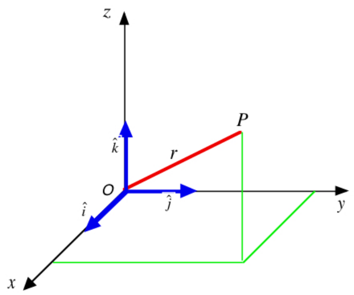
Università di Bologna - Corsi di Laurea Triennale in Ingegneria, II Facoltà - Cesena
Esercitazioni del corso di Fisica Generale L-A
Anno accademico 2006-2007

1 Sistemi di riferimento

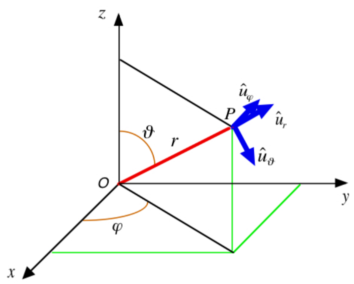
Le grandezze usate in cinematica (spostamento, velocità, accelerazione) sono sempre relative ad un sistema di riferimento.

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale si individuano i versori degli assi x, y e z: $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$. A seconda della natura del problema si possono utilizzare sistemi di riferimento polari sferici (r, φ, θ) o cilindrici (r, φ, z), ciascuno con i propri versori.

Coordinate cartesiane ortogonali



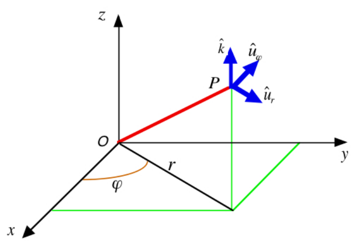
Coordinate polari sferiche



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

Coordinate cilindriche



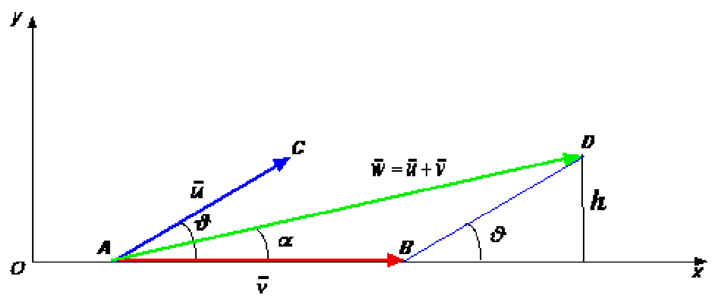
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

2 Vettori

Dati due vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ per determinare il modulo del vettore risultante $\vec{w}$ si ricorre al teorema di Carnot:

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\pi - \theta)} = \sqrt{\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta}$$



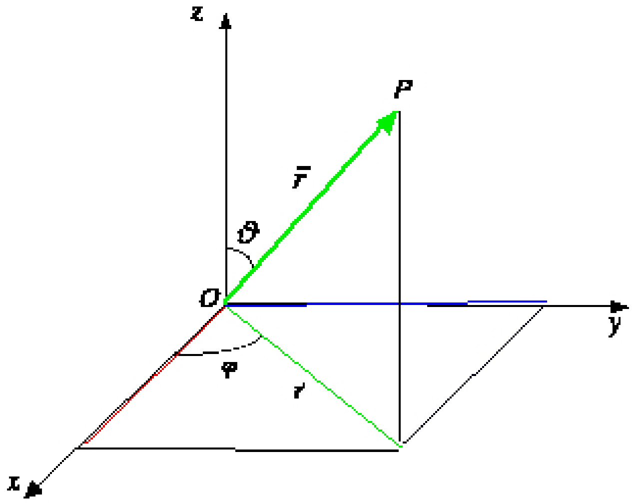
Attenzione all'angolo che compare nella formula!

Per determinare invece l'angolo che il vettore $\vec{w}$ forma ad esempio con l'asse x si ricorre a considerazioni trigonometriche:

$$h = u \sin\theta = w \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{u}{w} \sin\theta$$

Esercizio Un elicottero decolla dal punto O e, dopo aver percorso un chilometro, raggiunge il punto P. Il segmento che congiunge il punto O con la proiezione del punto P sul piano xy forma un angolo $\varphi = 45°$ con l'asse x mentre il segmento $(P - O)$ forma con l'asse z un angolo $\theta = 60°$. Determinare la distanza dagli assi x ed y della proiezione del punto P sul piano xy e la quota z raggiunta.



