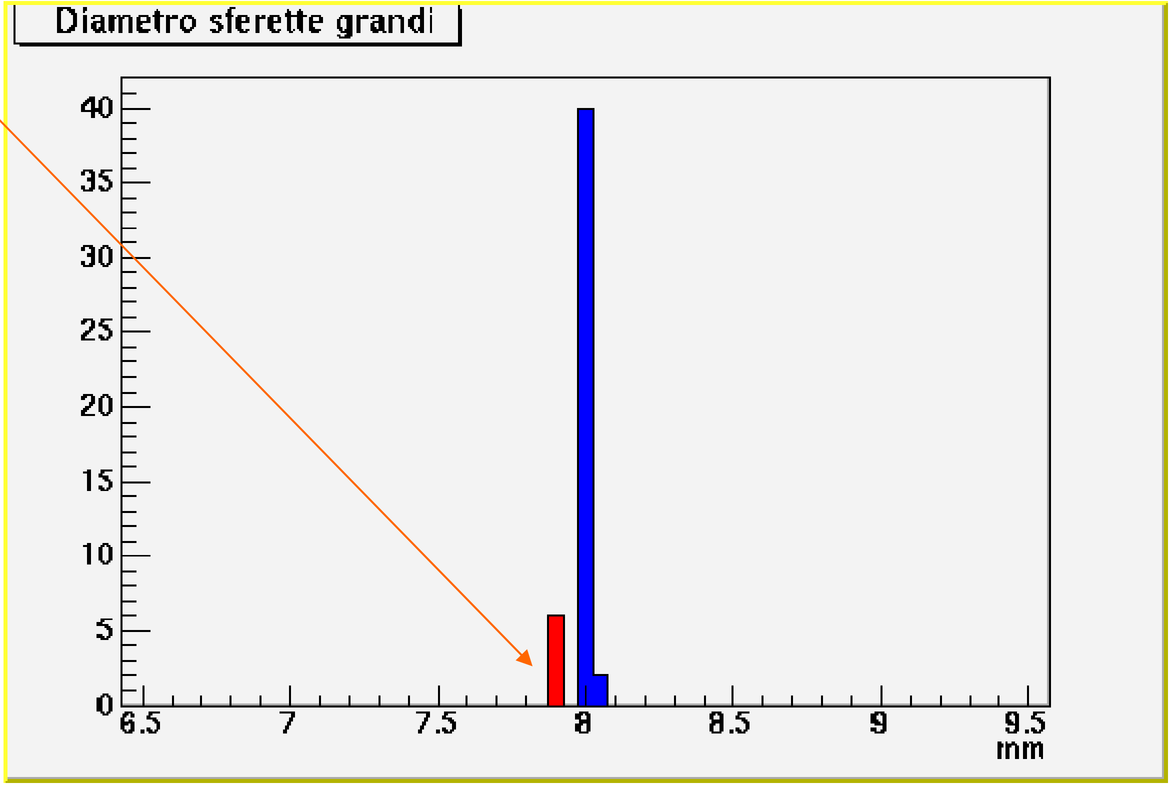
- **Misura del diametro di una sferetta di acciaio**
    - Riproducibilità della misura: che errore associamo?

- **Misura del tempo di caduta della sferetta nel fluido**
    - Istogramma di frequenza
    - Distribuzione dei valori misurati
    - Valor medio e deviazione standard della misura
    - Errore sul valor medio
    - Approssimazione dell'istogramma di frequenza con una curva di Gauss

Istogrammi di frequenza e distribuzione limite

Diametro della sferetta d'acciaio

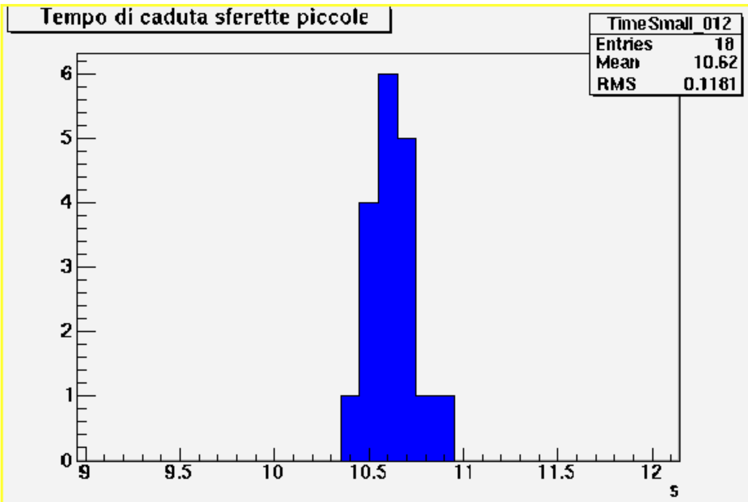
Tutte le misure in rosso provengono dallo stesso gruppo: <u>probabile errore sistematico</u>.
Vista la sostanziale costanza di tutte le altre misure, posso affermare che la variazione statistica è più piccola della sensibilità del calibro: utilizziamo pertanto la sensibilità del calibro come stima della precisione della misura.



