Esperienza del viscosimetro a caduta

Parte del corso di fisica per CTF

Tenuto da Andrea Perrotta , perrotta@bo.infn.it

La fisica è una scienza sperimentale (come anche Chimica, Farmacia, …):

Osservazione (esperienza)

↓

Leggi fisiche

↓

Prevedere il comportamento di un sistema

(e usarlo a proprio vantaggio, quando serve)

Un corpo in caduta libera è sottoposto a una forza costante: **moto uniformemente accelerato**.

$$\vec{\mathcal{F}} = m\,\vec{a}$$

Nel caso di caduta nel campo gravitazionale:

$$\vec{\mathcal{F}} = m\,\vec{g}$$

La velocità aumenta linearmente col tempo:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t$$

Lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo:

$$\vec{s} = \ldots + \tfrac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2$$

Nel caso di una sferetta di metallo che cade in un fluido “viscoso”, il moto non è libero ma frenato:

$$\vec{v} = \text{costante}$$

Moto rettilineo uniforme

$$\Downarrow$$

Accelerazione nulla

$$\Downarrow$$

Forza totale agente sul corpo nulla

$$\vec{\mathcal{F}}_{\mathbf{TOT}} = m\,\vec{a} = 0$$

Quali sono le forze che agiscono sulla sferetta che cade immersa in un fluido ?

- **Gravità;**
- **Spinta idrostatica (spinta di Archimede);**
- **Attrito del fluido (viscosità).**

$$\mathbf{F_{TOT} = F_G + F_A + F_V = 0}$$

Forza di gravità

$$\vec{\mathbf{F}}_G = \mathbf{m}_{\mathbf{sfera}} \cdot \vec{\mathbf{g}}$$

La forza di gravità agente su una sfera metallica di volume $\mathbf{V}_{\mathbf{sfera}}$, raggio $\mathbf{r}_{\mathbf{sfera}}$ e densità $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{sfera}}$ è pertanto:

$$\vec{\mathbf{F}}_G = \mathbf{V}_{\mathbf{sfera}} \cdot \rho_{\mathbf{sfera}} \cdot \vec{\mathbf{g}}$$

$$= \mathbf{4/3}\, \pi \cdot \mathbf{r}_{\mathbf{sfera}}^{\mathbf{3}} \cdot \rho_{\mathbf{sfera}} \cdot \vec{\mathbf{g}}$$

Spinta di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato

$$\vec{F}_A = -\vec{P}_{\text{fluido spostato}} = -m_{\text{fluido spostato}} \cdot \vec{g}$$
$$= -V_{\text{fluido spostato}} \cdot \rho_{\text{fluido}} \cdot \vec{g}$$

Nel caso di una sferetta di raggio **r** , la spinta di Archimede esercitata dal fluido su di essa è:

$$\vec{F}_A = -\ 4/3\,\pi\, r^3 \cdot \rho_{\text{fluido}} \cdot \vec{g}$$

Se agisse solo la forza peso e la spinta idrostatica, il corpo sarebbe sottoposto a una forza non nulla (se di densità diversa da quella del fluido in cui è immerso):

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{G}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}} = \mathbf{4/3}\,\pi\,\mathbf{r^3} \cdot (\rho_{\,\mathbf{sfera}} - \rho_{\,\mathbf{fluido}}) \cdot \vec{\mathbf{g}}$$

Osservazione sperimentale: il corpo raggiunge una certa velocità (velocità limite) e poi prosegue di moto rettilineo uniforme.

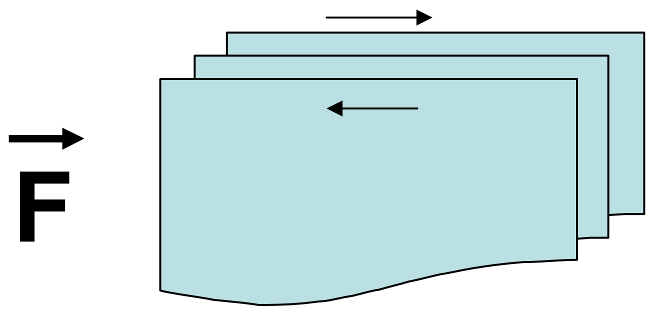
$$\Downarrow$$

La risultante della forza peso e della spinta di Archimede è bilanciata da una forza proporzionale alla velocità

Forze proporzionali alla velocità sono forze del tipo di attrito.