Il problema fornisce le coordinate sferiche del punto P. Per ricavare le relative coordinate cartesiane si ricorre alle note relazioni trigonometriche:

$$r' = r \sin\theta$$

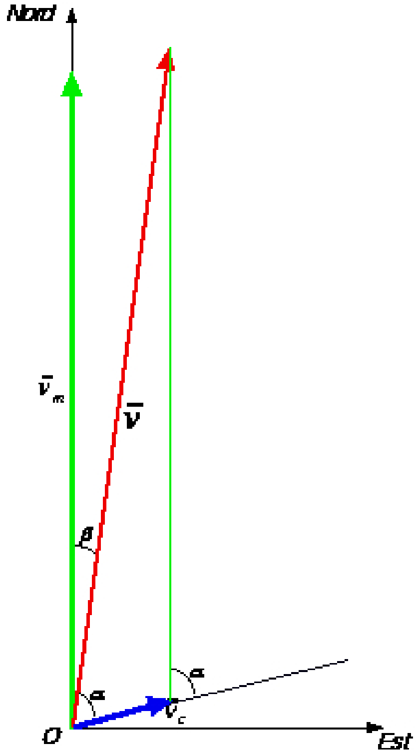
$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$r' = 1\ km \sin 60° = 1\ km \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87\ km$$

$$\begin{cases} x = 0.87\ km \cos 45° = 0.87\ km \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.61\ km \\ y = 0.87\ km \sin 45° = 0.87\ km \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.61\ km \\ z = 1\ km \cos 60° = 1\ km \frac{1}{2} = 0.5\ km \end{cases}$$

Esercizio Un motoscafo, che in assenza di corrente ha una velocità di 25 km/h, si muove verso *nord* in un tratto di mare in cui la corrente ha una velocità di 4 km/h e forma un angolo di 75° con la direzione *nord*. Quanto vale in modulo la velocità risultante del motoscafo? Quale angolo forma con la direzione *nord*?



$$\vec{v}_m = 25\ km/h$$

$$\vec{v}_c = 4\ km/h$$

$$\alpha = 75^\circ$$

$$\vec{v} = \vec{v}_m + \vec{v}_c$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{v}_m\| + \|\vec{v}_c\| + 2\|\vec{v}_m\|\|\vec{v}_c\|\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{(25\ km/h)^2 + (4\ km/h)^2 + 2 \cdot 25\ km/h \cdot 4\ km/h \cdot \cos 75^\circ}$$

$$= \sqrt{625 + 16 + 200 \cdot 0.26}\ km/h = \sqrt{641 + 51.8}\ km/h = \sqrt{692.8}\ km/h = 26.3\ km/h$$

$$\sin\beta = \frac{v_c}{v}\sin\alpha$$

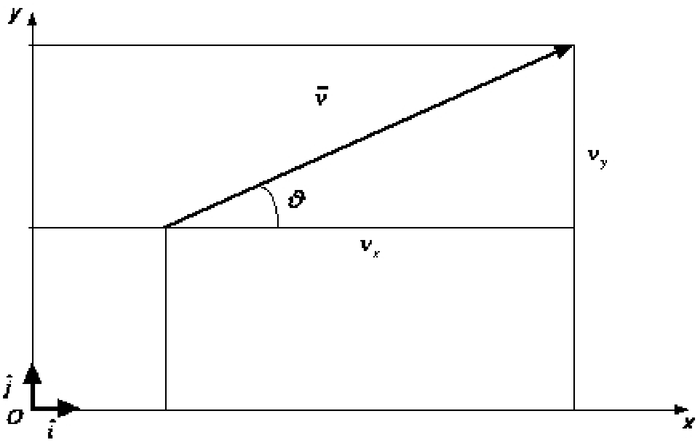
$$\beta = \arcsin\left(\frac{v_c}{v}\sin\alpha\right) = \arcsin\left(\frac{4}{26.3}\sin 75^\circ\right) = \arcsin(0.15 \cdot 0.97) = \arcsin 0.14 = 8.33^\circ$$