D = (8.00 ± 0.05) mm

Istogrammi di frequenza e distribuzione limite

Tempo di caduta



$<t> = 10.62$ s

$\sigma = 0.12$ s

$\Delta(<t>) = \sigma/\sqrt{N} = 0.027$ s

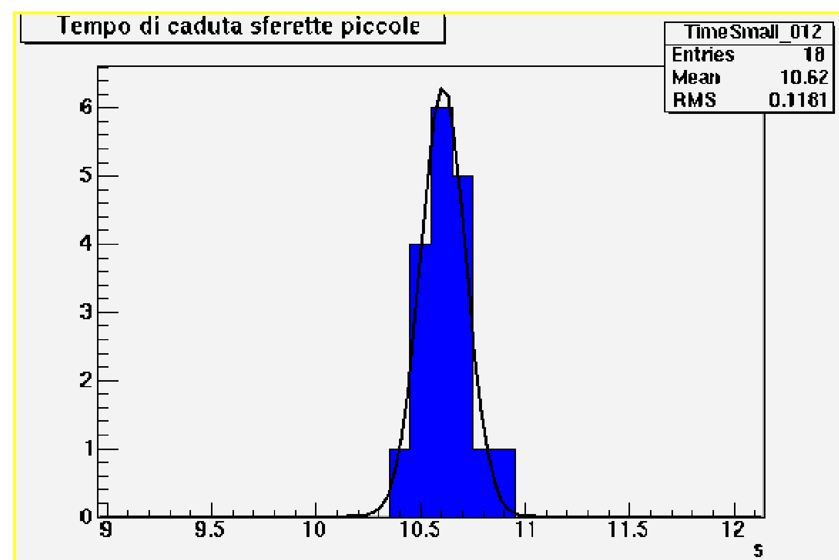
$t = (10.62 \pm 0.03)$ s

Si può agevolmente adattare una curva gaussiana alla distribuzione dei tempi misurati rappresentata nell'istogramma di frequenza.

La curva che meglio si adatta ai dati ha come parametri

$\mu = (10.61 \pm 0.03)$ s

$\sigma = (0.11 \pm 0.02)$ s



Propagazione degli errori

Nel caso di **misure dirette**, l'errore sulla misura si calcola agevolmente dalla sensibilità dello strumento o dall'errore sulla media di più misure ripetute.

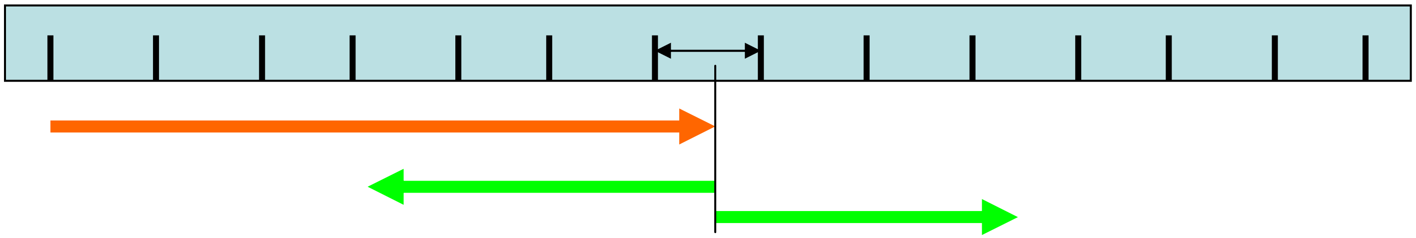
Nel caso di **misure indirette**, il valore che ci interessa è dato dalla combinazione, secondo una certa **relazione matematica**, di altre misure.

Ciascuna di queste misure avrà associato un suo errore: come posso determinare **quale errore associare alla misura combinata**?

Bisogna sapere come si propagano gli errori quando due grandezze sono combinate per mezzo di una operazione matematica...

Propagazione degli errori
Somma o differenza di due grandezze

L'incertezza **assoluta** sulla somma o sulla differenza di due grandezze ($X = A \pm B$) è uguale.



Singola misura: $X_i = A_i \pm B_i$

Valor medio: $\langle X_i \rangle = \langle A_i \rangle \pm \langle B_i \rangle$

Varianza: $\langle (X_i - X)^2 \rangle = \langle (A_i - A)^2 \rangle + \langle (B_i - B)^2 \rangle$

Errore: $\Delta X = \sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}$

<u>Nella somma o differenza di due grandezze si sommano (in quadratura) gli errori assoluti</u>.

Propagazione degli errori
Prodotto di una costante per una grandezza

$$X = \mathbf{k} \cdot A$$

Singola misura: $X_i = \mathbf{k} \cdot A_i$

Valor medio: $< X_i > = \mathbf{k} \cdot < A_i >$

Varianza: $< (X - X_i)^2 > = \mathbf{k^2} \cdot < (A - A_i)^2 >$

Errore: $\Delta X = \mathbf{k} \cdot \Delta A$

L'ultima relazione può anche essere scritta come errore relativo, invece che assoluto:

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta A}{A}$$

Propagazione degli errori
Prodotto (o rapporto) di due grandezze

$$X = A \cdot B$$

Singola misura: $X_i = A_i \cdot B_i$

Valor medio: $< X_i > = < A_i > \cdot < B_i >$

Errore: $$\frac{\Delta X}{X} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

Nel caso di un rapporto,

$$X = A / B = A \cdot B^{-1}$$

siccome $(\Delta B^{-1} / B^{-1}) = (\Delta B / B)$, vale sempre la regola per cui si sommano in quadratura gli errori **relativi**.