Viscosità

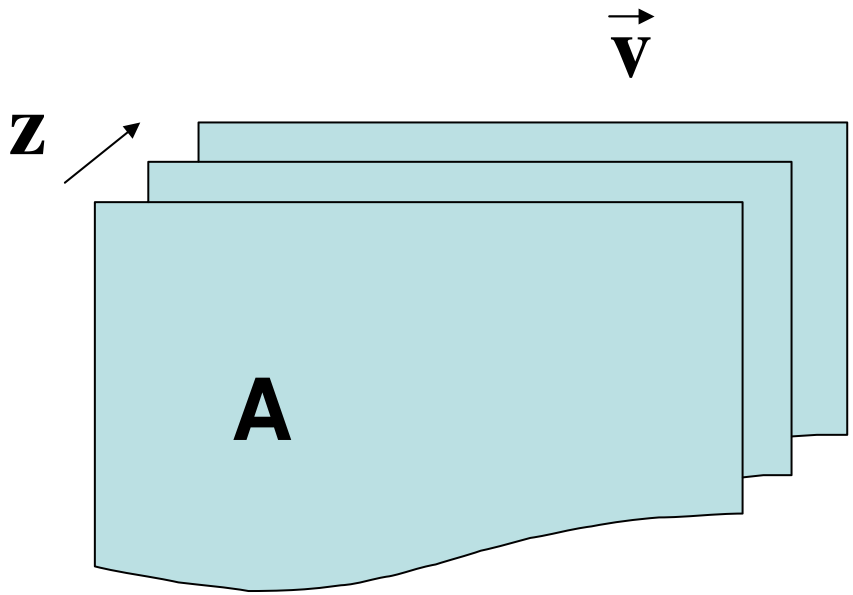
Le forze di legame che agiscono fra le molecole del fluido tendono a tenerle unite: per far slittare uno straterello di fluido rispetto allo strato adiacente dobbiamo esercitare una forza:



Le forze intermolecolari variano con la temperatura: **la forza che dobbiamo applicare per contrastarle dipende pertanto dalla temperatura.**

Nel caso di due lastre parallele di fluido, di superficie **A** e distanza **z** fra loro, si verifica che:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{V}} = - \eta \cdot \mathbf{A} / \mathbf{z} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$



Il coefficiente di proporzionalità η è una caratteristica del fluido ed è detto **viscosità del fluido**.

$$[\,\eta\,] = [\,\mathbf{F}\,][\,\mathbf{l}\,][\,\mathbf{l}^{-2}\,][\,\mathbf{v}^{-1}\,] = [\,\mathbf{F}\,][\,\mathbf{l}^{-2}\,][\,\mathbf{t}\,]$$

Nel Sistema Internazionale (SI) :

$$[\,\eta\,] = \mathbf{N / m^2 \cdot s} = \mathbf{Pa \cdot s}$$

Tipicamente, la viscosità diminuisce col crescere della temperatura, perché le forze intermolecolari del fluido tendono a diminuire con la temperatura

Anche un corpo che si muove all'interno di un fluido viene frenato dalla viscosità del fluido. Le relazioni fra le grandezze fisiche in questo caso sono più complicate. Stokes ne ha formulata una nella seguente approssimazione:

- corpo sferico (di raggio **r**);
- moto laminare (non turbolento) nel fluido;
- fluido contenuto in un recipiente di dimensioni infinite (cioè è trascurabile l'interazione con le pareti del recipiente).

In questo caso vale la **legge di Stokes**:

$$\vec{\mathbf{F}}_V = -6\pi\eta \cdot \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Nel caso delle nostre sfere d'acciaio in caduta nel fluido:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_G + \vec{F}_A + \vec{F}_V$$

A regime, v = costante (come abbiamo verificato) e $F_{TOT} = 0$.

Assumendo che valgano le approssimazioni per cui è stata formulata la legge di Stokes:

$$4/3\, \pi\, r^3\, (\rho_S - \rho_F) \cdot \vec{g} - 6\pi\, \eta \cdot r \cdot \vec{v} = 0$$

Il moto, la gravità e la spinta di Archimede agiscono solo sull'asse verticale → l'equazione vettoriale (sistema di tre equazioni) può diventare un'equazione scalare (una sola equazione), che può essere risolta per trovare la viscosità η.

Formula per la misura (indiretta) della viscosità col viscosimetro a caduta

Se $g = |\vec{g}|$ e $v = |\vec{v}|$, risolvendo l'equazione precedente per η:

$$\boxed{\eta = 2/9\ \mathbf{r}^2\ (\rho_S - \rho_F) \cdot \mathbf{g} / \mathbf{v}}$$

La misura è indiretta perché non è fatta direttamente confrontando la grandezza da misurare con una grandezza di riferimento (es: misura di altezza con un metro) oppure leggendo il valore fornito direttamente dal display di uno strumento (es: misura di peso con una bilancia ad ago o a display a cristalli liquidi), ma è fatta utilizzando e combinando fra loro altre misure: $\mathbf{r}$, ρ_s , ρ_f , $\mathbf{v}$. Anche queste grandezze potranno, a loro volta, essere state misurate direttamente o indirettamente.