Dato un sistema di coordinate un vettore si può esprimere come combinazione lineare nella base rappresentata dai versori assegnati in quel riferimento. In un piano cartesiano ortogonale, ad esempio, la base dello spazio vettoriale di dimensione 2 è costituita dai versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$; il vettore $\vec{v}$ rappresentato in figura si può allora scrivere nel modo seguente:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

dove v_x e v_y sono le proiezioni rispettivamente lungo gli assi x ed y:

$$v_x = \|\vec{v}\|\cos\theta$$
$$v_y = \|\vec{v}\|\sin\theta$$



Si definiscono *coseni direttori* i coseni degli angoli formati da un vettore con gli assi coordinati. Nel nostro caso, poiché $v_x = \vec{v} \cdot \hat{i} = \|\vec{v}\| \, \|1\| \cos\theta$ (si ricordi che i versori hanno modulo uguale a 1), il coseno direttore lungo l'asse x è dato da:

$$\cos\theta = \frac{v_x}{\|\vec{v}\|}$$

Analogamente il coseno direttore lungo l'asse y sarà dato da:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{v_y}{\|\vec{v}\|}$$

Esercizio Dati i due vettori

$$\vec{a} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$
$$\vec{b} = 4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 6\hat{k}$$

dire, senza utilizzare metodi grafici, se sono perpendicolari.

Se sono effettivamente perpendicolari ci aspettiamo che il prodotto scalare si annulli; infatti, escluso il caso ovvio in cui uno o entrambi i vettori abbiano modulo nullo, il prodotto scalare si annulla quando l'angolo θ formato dai vettori è retto:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Eseguiamo il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nel linguaggio delle componenti. Gli unici termini che sopravvivono sono quelli omologhi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3 \cdot 4)(\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}) - (5 \cdot 6)(\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}) + (3 \cdot 6)(\hat{k} \cdot \hat{k}) = 12 - 30 + 18 = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{2}$$

in quanto gli altri si annullano per la mutua ortogonalità tra i versori:

$$(3 \cdot 6)(\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}) = 18 \cdot 0 = 0 \; etc.$$

dunque i due vettori sono effettivamente perpendicolari.

Esercizio Dati i due vettori

$$\vec{a} = 3\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 10\hat{k}$$
$$\vec{b} = 9\hat{\imath} - 21\hat{\jmath} + 30\hat{k}$$

dire, senza utilizzare metodi grafici, se sono paralleli.

Metodo 1
Eseguiamo il prodotto scalare, nel linguaggio delle componenti e per via geometrica, e verifichiamo che l'angolo θ formato dai due vettori sia nullo.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 9 + 7 \cdot 21 + 10 \cdot 30 = 27 + 147 + 300 = 474$$

Per eseguire il prodotto scalare per via geometrica dobbiamo calcolare i moduli di $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 10^2} = \sqrt{9 + 49 + 100} = \sqrt{158} = 12.57$$

$$b = \|\vec{b}\| = \sqrt{9^2 + 21^2 + 30^2} = \sqrt{81 + 441 + 900} = \sqrt{1422} = 37.71$$

Dalla definizione di prodotto scalare segue allora:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{474}{12.57 \cdot 37.71} = \frac{474}{474} = 1 \;\Rightarrow\; \theta = 0$$

Metodo 2
Eseguiamo il prodotto vettoriale; dal momento che i moduli dei due vettori sono diversi da zero allora l'unica possibilità affinché il prodotto vettoriale si annulli è che l'angolo θ formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sia nullo (vettori paralleli) o pari a π (vettori antiparalleli):

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\theta = 0 \;\Rightarrow\; \theta = 0, \pi$$

Eseguiamo il prodotto vettoriale con il metodo del determinante simbolico:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -7 & 10 \\ 9 & -21 & 30 \end{vmatrix} = [-7 \cdot 30 - (-21) \cdot 10]\hat{\imath} - (3 \cdot 30 - 9 \cdot 10)\hat{\jmath} + [3 \cdot (-21) - 9 \cdot (-7)]\hat{k}$$

$$= (-210 + 210)\hat{\imath} - (90 - 90)\hat{\jmath} + (-63 + 63)\hat{k} = \vec{0}$$