Propagazione degli errori
Elevazione a potenza di una grandezza

$$X = A^n$$

Equivale a

$$X = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \qquad \textbf{n} \text{ volte}$$

Essendo un prodotto di grandezze, si sommano gli **errori relativi**. Questa volta **linearmente** perché tutte le fluttuazioni dei singoli fattori sono uguali e vanno nella stessa direzione (cioè, non sono indipendenti):

$$\Delta X/X = \Delta A/A + \Delta A/A + \Delta A/A + \ldots \quad \textbf{n} \text{ volte}$$

$$\Delta X/X = n \cdot (\Delta A/A)$$

Propagazione degli errori nella nostra misura di viscosità

Utilizziamo le regole di propagazione degli errori per valutare l'errore sulla misura finale, e per studiare degli accorgimenti per migliorare la precisione della nostra misura di viscosità.

Formula per la misura indiretta della viscosità col viscosimetro a caduta:

$$\eta = 2/9 \cdot r^2 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g \cdot T / L$$

Formula per il calcolo dell'errore associato alla misura:

$$\begin{aligned}(\Delta\eta / \eta)^2 = \; & (2 \cdot \Delta r / r)^2 \\ & + (\Delta(\rho_S - \rho_F) / (\rho_S - \rho_F))^2 \\ & + (\Delta T / T)^2 \\ & + (\Delta L / L)^2\end{aligned}$$

Raggio della sferetta d’acciaio: **r**

Si misura direttamente con un calibro. (In realtà la misura diretta è quella del diametro…).

Misure ripetute della stessa sferetta danno gli stessi risultati

La precisione della misura è data dalla sensibilità dello strumento

L’errore da associare al valore misurato (cioè l’incertezza con cui si conosce il valore “vero” della grandezza misurata) è la più piccola divisione apprezzabile dello strumento di misura.

Densità delle sfere d'acciaio: ρ_S

Misura indiretta:

$$\boldsymbol{\rho_S = M_S / V_S = M_s / (4/3\, \pi\, r_S{}^3)}$$

Si pesa la sferetta con una bilancia di precisione, ottenendone la massa. Il raggio si misura col calibro.

Errori:

$$(\Delta\rho_S/\rho_S)^2 = (\Delta M_S/M_S)^2 + (3 \cdot \Delta r_S/r_S)^2$$

La precisione della bilancia (Δ**M**) è indipendente dalla massa pesata. Si ottiene un errore relativo più piccolo sulla massa se si pesa una massa più grande $\rightarrow$ pesare **N** sferette dello stesso raggio contemporaneamente riduce il primo termine dell'errore.

Densità del fluido: ρ_F

Misura indiretta:

$$\boldsymbol{\rho_F = M_F / V_F}$$

Si misura la massa di fluido contenuta in un recipiente di volume noto (es: provetta graduata).

$$M_F = M_{F+tara} - M_{tara}$$

(NB: in realtà, la misura di massa è indiretta: quello che si misura direttamente sulla bilancia è la forza peso, che va poi divisa per **g**)

Errori:

$$(\Delta\rho_F/\rho_F)^2 = (\Delta M_F/M_F)^2 + (\Delta V_F/V_F)^2$$

$$(\Delta M_F)^2 = (\Delta M_{F+tara})^2 + (\Delta M_{tara})^2$$

Differenza delle due densità

Nella formula per l'errore finale entra l'errore sulla differenza fra le due densità, delle sferetta d'acciaio e del fluido:

$$\Delta(\rho_S - \rho_F) \,/\, (\rho_S - \rho_F)$$

Per le regole viste di propagazione degli errori:

$$[\Delta(\rho_S - \rho_F)]^2 = [\Delta\rho_S]^2 + [\Delta\rho_F]^2$$

La precisione sulla misura della viscosità dipende dalla precisione sulla misura della differenza delle densità:
<u>Si migliora la precisione della misura finale se si riesce a migliorare la misura meno precisa fra quelle delle due densità. Non si ottiene nessun vantaggio, in pratica, a migliorare la misura delle due che è già più precisa, se non si riesce a ridurre l'errore anche dell'altra.</u>

Velocità a regime di caduta della sfera: $v = L / T$

Misura indiretta: si ricava dal rapporto fra la misura diretta della lunghezza di caduta, fatta con un metro graduato, e la misura diretta del tempo di caduta, fatta col cronometro.

Nel caso della misura del tempo di caduta, la precisione dello strumento (cronometro) è migliore della precisione con cui si riesce a fare la misura: le fluttuazioni statistiche sono più grandi della sensibilità dello strumento e la precisione della misura di **T** (ovvero l'errore da associare) sarà determinata dall'errore sulla media della distribuzione delle misure fatte.

