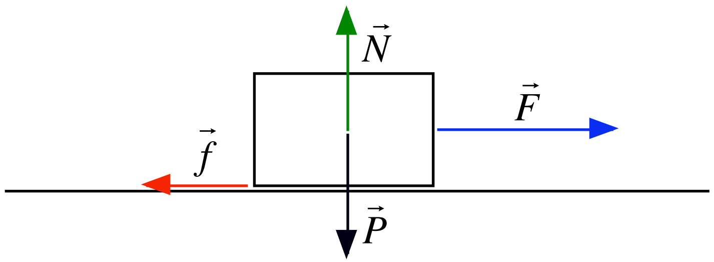
Forze di attrito



Le forze di attrito radente si generano sulla superficie di contatto di due corpi e hanno la caratteristica di opporsi sempre al moto relativo dei due corpi.

Le forze di attrito radente non dipendono, in prima approssimazione, dall'estensione della supericie di contatto tra i due corpi e sono proporzionali alle forze di reazione vincolare generate sulle superfici di contatto.

Esistono due tipi di forze di attrito radente: le forze di attrito statico, per cui vale la relazione:

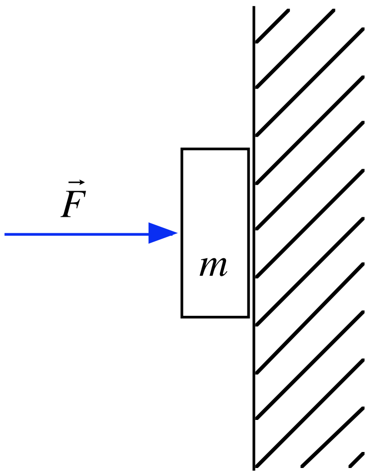
$$\left\|\vec{f}_s\right\| \leq \mu_s \left\|\vec{N}\right\|$$

dove la costante di proporzionalità μ_s prende il nome di coefficiente di attrito statico, e le forze di attrito dinamico, per cui vale la relazione:

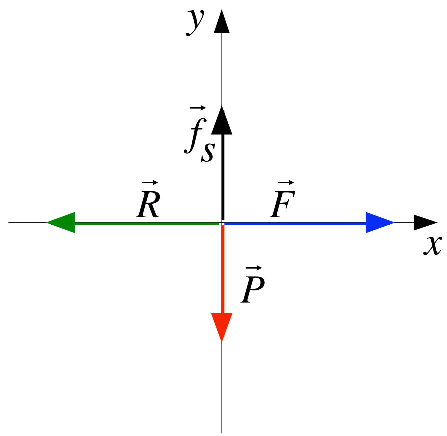
$$\left\|\vec{f}_c\right\| = \mu_c \left\|\vec{N}\right\|$$

dove la costante di proporzionalità μ_c prende il nome di coefficiente di attrito dinamico.
Nella definizione della forza di attrito statico il segno di disuguaglianza è giustificato dal fatto che essa rappresenta il valore massimo che assume una forza che agisce su un corpo prima che questo cominci a muoversi rispetto a quello su cui è appoggiato.

Blocco premuto contro una superficie verticale (1/2)



Consideriamo un blocco di massa m premuto contro una superficie verticale. Il coefficiente di attrito statico tra i due corpi sia μ_S. Ci proponiamo di determinare la minima forza $\vec{F}$ necessaria a tenere il blocco fermo rispetto alla superficie verticale.
Sul blocco agiscono la forza peso $\vec{P}$, la forza $\vec{F}$ ad esso impressa, la reazione vincolare della superficie verticale $\vec{R}$ e la forza di attrito statico $\vec{f}_S$.



$$\begin{cases} \vec{P} = -mg\hat{j} \\ \vec{F} = F\hat{i} \\ \vec{R} = -R\hat{i} \\ \vec{f}_S = f_S\hat{j} \end{cases}$$

Affinché il blocco stia fermo ($\vec{a} = 0$) è necessario che la risultante delle forze agenti su di esso sia nulla. Le equazioni per le componenti orizzontale e verticale risultano:

$$-R + F = 0 \quad \Rightarrow \quad R = F$$
$$f_S - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad f_S = mg$$

Blocco premuto contro una superficie verticale (2/2)

