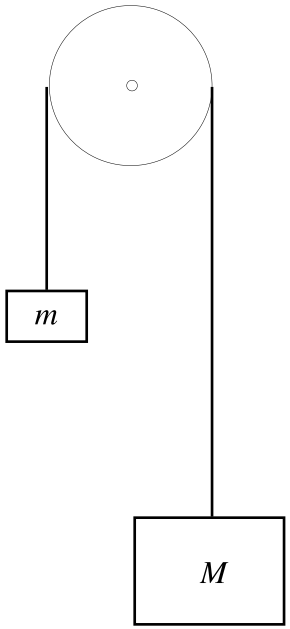
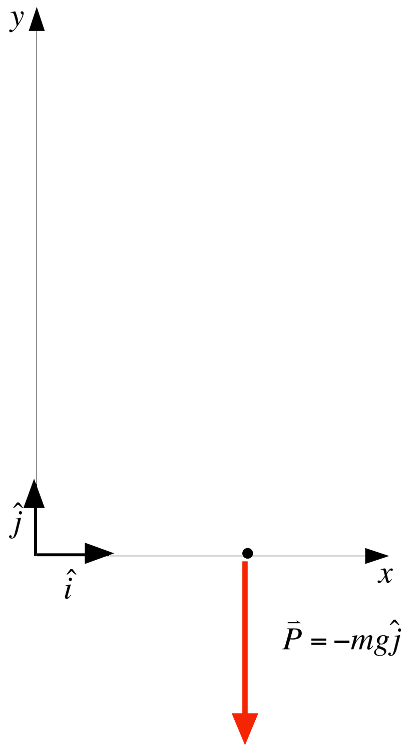
Macchina di Atwood



E' costituita da due masse attacate l'una all'altra da una fune ideale (inestendibile e di massa trascurabile) e sospese tramite una carrucola anch'essa ideale (attrito e massa trascurabili).

Serve a studiare i moti accelerati nel campo gravitazionale terrestre variando a piacimento l'accelerazione di gravità g.

Macchina di Atwood



L’effetto dell’apparato è quello di “compensare” l’accelerazione di gravità a cui è sottoposto un punto materiale attraverso una forza controllabile.

Supponiamo di eliminare tutti i componenti della macchina di Atwood ad eccezione di una delle due masse. il moto risultante sarà allora uniformemente accelerato, l’accelerazione essendo quella di gravità:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$$

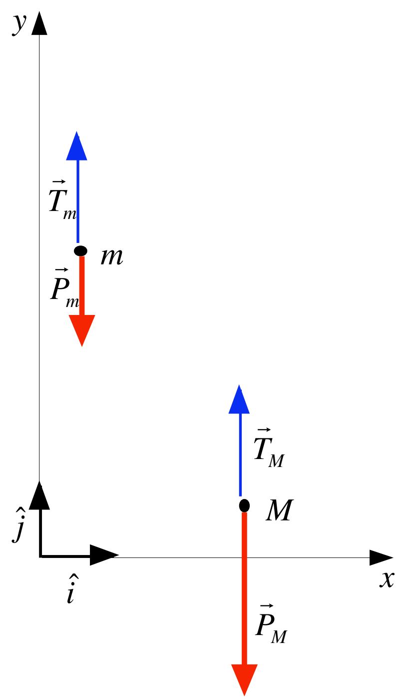
$$\Rightarrow \qquad \vec{P} = -\cancel{m}g\hat{j} = \cancel{m}\ddot{y}\hat{j}$$

$$-g = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\dot{y} = \int -g\,dt = -gt + \dot{y}_0$$

$$y = \int \left(-gt + \dot{y}_0\right) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t + y_0$$

Macchina di Atwood



Nella macchina di Atwood le due masse sono trattenute dalla tensione della fune. Su di esse quindi agisce sia la forza peso $\vec{P}$ che la tensione $\vec{T}$:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{T}_M + \vec{P}_M = M\ddot{y}_M\hat{j}$$
$$\vec{T}_m + \vec{P}_m = m\ddot{y}_m\hat{j}$$

$$T_M - Mg = M\ddot{y}_M$$
$$T_m - mg = m\ddot{y}_m$$

Per l'ipotesi di fune ideale la tensione ai due capi è uguale in modulo:

$$T_M = T_m = T$$

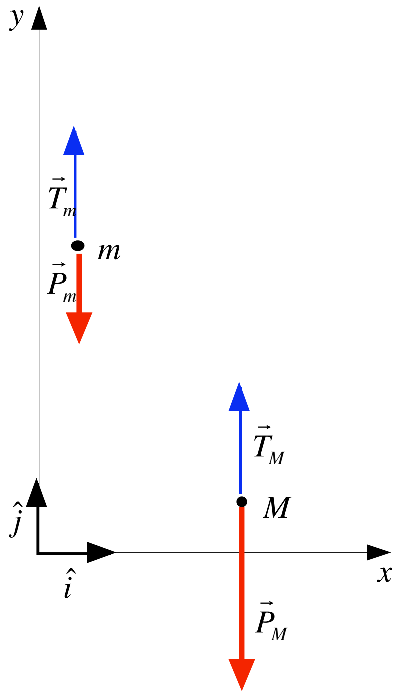
Anche l'accelerazione delle due masse è uguale in modulo:

$$-\ddot{y}_M = \ddot{y}_m = \ddot{y}$$

La seconda legge di Newton applicata alle due masse allora può essere riscritta nel modo seguente:

$$T - Mg = -M\ddot{y}$$
$$T - mg = m\ddot{y}$$

Macchina di Atwood



Ricaviamo T dalla seconda equazione:

$$T = m(\ddot{y} + g)$$

Sostituendo nella prima otteniamo:

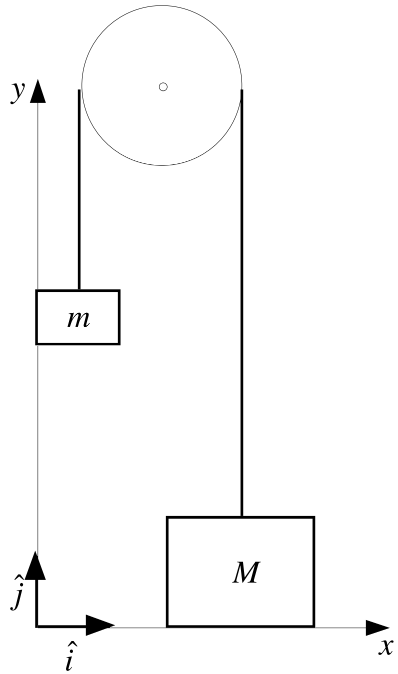
$$m(\ddot{y} + g) - Mg = -M\ddot{y}$$

$$\ddot{y}(M + m) = g(M - m)$$

Ed infine, risolvendo rispetto ad $\ddot{y}$ otteniamo l'accelerazione:

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{M - m}{M + m} g}$$

Macchina di Atwood



Applichiamo l'espressione appena ricavata a due casi particolari.
Se $m = 0$ l'accelerazione dell'altro corpo di massa M risulta esattamente uguale a g:

$$m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{y} = \frac{M}{M} g = g$$

che è proprio quanto ci aspettiamo dal momento che è come se avessimo tagliato la fune e quindi la massa M cade di moto uniformemente accelerato con accelerazione g.
Se invece poniamo $m = M$ l'accelerazione si annulla:

$$m = M \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{y} = \frac{M - M}{M + M} g = \frac{0}{2M} g = 0$$

quindi se le due masse inizialmente erano in quiete rimangono ferme mentre se si muovevano con una certa velocità $\dot{y}$ continuano a muoversi con la stessa velocità.

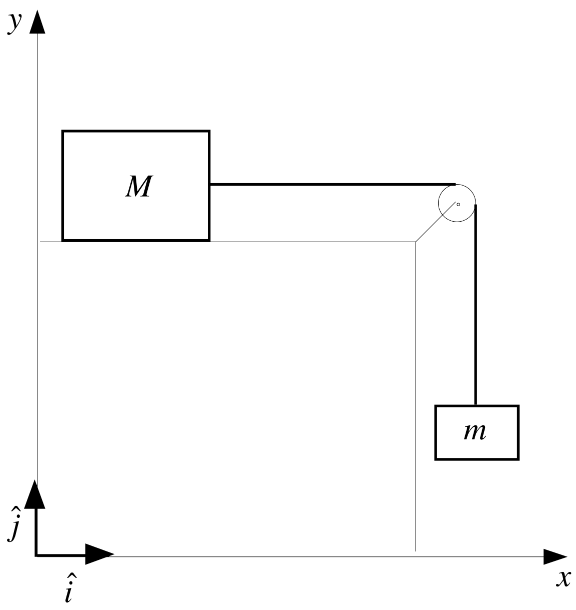
La macchina di Atwood permette in linea di principio di variare a piacimento l'accelerazione con cui si muovono le due masse. Se ad esempio vogliamo che l'accelerazione con cui si muovo sia pari a $\frac{1}{10}$ dell'accelerazione di gravità dobbiamo imporre:

$$\ddot{y} = \frac{1}{10} g \qquad \Rightarrow \qquad \frac{M - m}{M + m} = \frac{1}{10}$$

e quindi il rapporto tra le masse m ed M deve essere pari a:

$$\frac{m}{M} = \frac{9}{11}$$

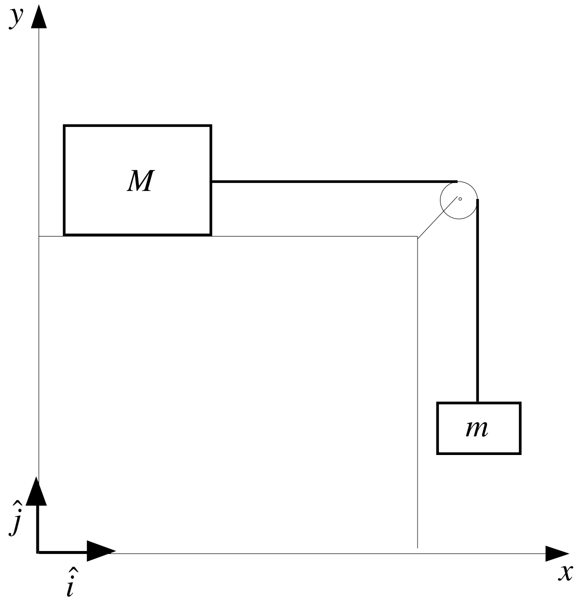
Apparecchio di Flechter



L'apparato in figura è costituito da due masse, connesse tramite una fune ideale che si avvolge attorno ad una carrucola, di cui una è vincolata a muoversi su un piano orizzontale senza attrito.

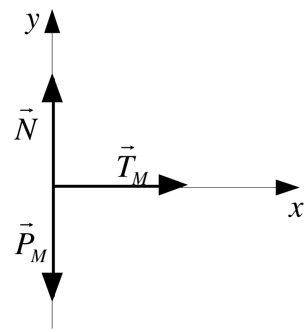
Come nell'esempio precedente vogliamo ricavarci le equazioni del moto delle due masse.

Apparecchio di Flechter



Sul corpo di massa M agiscono le seguenti forze:

$$\vec{P}_M = -Mg\hat{j}$$
$$\vec{N} = N\hat{j}$$
$$\vec{T}_M = T_M\hat{i}$$



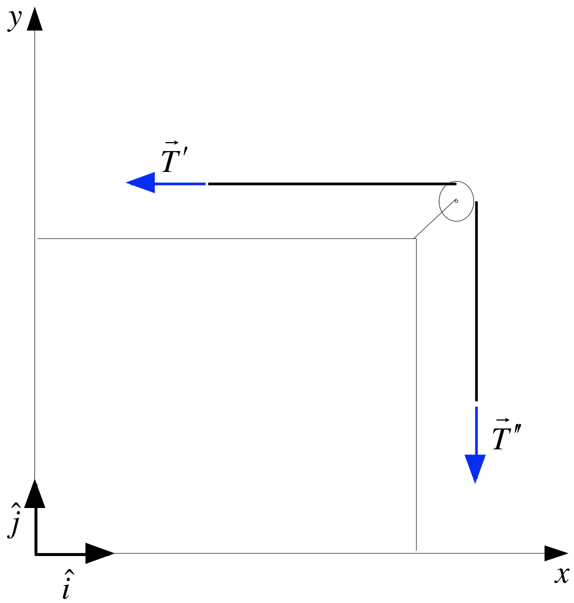
La seconda legge di Newton scomposta nelle due componenti orizzontale e verticale risulta quindi:

$$F_y = M\ddot{y}_M = 0 \quad \Rightarrow \quad N - Mg = 0$$
$$F_x = M\ddot{x}_M \quad \Rightarrow \quad T_M = M\,\ddot{x}_M$$

per cui l'accelerazione ha componente solo lungo l'asse x:

$$\vec{a}_M = a_M\,\hat{i} = \ddot{x}_M\,\hat{i}$$

Apparecchio di Flechter



Sulla fune agiscono le forze dovute alle masse M ed m, indicate dalle tensioni $\vec{T}'$ e $\vec{T}''$.