*NB: sfere di raggio diverso cadranno con velocità di regime diversa. η però dipende solo dal fluido, e il valore misurato della viscosità deve essere sempre lo stesso, **entro gli errori sperimentali**.*

Misure di temperatura

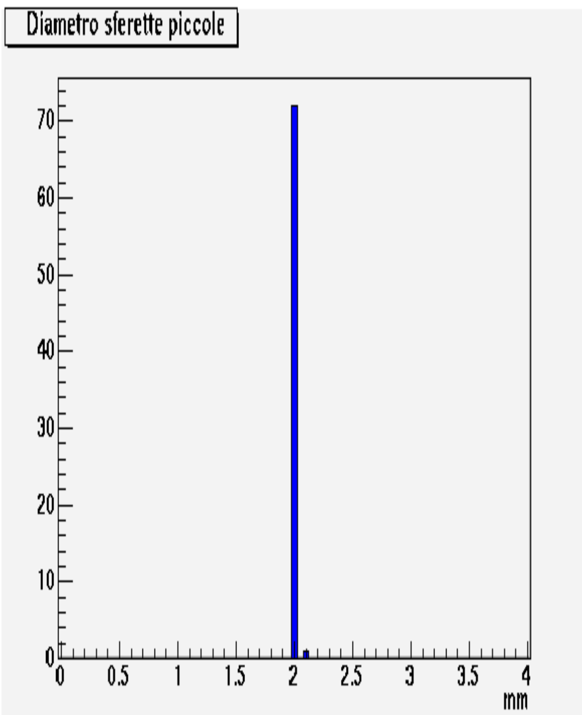
Temperature ambiente misurate con alcuni termometri posti in sala. Abbastanza simili fra i vari turni, e con poca variazione fra l'inizio e la fine del turno.

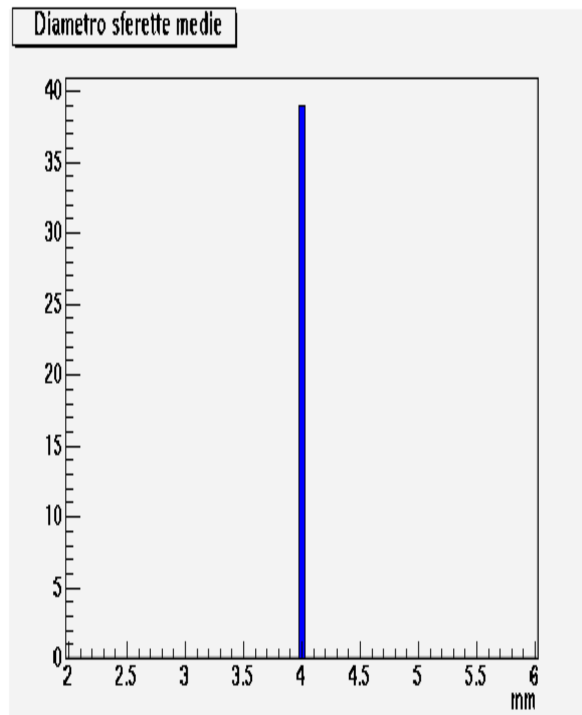
$$T \sim 23 - 26\,°$$

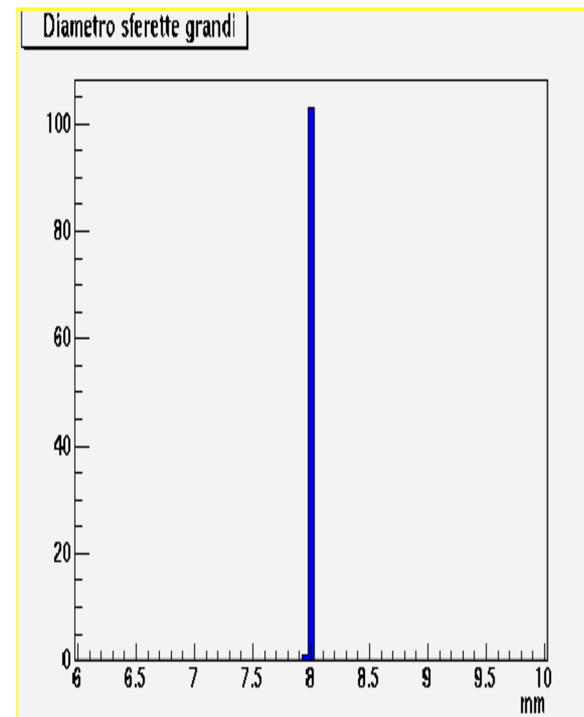
Verosimilmente, le variazioni di temperatura del fluido fra i vari viscosimetri erano simili.

Misure dei diametri delle sfere

Tantissime misure, pochissime fluttuazioni: la precisione garantita dal fornitore è stata sostanzialmente rispettata.







Densità del fluido nei tre turni

$$\rho_F = M_F / V_F = (M_{T+F} - M_F) / V_F$$

Misure dirette:

$V_F =$	$(200 \pm 5)\ cm^3$	$(200 \pm 5)\ cm^3$	$(250 \pm 5)\ cm^3$
$M_{F+T} =$	$(555 \pm 1)\ g$	$(553 \pm 1)\ g$	$(606 \pm 1)\ g$
$M_T =$	$(355 \pm 1)\ g$	$(355 \pm 1)\ g$	$(355 \pm 1)\ g$

Misure indirette:

$M_{F+T} - M_T =$	$(199.0 \pm 1.4)\ g$	$(197.0 \pm 1.4)\ g$	$(250.0 \pm 1.4)\ g$
$\rho_F =$	$(995 \pm 26)\ kg/m^3$	$(985 \pm 26)\ kg/m^3$	$(1000 \pm 21)\ kg/m^3$
$\rho_F =$	$(1000 \pm 30)\ kg/m^3$	$(990 \pm 30)\ kg/m^3$	$(1000 \pm 20)\ kg/m^3$

Notare errori con una sola cifra significativa!
Il valore medio è troncato alla stessa precisione.