Raggio della sferetta d'acciaio: **r**

Si misura direttamente con un calibro. (In realtà la misura diretta è quella del diametro…).

Misure ripetute della stessa sferetta danno gli stessi risultati

La precisione della misura è data dalla sensibilità dello strumento

L'errore da associare al valore misurato (cioè l'incertezza con cui si conosce il valore "vero" della grandezza misurata) è la più piccola divisione apprezzabile dello strumento di misura.

Densità delle sfere d'acciaio: ρ_s

Misura indiretta:

$$\boldsymbol{\rho_S = M_S / V_S = M_s / (4/3\, \pi\, r_S{}^3)}$$

Si pesa la sferetta con una bilancia di precisione, ottenendone la massa. Il raggio si misura col calibro.

Errori:

$$(\Delta\rho_S/\rho_S)^2 = (\Delta M_S/M_S)^2 + (3 \cdot \Delta r_S/r_S)^2$$

La precisione della bilancia (**ΔM**) è indipendente dalla massa pesata. Si ottiene un errore relativo più piccolo sulla massa se si pesa una massa più grande $\rightarrow$ pesare **N** sferette dello stesso raggio contemporaneamente riduce il primo termine dell'errore.

Densità del fluido: ρ_F

Misura indiretta:

$$\boldsymbol{\rho_F = M_F / V_F}$$

Si misura la massa di fluido contenuta in un recipiente di volume noto (es: provetta graduata).

$$M_F = M_{F + tara} - M_{tara}$$

(NB: in realtà, la misura di massa è indiretta: quello che si misura direttamente sulla bilancia è la forza peso, che va poi divisa per **g**)

Errori:

$$(\Delta\rho_F/\rho_F)^2 = (\Delta M_F/M_F)^2 + (\Delta V_F/V_F)^2$$

$$(\Delta M_F)^2 = (\Delta M_{F + tara})^2 + (\Delta M_{tara})^2$$

Osservazione:

Nella formula della viscosità entra la **differenza** fra le due densità.

La precisione sulla misura della viscosità dipende dalla precisione sulla misura della differenza delle densità:

$$\Delta(\rho_S - \rho_F)^2 = (\Delta\rho_F)^2 + (\Delta\rho_S)^2$$

<u>Si migliora la precisione della misura finale se si riesce a migliorare la misura meno precisa fra quelle delle due densità. Non si ottiene nessun vantaggio, in pratica, a migliorare la misura delle due che è già più precisa, se non si riesce a ridurre l'errore anche dell'altra.</u>

Velocità di regime di caduta della sfera: $v = L / T$

Misura indiretta: si ricava dal rapporto fra la misura diretta della lunghezza di caduta, fatta con un metro graduato, e la misura diretta del tempo di caduta, fatta col cronometro.

In entrambi i casi la precisione dello strumento è migliore della precisione con cui si riesce a fare la misura: le fluttuazioni statistiche sono più grandi della sensibilità degli strumenti e la precisione della misura di **L** e di **T** (ovvero l'errore da associare) sarà data dalla larghezza della distribuzione delle misure fatte.

NB: sfere di raggio diverso cadranno con velocità di regime diversa. η però dipende solo dal fluido, e il valore misurato della viscosità deve essere sempre lo stesso, **entro gli errori sperimentali**.

Attenzione

La viscosità di un fluido **dipende fortemente dalla sua temperatura**: la temperatura è un parametro che va monitorato per sapere a quale temperatura corrisponde il valore di η misurato, e per **controllare che una eventuale variazione di temperatura durante la prova non infici il risultato finale**.

La formula trovata per η vale nelle approssimazioni della legge di Stokes. Per avere il fluido in regime laminare, bisogna stare **attenti a non agitarlo, creargli delle bolle d'aria, etc**.

Misuriamo anche il diametro interno del tubo contenente il fluido viscoso, per valutare l'effetto della deviazione dalla legge di Stokes (vedi dopo).

Misure e errori di misura (incertezze)

Ogni volta che facciamo una **misura** cerchiamo di stimare il **valore vero** di una **grandezza**. C'è un limite alla precisione con la quale facciamo questa stima:

- **Sensibilità dello strumento di misura**;
- **Fluttuazioni del valore misurato**;
- (**Possibilità di errori** nella procedura e/o nello strumento).

$$X_{mis} = X_{vero} + \varepsilon$$

Se la sensibilità dello strumento è maggiore delle fluttuazioni derivanti dalla procedura di misurazione, misure ripetute daranno lo stesso valore numerico di $\mathbf{X}_{\mathbf{mis}}$. L'incertezza con cui conosciamo $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$ è pertanto data dalla sensibilità dello strumento di misura usato.