Dalla definizione di forza di attrito statico sappiamo che in modulo essa vale:

$$f_s \leq \mu_s R = \mu_s F$$

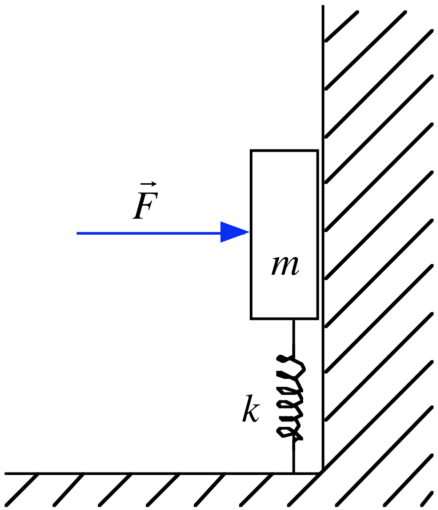
da cui

$$\mu_s \geq \frac{mg}{F}$$

e quindi la forza minima da applicare al blocco afinché non cada deve avere modulo

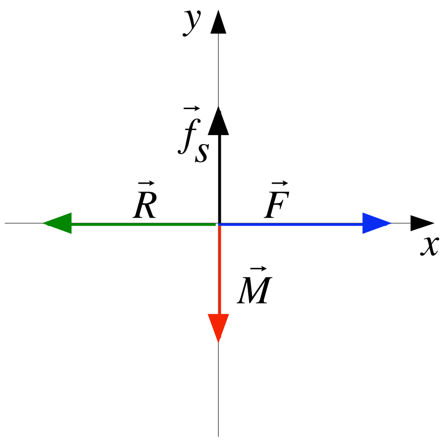
$$F \geq \frac{mg}{\mu_s}$$

Blocco premuto contro una superficie verticale, tirato da una molla (1/2)



Consideriamo ora lo stesso blocco dell'esempio precedente, con la differenza che in questo caso c'è una molla che tira il blocco verso il basso. Anche in questo caso ci proponiamo di determinare la minima forza $\vec{F}$ necessaria a tenere il blocco fermo rispetto alla superficie verticale.

Sul blocco agiscono la forza della molla $\vec{M}$, la forza $\vec{F}$ ad esso impressa, la reazione vincolare della superficie verticale $\vec{R}$ e la forza di attrito statico $\vec{f}_S$ (la forza peso $\vec{P}$ in questo caso non viene considerata).



$$\begin{cases} \vec{M} = -k|\Delta l|\hat{j} \\ \vec{F} = F\hat{i} \\ \vec{R} = -R\hat{i} \\ \vec{f}_S = f_S\hat{j} \end{cases}$$

La richiesta che il blocco rimanga fermo implica che le risultanti delle forze lungo gli assi coordinati siano uguali a zero:

$$-R + F = 0 \quad \Rightarrow \quad R = F$$

$$f_S - M = f_S - k|\Delta l| = 0 \quad \Rightarrow \quad f_S = k|\Delta l|$$

Blocco premuto contro una superficie verticale, tirato da una molla (2/2)

Anche in questo caso utilizziamo la definizione della forza di attrito statico:

$$f_s \leq \mu_s R = \mu_s F$$

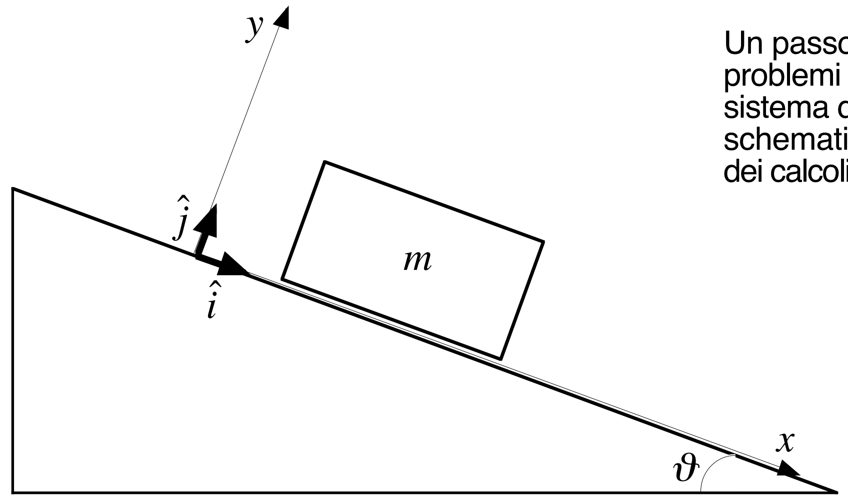
da cui discende

$$\mu_s \geq \frac{k|\Delta l|}{F}$$

e quindi la forza minima da applicare deve avere modulo

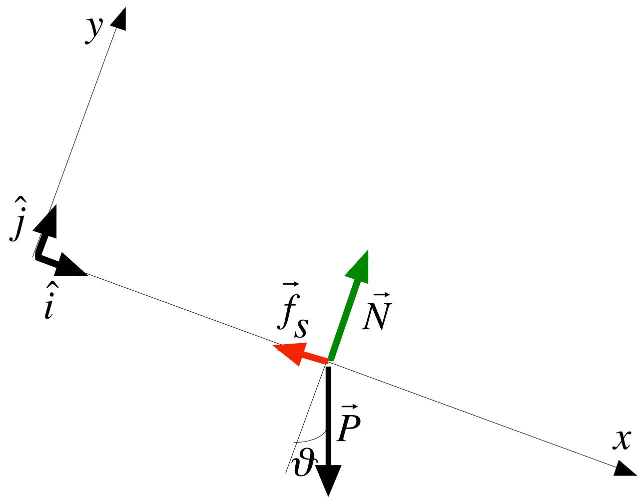
$$F \geq \frac{k|\Delta l|}{\mu_s}$$

Forza di attrito e piano inclinato (1/3)



Un passo importante per la risoluzione dei problemi di meccanica è l'individuazione del sistema di riferimento più opportuno per facilitare la schematizzazione del problema e lo svolgimento dei calcoli.

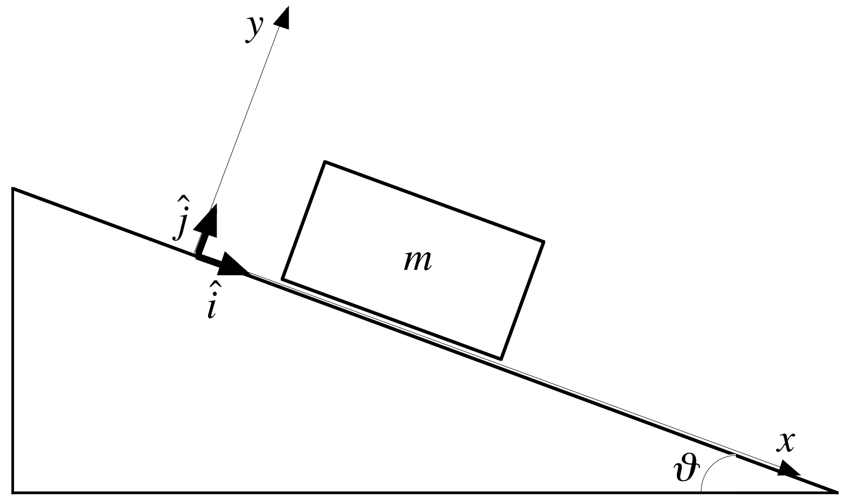
In questo caso è opportuno utilizzare un sistema di riferimento cartesiano inclinato rispetto alla direzione della forza peso che, di conseguenza, avrà due componenti invece che una come negli esempi precedenti. In compenso le altre forze agenti sul punto materiale avranno una sola componente ciascuno.



Sul corpo di massa m, posto su un piano inclinato di un angolo ϑ rispetto all'orizzontale, agiscono la forza peso $\vec{P}$, la reazione vincolare $\vec{N}$ e la forza di attrito statico f_s. Per un dato angolo ϑ vogliamo determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s necessario affinché il corpo rimanga fermo sul piano inclinato.
Le espressioni per componenti delle forze agenti sul corpo danno il sistema:

$$\begin{cases} \vec{N} = N\hat{j} \\ \vec{f}_s = -f_s\hat{i} \\ \vec{P} = mg\sin\vartheta\hat{i} - mg\cos\vartheta\hat{j} \end{cases}$$

Forza di attrito e piano inclinato (2/3)