Masse delle sfere

E’ importante pesare più sfere contemporaneamente.

Esempi tratti dalle misure fatte sulle sfere più piccole (diam. 2 mm) con la bilancia di precisione a sensibilità 0.01 s:

- Peso 5 sfere piccole:

  M(5 sfere) = (0.17 ± 0.01) g   da cui

  M(1 sfera) = (0.034 ± 0.002) g (errore relativo 6 %)

- Peso un’unica sfera:

  M(1 sfera) = (0.03 ± 0.01) g (errore relativo 33 %)

Se avessi pesato 100 sfere contemporaneamente, assumendo che tutte abbiano la stessa massa, l’errore relativo sulla pesata complessiva, e quindi sul valor medio, sarebbe stato dello 0.3 %

NB: le misure in alcuni gruppi si discostavano leggermente (ma più della sensibilità della bilancia) da quelle degli altri. Possibili errori nell’inserimento della tara?

Lunghezza e raggio interno del tubo di caduta

La lunghezza del percorso di caduta ho cercato di farla uguale su tutti i tubi, a 60 cm.

Generalmente, **(60.0 ± 0.1) cm** corrisponde a quello che avete effettivamente misurato col metro;
In qualche caso, misure che differiscono da questa di pochi mm sono state riportate.

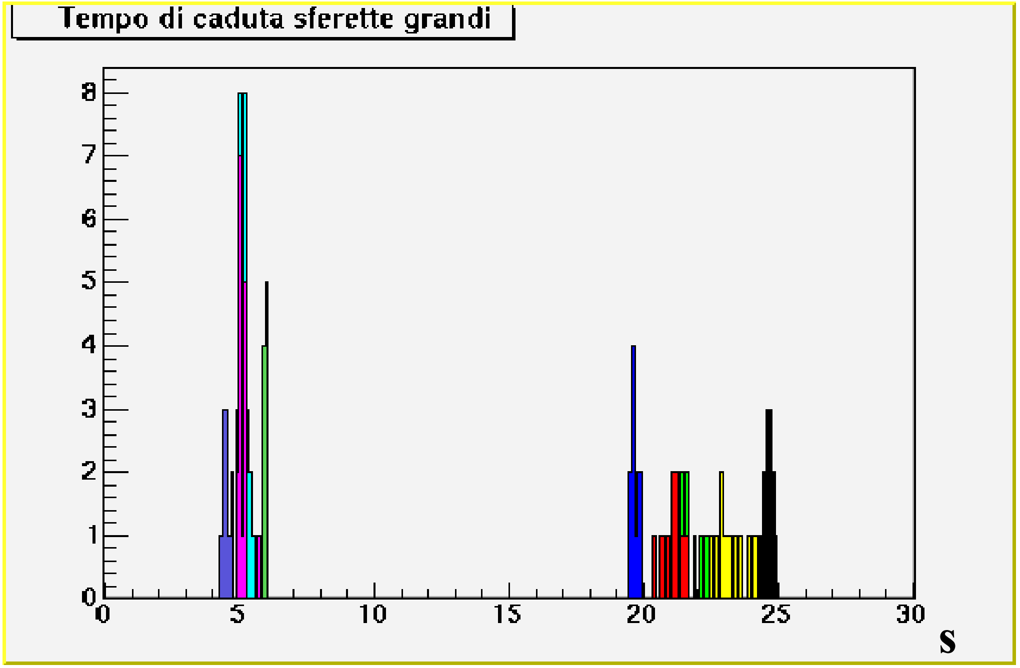
Differenze fra le misure fatte sui vari tubi possono essere dovute a distanze effettivamente differenti fra i traguardi che definiscono il percorso di caduta: <u>non sono necessariamente da considerare imprecisioni nella vostra operazione di misura (errori sistematici)</u>

Tempi di caduta

Esempio tratto da alcuni tempi di caduta delle sferette piccole nei diversi turni (ogni colore corrisponde alle misure di tempo prese da un gruppo diverso).
Evidentemente, c'erano **fluidi con viscosità diverse** (detersivi di diversa composizione). Anche le variazioni all'interno delle misure corrispondenti allo stesso tipo di detersivo sono comunque maggiori delle fluttuazioni statistiche fra le misure fatte nello stesso gruppo: **gli effetti sistematici sono dominanti.**

Possibili effetti sistematici:

• deposito e separazione delle componenti nel detersivo più vecchio;
• non perfetta verticalità del tubo verificata in alcuni casi;
• differenza nelle temperature dei fluidi contenuti in tubi diversi.



Date le differenze fra le varie misure, non è possibile considerare i risultati di tutti i gruppi insieme. Scegliamo un unico gruppo come esempio (dal turno 3).

Fra i criteri che ho utilizzato per la scelta delle misure da usare come esempio ci sono: aver fatto tante misure di tempi di caduta, massa calcolata pesando tutte le sfere, etc. Cioè, cerchiamo di usare un insieme di misure che permettano di **ottenere un piccolo errore relativo sul risultato finale**.