Esempio, misura di lunghezza con un metro con sensibilità 1 mm:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{vero}} = \mathbf{27.537609076\ ...\ cm}$$
$$\mathbf{X}_{\mathbf{mis}} = \mathbf{27.5\ cm}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.1\ cm}$$

$$\mathbf{X = (27.5 \pm 0.1\ )\ cm}$$

In realtà, con un occhio allenato potremmo accorgerci che X_{vero} si trova fra 27.5 e 27.6 cm, e usare la **mezza tacca** come incertezza:

$$\mathbf{X = (27.55 \pm 0.05)\ cm}$$

L’incertezza sul risultato della misura (o **errore sulla misura**) può essere espresso come:

• **errore assoluto**, cioè indicato con le stesse unità di misura del valore misurato;
• **errore relativo**, cioè indicato come frazione del valore misurato.
L’errore relativo viene spesso espresso in percentuale (%) del valore misurato: la percentuale non è altro che un’altra maniera di indicare una frazione.

Esempio:

$X = (27.5 \pm 0.1)$ cm

Errore assoluto → 0.1 cm

Errore relativo → $0.1 / 27.5 = 1/275 \sim 0.0036 = 0.36\ \%$

Se le fluttuazioni sono più grandi della sensibilità dello strumento, misure ripetute daranno tipicamente risultati diversi. Se le fluttuazioni sono **casuali**, i vari valori di $\mathbf{X}_{\mathbf{mis}}$ si distribuiranno **casualmente** (cioè a volte prima e a volte dopo) attorno a $\mathbf{X}_{\mathbf{vero}}$.

$$X^{i}_{mis} = X_{vero} + \varepsilon^{i}$$

Se si compie un numero molto grande di misure ("**al limite di un numero infinito di operazioni di misura**") le fluttuazioni tenderanno a compensarsi, e **il valor medio delle misure tenderà al valore vero**:

$$< \varepsilon^{i} > \quad \rightarrow \quad 0$$

$$< X^{i}_{mis} > \quad \rightarrow \quad X_{vero}$$

Non possiamo fare infinite misure: dobbiamo stimare $\mathbf{X}_{vero}$ e la precisione con cui lo conosciamo da un numero finito di misure. La stima migliore di $\mathbf{X}_{vero}$ è la **media su N misure**:

$$\mathbf{X}_{mis} = \mathbf{1/N} \cdot \sum_{i=1,N} (\mathbf{X}^{i}_{mis})$$

$$\mathbf{X}_{vero} = \mathbf{X}_{mis} \pm \Delta\mathbf{X}$$

Per valutare l'entità dell'errore $\Delta\mathbf{X}$ da associare, osserviamo che il valor medio degli scarti $< \mathbf{X}^{i}_{mis} - \mathbf{X}_{mis} >$ è uguale a zero per definizione di media. Chiamiamo **scarto quadratico medio** (o **varianza**) il valor medio del quadrato degli scarti:

$$\sigma^2 = \mathbf{1/N} \cdot \sum_{i=1,N} (\mathbf{X}^{i}_{mis} - \mathbf{X}_{mis})^2$$

e utilizziamo la radice quadrata dello scarto quadratico medio (**deviazione standard**), che è un indicatore della larghezza della distribuzione delle misure, come stima dell'errore sulle misure:

$$\Delta\mathbf{X} = \sigma = \sqrt{\mathbf{1/N} \cdot \sum_{i=1,N} (\mathbf{X}^{i}_{mis} - \mathbf{X}_{mis})^2}$$

Supponiamo di fare tante serie di misure. Ognuna di queste serie è caratterizzata dal suo valor medio.

I valori medi sono più vicini al valore "vero" rispetto alle singole misure; avranno perciò una distribuzione più stretta di quella delle singole misure.

Si dimostra che, mentre la deviazione standard è l'incertezza statistica con cui si distribuisce la singola misura attorno al valor vero, **l'errore da associare al valor medio di tutte le misure** è:

$$\Delta X_{mis} = 1/\sqrt{N} \cdot \sigma = 1/N \cdot \sqrt{\sum_{i=1,N} (X^i_{mis} - X_{mis})^2}$$

Interpretazione probabilistica

Se i risultati delle misure sono **casuali** e **indipendenti fra loro**, tenderanno ad assumere una distribuzione simmetrica a campana, centrata sul valor medio e con larghezza dell'ordine della deviazione standard (distribuzione di Gauss).

Una nuova misura avrà una probabilità:

- **del 68.3% di stare a 1 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 95.4% di stare a 2 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 98.8% di stare a 2.5 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **del 99.7% di stare a 3 σ dal valor medio della distribuzione;**
- **…**

Gli stessi valori valgono per la probabilità del valor medio di una serie di misure di stare a N volte l'errore sulla media dal valor vero.