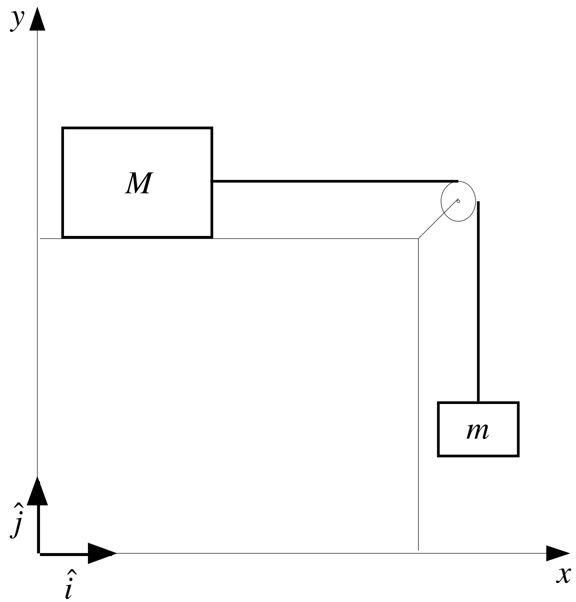
A rigore sulla fune agiscono anche la forza peso e la reazione vincolare della carrucola, ma la prima può essere trascurata per ipotesi mentre la seconda non influisce sulle equazioni del moto.

L'ipotesi di fune ideale implica che le tensioni $\vec{T}'$ e $\vec{T}''$ siano, in modulo, uguali, così come sono uguali i moduli delle accelerazioni delle due masse M ed m:

$$\left\|\vec{T}'\right\| = \left\|\vec{T}''\right\| = T = T_M = T_m$$

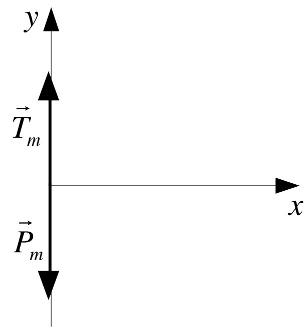
$$\left\|\ddot{x}_M\right\| = \left\|\ddot{y}_m\right\| = a$$

Apparecchio di Flechter



Sul corpo di massa m agiscono le seguenti forze:

$$\vec{P}_m = -mg\hat{j}$$
$$\vec{T}_m = T_m\hat{j}$$
$$\vec{a}_m = a_m\hat{j} = \ddot{y}_M\,\hat{j}$$



La seconda legge di Newton dà:

$$T_m - mg = m\ddot{y}_m$$

Le considerazioni svolte dulle tensioni della fune e le accelerazioni delle due masse ci consentono di riscrivere le equazioni del moto nel modo seguente:

$$T_m - mg = m\ddot{y}_m \quad \Rightarrow \quad T - mg = -ma$$
$$T_M = M\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad T = Ma$$

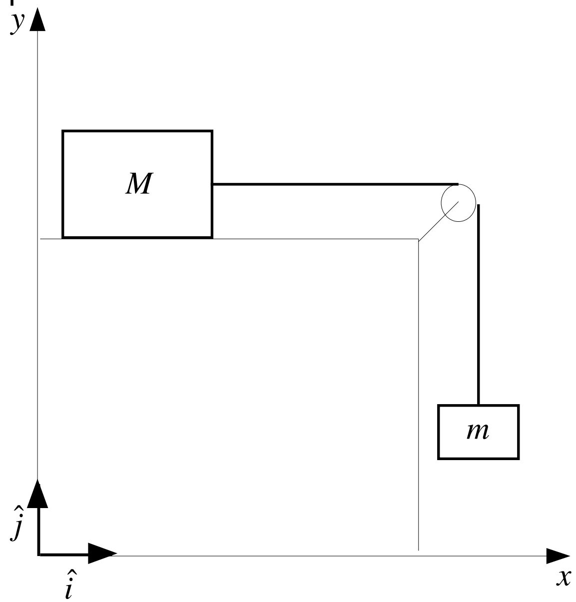
Sostituendo l'ultima equazione nella terza otteniamo:

$$Ma - mg = -ma$$

e, raccogliendo e risolvendo rispetto ad a si ottiene infine:

$$\boxed{a = \frac{mg}{M + m}}$$

Apparecchio di Flechter



$$\boxed{a = \frac{mg}{M + m}}$$

Consideriamo due casi particolari.

Se eliminiamo la massa m ci aspettiamo che la forza che agisce su M scompaia e che l'accelerazione sia nulla. Infatti:

$$m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0$$

Se eliminiamo invece la massa M ci aspettiamo che la tensione che trattiene la massa m scompaia e che questa cada sotto l'azione dell'accelerazione di gravità. Infatti:

$$M = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = g$$