Risultati delle misure: raggi delle sfere

Misure del diametro con un calibro di sensibilità 0.05 mm (1/20 mm):

2.00 mm	8.00 mm
2.00 mm	8.00 mm
2.00 mm	8.00 mm
2.00 mm	8.00 mm

Misure dei due diametri:

- $d_1 = (0.00200 \pm 0.00005)$ m
- $d_2 = (0.00800 \pm 0.00005)$ m

Misure dei due raggi:

- $r_1 = (0.001000 \pm 0.000025)$ m
- $r_2 = (0.004000 \pm 0.000025)$ m

Risultati delle misure: densità del fluido

$$\rho_F = M_F / V_F = (M_{T+F} - M_F) / V_F$$

Misure dirette:

$$V_F = (250 \pm 1)\ \mathrm{cm}^3$$

$$M_{F+T} = (606 \pm 1)\ \mathrm{g}$$

$$M_T = (356 \pm 1)\ \mathrm{g}$$

Misure indirette:

$$M_{F+T} - M_T = (250.0 \pm 1.4)\ \mathrm{g}$$

Notare errore con una sola cifra significativa!
Il valor medio è troncato alla stessa precisione.

$$\rho_F = (1000 \pm 20)\ \mathrm{kg} / \mathrm{m}^3$$

Risultati delle misure: densità delle sfere

$$\rho_S = \mathbf{M_S / V_S}$$

Misure dirette:

$$M_{5\ \text{Sfere piccole}} = (\,0.17 \pm 0.01\,)\ \text{g} \;\rightarrow\; M_{1S} = (\,0.034 \pm 0.0020)\ \text{g}$$

$$M_{4\ \text{Sfere grandi}} = (\,8.32 \pm 0.01\,)\ \text{g} \;\rightarrow\; M_{1S} = (\,2.080 \pm 0.0025)\ \text{g}$$

Misure indirette:

$$V_S = (4/3\,\pi\, r_S^{\,3}) = (\quad 4.2 \pm 0.3\ )\ \text{mm}^3 \qquad (\text{ sfere piccole })$$
$$= (268.1 \pm 5.0\ )\ \text{mm}^3 \qquad (\text{ sfere grandi })$$

$$\rho_S = (8117 \pm 774)\ \ \text{kg}/\text{m}^3\ (\text{piccole}) \rightarrow \mathbf{(8100 \pm 800)\ \ kg/m^3}$$
$$= (7759 \pm 146)\ \ \text{kg}/\text{m}^3\ (\ \text{grandi}) \rightarrow \mathbf{(7800 \pm 100)\ \ kg/m^3}$$

Dom: le due misure di densità sono compatibili?
Risp: Si! (differenza più piccola degli errori)

Differenza delle due densità:

$$\rho_S{}^P - \rho_F = (8117. \pm 774.)\ kg/m^3 - (1000. \pm 21.)\ kg/m^3$$
$$\rho_S{}^G - \rho_F = (7759. \pm 146.)\ kg/m^3 - (1000. \pm 21.)\ kg/m^3$$

Scritte tutte le cifre risultanti dal calcolo: inutile! Il primo termine ha già l'incertezza sulla seconda cifra significativa: nel risultato non potranno esserci più di due cifre significative senza errore.

Teniamo tre ($3 = 2 + 1$) cifre significative nei calcoli, e poi approssimiamo il risultato che scriviamo alla seconda cifra:

$$8120. - 1000. = 7120. \quad \rightarrow \quad \rho_S{}^P - \rho_F = (7100. \pm 800.)\ kg/m^3$$
$$\sqrt{770.^2 + 20.^2} = 770.3$$

$$7760. - 1000. = 6760. \quad \rightarrow \quad \rho_S{}^G - \rho_F = (6800. \pm 200.)\ kg/m^3$$
$$\sqrt{150.^2 + 20.^2} = 151.3$$

Notiamo che la precisione è data dalla misura della densità delle sfere di acciaio: non si aumenta la precisione sulla misura della differenza di densità se si migliora (solo) la precisione della misura di densità del fluido.