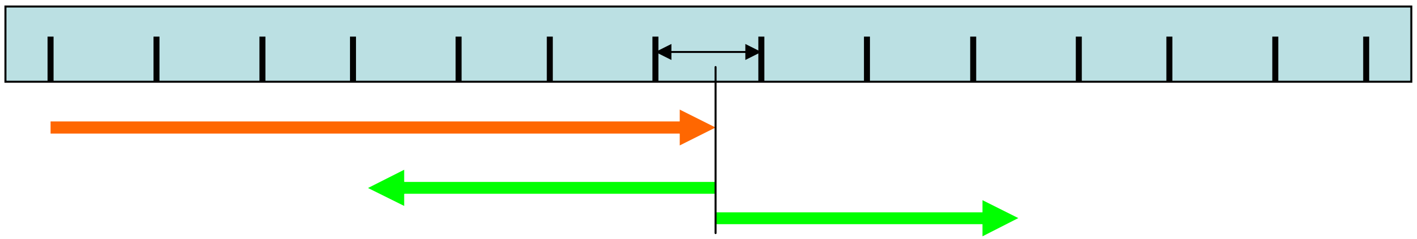
Osservazioni:

• All’aumentare del numero delle misure la varianza (e pertanto anche la deviazione standard) tende ad un valore costante. Invece, **l’errore sulla media diminuisce come l’inverso della radice quadrata del numero di misure**.

• Un insieme di tante misure (distribuzione di misure) è stato riassunto da due soli valori: **la media e la deviazione standard** (oppure l’errore sulla media, che non è altro che la deviazione standard divisa per la radice quadrata del numero delle misure). Abbiamo perso il dettaglio (le singole misure), ma abbiamo estratto proprio e solo le quantità che servono ai nostri scopi. Descrizioni sempre più accurate della distribuzione di partenza si potranno ottenere introducendo altri parametri (es: asimmetrie, etc.).

Propagazione degli errori
Somma o differenza di due grandezze

L'incertezza **assoluta** sulla somma o sulla differenza di due grandezze ($X = A \pm B$) è uguale.



Singola misura: $X_i = A_i \pm B_i$

Valor medio: $\langle X_i \rangle = \langle A_i \rangle \pm \langle B_i \rangle$

Varianza: $\langle (X_i - X)^2 \rangle = \langle (A_i - A)^2 \rangle + \langle (B_i - B)^2 \rangle$

Errore: $\Delta X = \sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}$

<u>Nella somma o differenza di due grandezze si sommano (in quadratura) gli errori assoluti</u>.

Propagazione degli errori
Prodotto di una costante per una grandezza

$$X = \mathbf{k} \cdot A$$

Singola misura: $X_i = \mathbf{k} \cdot A_i$

Valor medio: $< X_i > = \mathbf{k} \cdot < A_i >$

Varianza: $< (X - X_i)^2 > = \mathbf{k^2} \cdot < (A - A_i)^2 >$

Errore: $\Delta X = \mathbf{k} \cdot \Delta A$

L'ultima relazione può anche essere scritta come errore relativo, invece che assoluto:

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta A}{A}$$

Propagazione degli errori
Prodotto (o rapporto) di due grandezze

$$X = A \cdot B$$

Singola misura: $X_i = A_i \cdot B_i$

Valor medio: $<X_i> = <A_i> \cdot <B_i>$

Errore: $\frac{\Delta X}{X} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$

Nel caso di un rapporto,

$$X = A / B = A \cdot B^{-1}$$

siccome $(\Delta B^{-1} / B^{-1}) = (\Delta B / B)$, vale sempre la regola per cui si sommano in quadratura gli errori **relativi**.

Propagazione degli errori
Potenza di una grandezza

$$X = A^n$$

Equivale a

$$X = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \qquad \textbf{n} \text{ volte}$$

Essendo un prodotto di grandezze, si sommano gli **errori relativi**. Questa volta **linearmente** perché tutte le fluttuazioni dei singoli fattori sono uguali e vanno nella stessa direzione (cioè, non sono indipendenti):

$$\Delta X/X = \Delta A/A + \Delta A/A + \Delta A/A + \ldots \quad \textbf{n} \text{ volte}$$

$$\Delta X/X = n \cdot (\Delta A/A)$$

Risultati delle misure: raggi delle sfere

Misure del diametro con un calibro di sensibilità 0.05 mm (1/20 mm):

5.00 mm	6.30 mm
5.00 mm	6.40 mm
5.00 mm	6.30 mm
5.00 mm	6.40 mm

Valori medi:

- $d_1 = 5.00$ mm
- $d_2 = 6.35$ mm

Errori sui valori medi (più piccoli della sensibilità del calibro: userò pertanto conservativamente la sensibilità di 0.05 mm come errore sul diametro)