3 Cinematica del punto materiale

Esercizio Un'auto è inizialmente ferma al semaforo. Allo scattare del verde l'auto accelera per 6 secondi con un'accelerazione di 2 m/s^2. Quindi prosegue per altri 20 secondi a velocità costante. Qual è la distanza totale percorsa?

$$s_0 = s(0) = 0$$

$$v_0 = v(0) = 0$$

$$s(t \leq 6\ s) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 = \frac{1}{2}at^2$$

$$s_1 = s(t = 6\ s) = \frac{1}{2}\ 2\ m/s^2\ (6\ s)^2 = 36\ m$$

$$v_1 = v(6\ s) = at = 2\ m/s^2 \cdot 6\ s = 12\ m/s$$

$$s_{tot} = s(20\ s) = v_1 t + s_1 = 12\ m/s \cdot 20\ s + 36\ m = 240\ m + 36\ m = 276\ m$$

Esercizio Un'auto da corsa ha un'accelerazione alla partenza data dalla seguente espressione:

$$a(t) = 0.25\ s^{-1} g t$$

dove $g = 9.8\ m/s^2$ è l'accelerazione di gravità. Se l'auto parte da ferma determinare la velocità raggiunta dopo 5 secondi.

$$v(t) = \int 0.25\ s^{-1}\ g\ t\ dt = 0.25\ s^{-1}\ g \int t dt = 0.25\ s^{-1}\ g \left(\frac{1}{2}t^2 + cost.\right)$$

$$v(0) = 0\ \Rightarrow\ cost. = 0$$

$$v(5\ s) = \frac{1}{2}\ 0.25\ s^{-1}\ g\ t^2 = \frac{1}{2}\ 0.25\ s^{-1} \cdot 9.8\ m/s^2 \cdot (5\ s)^2 = 0.125 \cdot 9.8\ m/s^2 \cdot 25\ m/s = 30.63\ m/s$$

Esercizio Un corpo si muove con una velocità data dall'espressione

$$v(t) = ct^2$$

dove $c = 2\ m/s^3$. Determinare l'espressione dell'accelerazione e la distanza percorsa in 10 secondi.

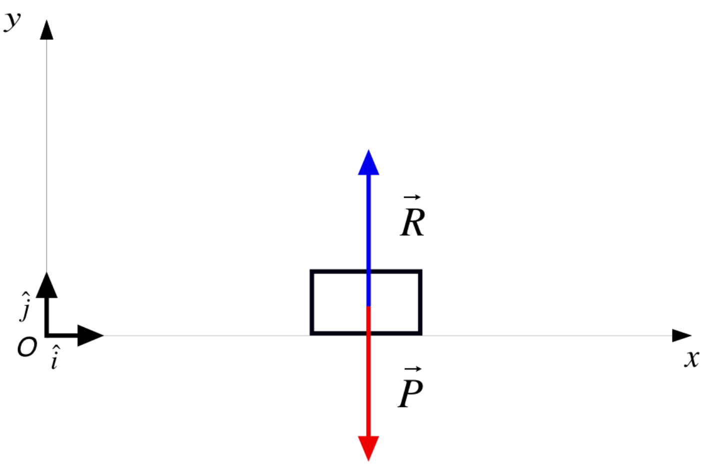
$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}ct^2 = 2ct$$

$$s(10\ s) = \int ct^2 dt = c \int t^2 dt = c\left(\frac{1}{3}t^3 + cost.\right)$$

$$s_{tot} = s(10\ s) - s(0\ s) = \frac{1}{3}ct^3 + cost. - cost. = \frac{1}{3}\ 2\ m/s^3 (10\ s)^3 = \frac{2}{3}\ 1000\ m = 666.\bar{7}\ m$$

4 Statica

Consideriamo un corpo, rappresentato dal rettangolo in figura, posto in quiete su un piano orizzontale.



Si dice che il corpo è in equilibrio se la somma, o risultante, delle forze a cui è sottoposto è nulla:

$$\vec{\mathcal{R}} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Dunque se $\vec{P}$ è la forza peso a cui il corpo è sottoposto in virtù della gravità terrestre deve esserci una forza $\vec{R}$ tale da annullare la risultante:

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

Il vettore $\vec{R}$ ha lo stesso modulo e direzione del vettore $\vec{P}$ e verso opposto. In questo caso si parla di $\vec{R}$ come "reazione vincolare" del piano orizzontale.