Risultati delle misure: distanza fra i traguardi del tubo

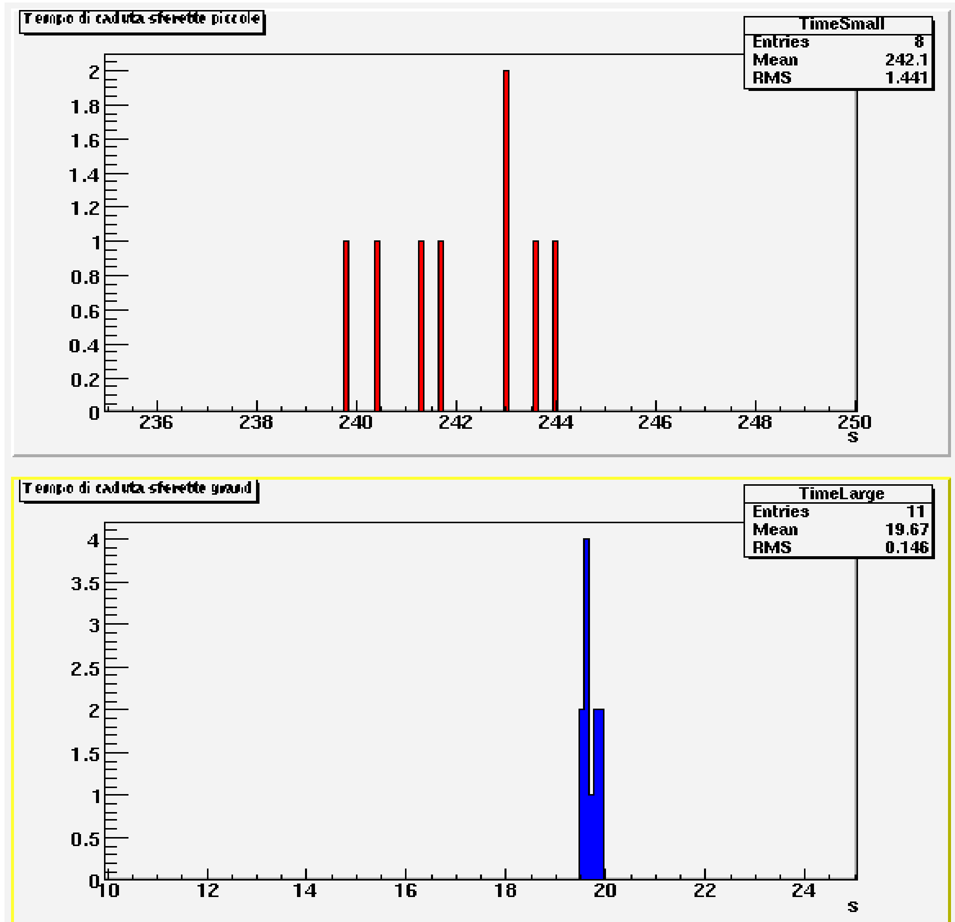
Un'unica misura, ottenuta con un metro di precisione 1 mm:

$$L = (60.0 \pm 0.1)\ \text{cm} = (0.600 \pm 0.001)\ \text{m}$$

Risultati delle misure: <u>tempi di caduta</u>

Misure di tempo di caduta, in secondi, per i due raggi della sfera considerati, con cronometri di precisione 0.1 s oppure 0.01 s:

Piccola	Grande
243.59	19.86
243.02	19.58
244.0	19.5
243.0	19.6
239.77	19.52
241.30	19.55
241.7	19.7
240.4	19.79
	19,8
	19.55



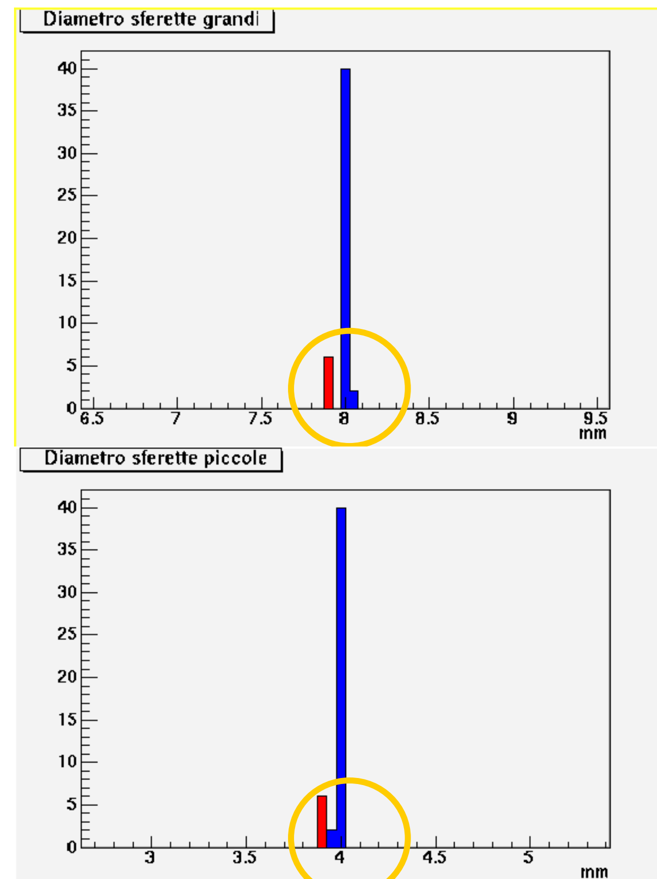
Valori medi e errori sui valori medi delle 8 (11) misure:

$$T_1 = (242.1 \pm 0.5)\ \mathrm{s} \qquad T_2 = (19.67 \pm 0.05)\ \mathrm{s}$$

Rappresentare i risultati sotto forma di istogramma (grafico) aiuta a visualizzare e comprendere meglio eventuali problemi.

Ad esempio, la presenza di un picco spostato rispetto a quello principale poteva essere indizio che uno dei cronometri non era calibrato bene; oppure che una delle sfere era composta di un materiale differente, oppure di volume differente.

Un singolo risultato al di fuori del picco (o comunque pochi e scorrelati fra loro) può essere dovuto a imprecisioni in quella particolare misura.
Se col ragionamento si ritiene che alcune delle misure hanno una elevata probabilità di non essere corrette, si potrebbe anche decidere di non considerare quelle misure.
Esempio: i grafici dei diametri delle sferette dal laboratorio del 2006, dove le misure in rosso erano state prese tutte dallo stesso gruppo.