- $\sigma(d_1) = 0.000$ mm
- $\sigma(d_2) = 0.025$ mm

Misure dei due diametri:

- $\mathbf{d_1 = (0.00500 \pm 0.00005)\ m}$
- $\mathbf{d_2 = (0.00635 \pm 0.00005)\ m}$

Misure dei due raggi:

- $\mathbf{r_1 = (0.002500 \pm 0.000025)\ m}$
- $\mathbf{r_2 = (0.003175 \pm 0.000025)\ m}$

Risultati delle misure: densità del fluido

$$\rho_F = M_F / V_F = (M_{T+F} - M_F) / V_F$$

Misure dirette:

$$V_F = (87.5 \pm 0.5) \text{ cm}^3$$

$$M_{F+T} = (196.2 \pm 0.1) \text{ g}$$

$$M_T = (106.0 \pm 0.1) \text{ g}$$

Misure indirette:

$$M_{F+T} - M_T = (90.20 \pm 0.14) \text{ g}$$

Notare errore con una sola cifra significativa!
Il valor medio è troncato alla stessa precisione.

$$\rho_F = (1031 \pm 6) \text{ kg} / \text{m}^3$$

Risultati delle misure: <u>densità delle sfere</u>

$$\rho_S = M_S / V_S$$

<u>Misure dirette:</u>

$$M_{10\ \text{Sfere piccole}} = (4.8 \pm 0.1)\ g \rightarrow M_{1S} = (0.48 \pm 0.01)\ g$$

$$M_{10\ \text{Sfere grandi}} = (10.1 \pm 0.1)\ g \rightarrow M_{1S} = (1.01 \pm 0.01)\ g$$

<u>Misure indirette:</u>

$$V_S = (4/3\ \pi\ r_S^{\ 3}) = (65 \pm 2)\ mm^3 \quad \text{(sfere piccole)}$$

$$= (134 \pm 3)\ mm^3 \quad \text{(sfere grandi)}$$

$$\rho_S = (7334 \pm 268)\ kg / m3 \quad \text{(sfere piccole)}$$

$$= (7534 \pm 193)\ kg / m3 \quad \text{(sfere grandi)}$$

Scegliamo la misura di densità con l'errore più piccolo:

$$\rho_S = (7500 \pm 200)\ kg / m^3$$

Notare <u>errore con una sola cifra significativa</u>!
Il valor medio è troncato alla stessa precisione.

<u>Differenza delle due densità</u>:

$$\rho_S - \rho_F = (7534. \pm 193.)\ kg/m^3 - (1031. \pm 6.)\ kg/m^3$$

Scritte tutte le cifre risultanti dal calcolo: <u>inutile</u>!

Il primo termine ha già l'incertezza sulla seconda cifra significativa: <u>nel risultato non potranno esserci più di due cifre significative senza errore</u>.

Teniamo tre (3 = 2 + 1) cifre significative nei calcoli, e poi approssimiamo il risultato alla seconda cifra:

$$7530. - 1030. = 6500.$$

$$\sqrt{193.^2 + 6.^2} = 193.$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{\rho_S - \rho_F = (6500. \pm 200.)\ kg/m^3}$$

Risultati delle misure: <u>distanza fra i traguardi del tubo</u>

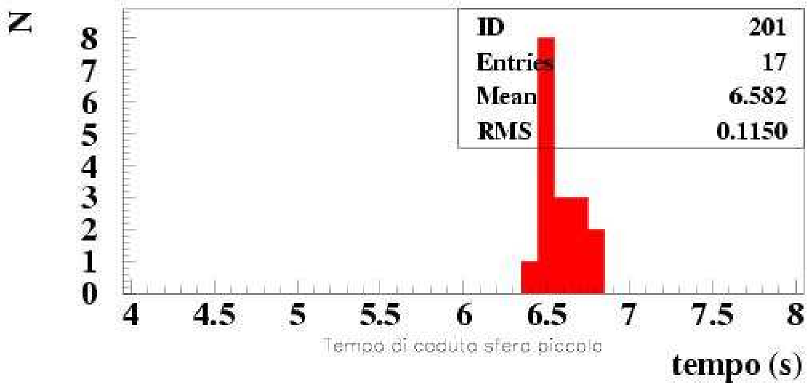
Un'unica misura, ottenuta con un metro di precisione 1 mm:

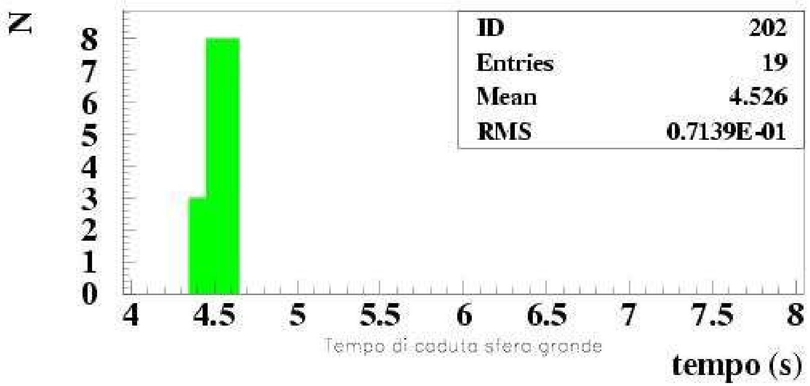
$$L = (57.1 \pm 0.1)\ \text{cm} = (0.571 \pm 0.001)\ \text{m}$$

Risultati delle misure: <u>tempi di caduta</u>

20 misure, in secondi, per ogni raggio della sfera (non tutte riuscite…) con un cronometro di precisione 0.1 s:

Piccola		Grande	
-	6.5	-	4.5
6.8	6.5	4.5	4.5
6.8	-	4.5	4.6
6.7	-	4.6	4.6
6.7	6.6	4.5	4.4
6.5	6.5	4.6	4.4
6.5	6.4	4.6	4.5
6.6	6.5	4.6	4.4
6.5	6.6	4.6	4.6
6.7	6.5	4.5	4.5





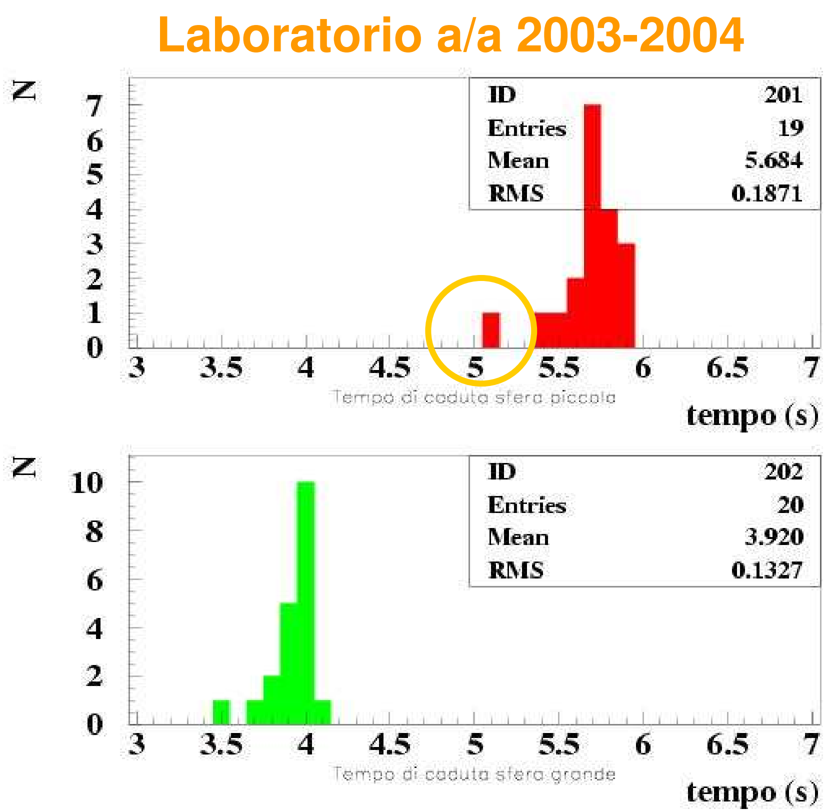
Con (circa) 20 misure, gli errori sulle medie sono minori della sensibilità del cronometro: usiamo conservativamente tale sensibilità come errore sulle misure dei tempi medi.

$T_1 = (6.6 \pm 0.1)$ s $\qquad T_2 = (4.5 \pm 0.1)$ s

Rappresentare i risultati sotto forma di istogramma (grafico) aiuta a visualizzare e comprendere meglio eventuali problemi.

Ad esempio, la presenza di un picco spostato rispetto a quello principale poteva essere indizio che uno dei cronometri non era calibrato bene; oppure che una delle sfere era composta di un materiale differente, oppure di volume differente.