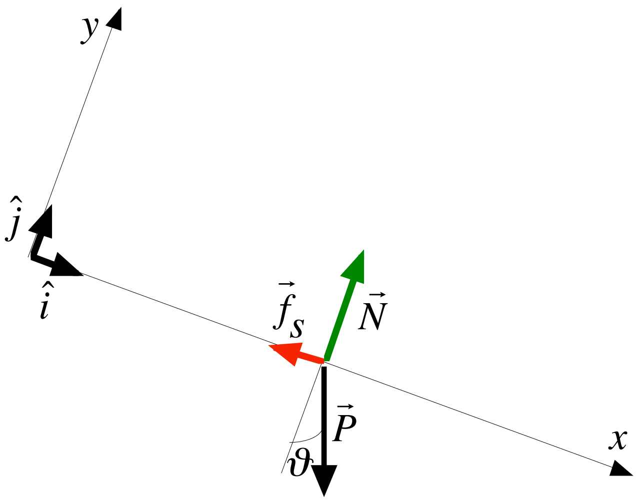
Applicando il secondo principio con le condizioni $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$ (accelerazione nulla, quindi corpo immobile) otteniamo per le due componenti:

$$N - mg\cos\vartheta = 0$$

$$-f_s + mg\sin\vartheta = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} \vec{N} = mg\cos\vartheta \\ \vec{f}_s = mg\sin\vartheta \end{cases}$$



Applicando anche in questo caso la definizione della forza di attrito statico otteniamo:

$$f_s \leq \mu_s N$$

che, sostituendo i valori trovati di N ed f_s, diventa

$$mg\sin\vartheta \leq \mu_s mg\cos\vartheta$$

Risolvendo rispetto a μ_s oteniamo

$$\mu_s \geq \frac{\cancel{m}\cancel{g}\sin\vartheta}{\cancel{m}\cancel{g}\cos\vartheta} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \tan\vartheta$$

Forza di attrito e piano inclinato (3/3)

Nel caso limite in cui l'angolo di inclinazione del piano sia zero, poiché $\tan 0 = 0$ il coefficiente di attrito statico risulta anch'esso nullo:

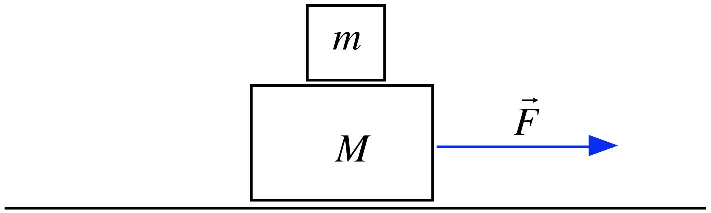
$$\mu_s \geq \tan 0 = 0$$

Infatti, come ci aspettiamo, affinché un corpo posto su piano orizzontale inizialmente in quiete rimanga in quiete non è necessaria la presenza di forze di attrito.

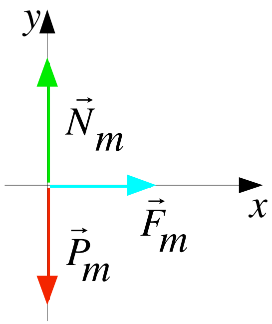
Nell'altro caso limite in cui l'angolo di inclinazione sia di $90°$, poiché $\tan 90° = \infty$, affinché il corpo rimanga fermo il coefficiente di attrito statico deve essere infinito:

$$\mu_s \geq \tan 90° = \infty$$

Corpi solidali (1/4)



Consideriamo due corpi, uno posto su un piano orizzontale privo di attrito, l'altro posto sopra di esso; sia μ_S il coefficiente di attrito statico tra i due corpi.
Ci proponiamo di determinare la forza massima da applicare al corpo sottostante affinché il corpo soprastante rimanga fermo rispetto al primo.



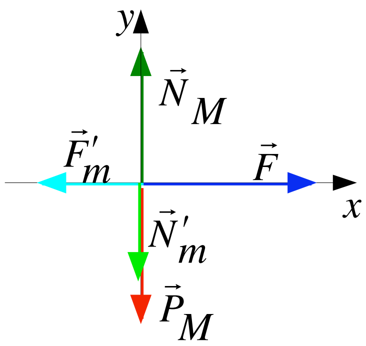
$$\begin{cases} \vec{N}_m = N_m \hat{j} \\ \vec{P}_m = -mg\hat{j} \\ \vec{F}_m = F_m \hat{i} \\ \vec{a}_m = \ddot{x}_m \hat{i} \end{cases}$$