Misura della viscosità col viscosimetro a caduta

$$\eta = 2/9 \cdot r^2 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g \cdot T / L$$

$r_1 = (0.002000 \pm 0.000025)$ m

$r_2 = (0.004000 \pm 0.000025)$ m

$(\rho_S - \rho_F)_1 = (7120 \pm 770)$ Kg / m^3

$(\rho_S - \rho_F)_2 = (6760. \pm 150)$ Kg / m^3

$g = 9.81$ m / s^2

$T_1 = (242.10 \pm 0.54)$ s

$T_2 = (19.67 \pm 0.05)$ s

$L = (0.600 \pm 0.001)$ m

Nei calcoli tronco alla seconda cifra significativa dell'errore, per non avere problemi di arrotondamento. ⇨

Nel risultato finale ci sarà solo una cifra significativa per l'errore.

Errore associato alla misura della viscosità (dalle formule viste per la propagazione degli errori di misura nei calcoli):

$$\eta \ = \ 2/9 \cdot r^{2} \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g \cdot T / L$$

$$\begin{aligned}(\Delta\eta / \eta)^2 \ = \ & (2 \cdot \Delta r / r)^2 \\ & + (\Delta(\rho_S - \rho_F) / (\rho_S - \rho_F))^2 \\ & + (\Delta T / T)^2 \\ & + (\Delta L / L)^2\end{aligned}$$

Risultati (con componenti dell'errore)

	η_1	η_2
	6.262 Pa · s	**7.732 Pa · s**
Raggio sfera	**0.313 Pa · s**	**0.097 Pa · s**
Densità materiali	**0.681 Pa · s**	**0.169 Pa · s**
Lunghezza tubo	**0.010 Pa · s**	**0.013 Pa · s**
Tempo di caduta	**0.014 Pa · s**	**0.018 Pa · s**
Errore totale	**0.750 Pa · s**	**0.195 Pa · s**

$$\eta_1 = (6.3 \pm 0.8)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$
$$\eta_2 = (7.7 \pm 0.2)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

Le due misure sono compatibili ?

L'errore (incertezza) va <u>interpretato in termini probabilistici</u>.

I due risultati differiscono di poco meno di due volte l'errore

⇓

Bassa probabilità (circa 5 %) che siano due misure della stessa grandezza

Condizioni per cui vale la legge di Stokes (nella formulazione semplice che abbiamo dato) :

- corpo sferico;

- **moto laminare (non turbolento) nel fluido**;

- **fluido contenuto in un recipiente di dimensioni infinite** (cioè è trascurabile l’interazione con le pareti del recipiente).

Correzione per il raggio finito del tubo

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 - 2.104 \cdot r / R + \dots)$$

Raggio interno del tubo : **$R = (2.7 \pm 0.1)$ cm**

	η_1	η_2
	5.810 Pa · s	**5.895 Pa · s**
Raggio sfera	**0.280 Pa · s**	**0.065 Pa · s**
Densità materiali	**0.632 Pa · s**	**0.128 Pa · s**
Lunghezza tubo	**0.010 Pa · s**	**0.010 Pa · s**
Tempo di caduta	**0.013 Pa · s**	**0.014 Pa · s**
Raggio del tubo	**0.008 Pa · s**	**0.026 Pa · s**
Errore totale	**0.691 Pa · s**	**0.147 Pa · s**

$$\eta_1 = (5.8 \pm 0.7)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$
$$\eta_2 = (5.9 \pm 0.1)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

Correzione per la non laminarità

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 - 27/16 \cdot v^2 / (g \cdot r) \cdot \rho_F / (\rho_S - \rho_F) + \ldots)$$

	η_1	η_2
	5.809 Pa · s	5.860 Pa · s
Raggio sfera	0.280 Pa · s	0.065 Pa · s
Densità materiali	0.632 Pa · s	0.128 Pa · s
Lunghezza tubo	0.010 Pa · s	0.010 Pa · s
Tempo di caduta	0.013 Pa · s	0.014 Pa · s
Raggio del tubo	0.008 Pa · s	0.026 Pa · s
Numero di Reynolds	0.001 Pa · s	0.001 Pa · s
Errore totale	0.691 Pa · s	0.146 Pa · s

$$\eta_1 = (5.8 \pm 0.7)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$
$$\eta_2 = (5.9 \pm 0.1)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

Osservazioni

Volendo migliorare la precisione della misura che cosa fareste ?

E se mi fossi scordato qualche correzione ? Che cosa fareste per essere sicuri della misura, cioè per poter usare effettivamente lo strumento come **viscosimetro** ?

RISPOSTE

Volendo migliorare la precisione della misura bisognerà agire sulle misure dirette che propagano sul risultato finale l'errore maggiore. Migliorando l'errore loro associato, anche l'errore sul risultato finale diventerà più piccolo.

Ogni strumento di misura va tarato e calibrato con grandezze note: nel nostro caso, la viscosità dell'acqua, della glicerina, e di altri fluidi campione è nota (in funzione della temperatura), e può essere usata per calibrare lo strumento.