Un singolo risultato al di fuori del picco (o comunque pochi e scorrelati fra loro) può essere dovuto a imprecisioni in quella particolare misura. In tal caso, si potrebbe anche decidere di non considerare una singola misura, qualora la si ritenga sicuramente errata. Esempio: il grafico dei tempi di caduta dei vostri colleghi dell’anno scorso:



Misura della viscosità col viscosimetro a caduta

$$\eta = 2/9 \cdot r^2 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g \cdot T / S$$

$r_1 = (0.002500 \pm 0.000025)$ m $\qquad r_2 = (0.003175 \pm 0.000025)$ m

$(\rho_S - \rho_F) = (6500. \pm 190.)$ Kg / m^3

$g = 9.81$ m / s^2

$T_1 = (6.58 \pm 0.10)$ s $\qquad T_2 = (4.53 \pm 0.10)$ s

$L = (0.571 \pm 0.010)$ m

Nei calcoli tronco alla seconda cifra significativa dell'errore, per non avere problemi di arrotondamento. ⇨
Nel risultato finale ci sarà solo una cifra significativa per l'errore.

Errore associato alla misura della viscosità (dalle formule viste per la propagazione degli errori di misura nei calcoli):

$$\eta = 2/9 \cdot r^2 \cdot (\rho_S - \rho_F) \cdot g \cdot T / S$$

$$(\Delta\eta / \eta)^2 = (2 \cdot \Delta r / r)^2 + (\Delta(\rho_S - \rho_F) / (\rho_S - \rho_F))^2 + (\Delta T / T)^2 + (\Delta S / S)^2$$

Risultati (con componenti dell'errore)

	η_1	η_2
	1.022 Pa · s	1.133 Pa · s
Raggio sfera	0.020 Pa · s	0.018 Pa · s
Densità materiali	0.030 Pa · s	0.034 Pa · s
Lunghezza tubo	0.002 Pa · s	0.002 Pa · s
Tempo di caduta	0.016 Pa · s	0.025 Pa · s
Errore totale	0.040 Pa · s	0.046 Pa · s

$$\eta_1 = (1.02 \pm 0.04)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$
$$\eta_2 = (1.13 \pm 0.05)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

Le due misure sono compatibili ?

L'errore (incertezza) va interpretato in termini probabilistici.

I due risultati differiscono di circa due volte l'errore

$\Downarrow$

Bassa probabilità (circa 10 %) che siano due misure della stessa grandezza

Condizioni per cui vale la legge di Stokes (nella formulazione semplice che abbiamo dato) :

• corpo sferico;

• **moto laminare (non turbolento) nel fluido**;

• **fluido contenuto in un recipiente di dimensioni infinite** (cioè è trascurabile l'interazione con le pareti del recipiente).

Correzione per il raggio finito del tubo

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 - 2.104 \cdot r / R + \dots)$$

Raggio interno del tubo : **$R = (16.70 \pm 0.05)$ mm**

	η_1	η_2
	0.777 Pa · s	0.809 Pa · s
Raggio sfera	0.014 Pa · s	0.011 Pa · s
Densità materiali	0.023 Pa · s	0.024 Pa · s
Lunghezza tubo	0.001 Pa · s	0.001 Pa · s
Tempo di caduta	0.012 Pa · s	0.018 Pa · s
Raggio del tubo	0.001 Pa · s	0.001 Pa · s
Errore totale	0.029 Pa · s	0.032 Pa · s

$$\eta_1 = (0.78 \pm 0.03)\ \text{Pa} \cdot \text{s}$$

$$\eta_2 = (0.81 \pm 0.03)\ \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Correzione per la non laminarità

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 - 27/16 \cdot v^2 / (g \cdot r) \cdot \rho_F / (\rho_S - \rho_F) + \dots)$$

	η_1	η_2
	0.713 Pa · s	0.699 Pa · s
→ Raggio sfera	0.013 Pa · s	0.009 Pa · s
→ Densità materiali	0.021 Pa · s	0.021 Pa · s
Lunghezza tubo	0.001 Pa · s	0.001 Pa · s
→ Tempo di caduta	0.011 Pa · s	0.015 Pa · s
Raggio del tubo	0.001 Pa · s	0.001 Pa · s
Numero di Reynolds	0.003 Pa · s	0.006 Pa · s
Errore totale	0.027 Pa · s	0.028 Pa · s

$$\eta_1 = (0.71 \pm 0.03)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$
$$\eta_2 = (0.70 \pm 0.03)\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

Osservazioni

Volendo migliorare la precisione della misura che cosa fareste ?

E se mi fossi scordato qualche correzione ? Che cosa fareste per essere sicuri della misura, cioè per poter usare effettivamente lo strumento come **viscosimetro** ?

<u>RISPOSTE</u>

Volendo migliorare la precisione della misura bisognerà <u>agire sulle misure dirette che propagano sul risultato finale l’errore maggiore</u>. Migliorando l’errore loro associato, anche l’errore sul risultato finale diventerà più piccolo.

<u>Ogni strumento di misura va tarato e calibrato con grandezze note</u>: nel nostro caso, la viscosità dell’acqua, della glicerina, e di altri fluidi campione è nota (in funzione della temperatura), e può essere usata per calibrare lo strumento.