Sul corpo soprastante agiscono la forza peso $\vec{P}_m$, la reazione vincolare $\vec{N}_m$ e la forza $\vec{F}_m$.
Applicando il secondo principio della dinamica otteniamo:

$$N_m - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N_m = mg$$

$$F_m = m\ddot{x}_m$$

dove $\vec{F}_m$ non è altro che la forza di attrito statico che fa sì che il corpo soprastante rimanga solidale con quello sottostante.



$$\begin{cases} \vec{N}_M = N_M \hat{j} \\ \vec{P}_M = -Mg\hat{j} \\ \vec{F} = F\hat{i} \\ \vec{F}'_m = -F'_m \hat{i} \\ \vec{N}'_m = -N'_m \hat{j} \\ \vec{a}_M = \ddot{x}_M \hat{i} \end{cases}$$

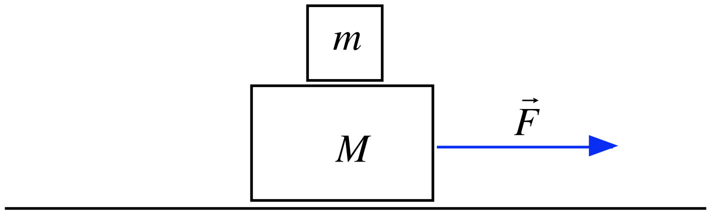
Sul corpo sottostante agiscono la forza peso $\vec{P}_M$, la reazione vincolare $\vec{N}_M$, la forza $\vec{F}$, la reazione del corpo soprastante $\vec{N}'_m$ e la forza $\vec{F}'_m$..
Applicando il secondo principio della dinamica otteniamo:

$$N_M - Mg - N_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_M = Mg + N_m$$

$$F - F_m = M\ddot{x}_M$$

Corpi solidali (2/4)



La natura delle forze $\vec{N}_m'$ ed $\vec{F}_m'$ è presto chiarito: si tratta, in entrambi i casi, delle reazioni uguali, in modulo e direzione, e contrarie, in verso, rispettivamente alle forze $\vec{N}_m$ ed $\vec{F}_m$.

Sostituendo ad F_m il valore trovato nel sistema relativo al corpo soprastante nelle equazioni per il corpo sottostante e risolvendo rispetto ad N_M ed F otteniamo:

$$N_M = (m+M)g$$
$$F = m\ddot{x}_m + M\ddot{x}_M$$

La forza di attrito massima applicabile al corpo m prima che questo cominci a muoversi rispetto al corpo M è:

$$\left\|\vec{F}_m^{MAX}\right\| = \mu_s mg$$

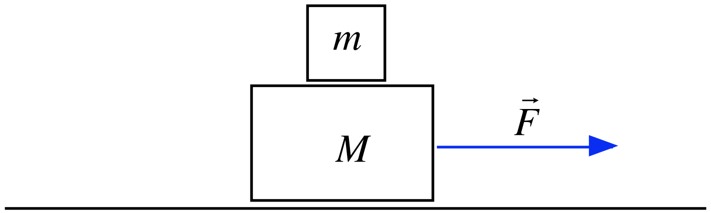
In queste condizioni le accelerazioni dei due corpi sono uguali (moto solidale):

$$\ddot{x}_m = \ddot{x}_M = \ddot{x}$$

ovvero, dalla $F = m\ddot{x} + M\ddot{x} = (m+M)\ddot{x}$ trovata prima:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m+M}$$

Corpi solidali (3/4)



Poiché, per definizione di forza applicata ad un corpo, per il corpo soprastante vale la $m\ddot{x} = F_m \leq F_m^{MAX}$, possiamo scrivere

$$m\frac{F}{m+M} \leq F_m^{MAX}$$

dove il segno di disuguaglianza discende dalla definizione di forza di attrito statico come di forza massima applicabile ad un corpo prima che questo cominci a muoversi rispetto al corpo sul quale giace.
Risolvendo rispetto alla forza applicata F otteniamo:

$$F \leq \frac{m+M}{m}F_m^{MAX}$$

Corpi solidali (4/4)

Se alle varie grandezze diamo i valori

$$\mu_s = 0.2$$
$$m = 3kg$$
$$M = 10kg$$

ricordando che $g \cong 9.8ms^{-2}$ otteniamo

$$\left\| \vec{F}_m^{MAX} \right\| = \mu_s mg = 0.2 \cdot 3kg \cdot 9.8ms^{-2} = 5.9N$$

e

$$F \leq \frac{m+M}{m} F_m^{MAX} = \frac{13kg}{3kg} 5.9N = 25.5N$$