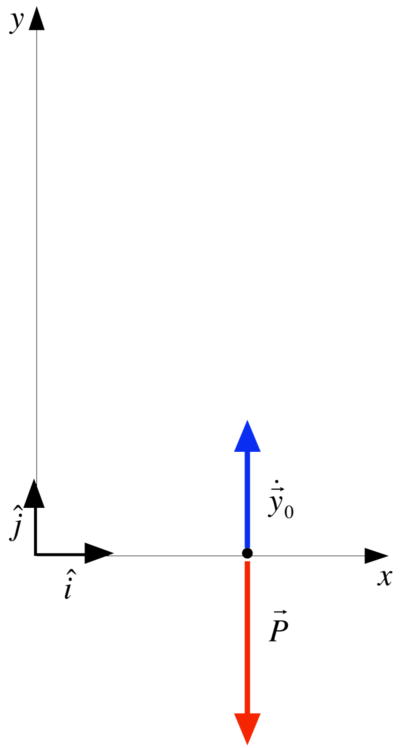
Grave lanicato verso l'alto (1/3)



Vogliamo studiare il moto di un corpo lanciato verso l'alto con una certa velocità iniziale $v_0 = \dot{y}_0$, soggetto unicamente alla forza di attrazione gravitazionale terrestre (si trascura l'attrito dell'aria).

Se poniamo la quota di partenza uguale a zero, le condizioni iniziali sono quindi

$$\vec{y}_0 = \vec{0}$$
$$\dot{\vec{y}}_0 = 5ms^{-1}\hat{j}$$

Poiché l'unica forza agente sul corpo è l'attrazione gravitazionale terrestre $\vec{P} = -mg\hat{j}$ applicando il secondo principio otteniamo:

$$\vec{P} = m\ddot{y}\hat{j}$$

ovvero

$$-\cancel{m}g\hat{j} = \cancel{m}\ddot{y}\hat{j}$$
$$\ddot{y} = -g$$

Integrando rispetto al tempo otteniamo la velocità del grave:

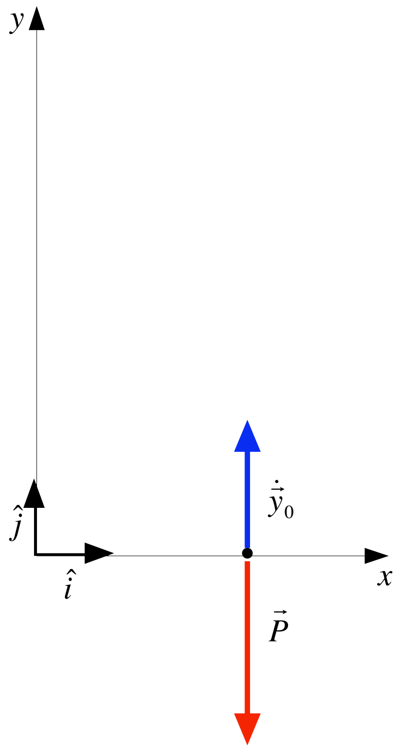
$$\dot{y}(t) = \int -gdt = -g\int dt = -gt + \dot{y}_0$$

Un'ulteriore integrazione ci dà l'espressione dello spazio percorso dal grave:

$$y = \int (-gt + \dot{y}_0)dt = -g\int tdt + \dot{y}_0\int dt = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t$$

dove si è posto $y_0 = 0$ coerentemente con le condizioni iniziali.

Grave lanicato verso l'alto (2/3)



Ci chiediamo ora quanto tempo impiega il grave dopo a raggiungere la massima altezza e qual è la quota raggiunta. Quando il grave raggiunge la quota massima esso si ferma per un istante prima di invertire il verso delmoto e ricadere verso terra; l'istante t_M in cui ciò avviene è quindi quello in cui $\dot{y}(t_M) = 0$, cioè:

$$-gt_M + \dot{y}_0 = 0$$

Risolvendo rispetto a t e sostituendo i valori per $\dot{y}_0$ e g otteniamo:

$$t_M = \frac{\dot{y}_0}{g} = \frac{5ms^{-1}}{9.8ms^{-2}} = 0.51s$$

La quota massima raggiunta si ottiene inserendo il tempo t_M trovato nell'espressione dello spazio percorso:

$$y(t_M) = y_M = -\frac{1}{2}gt_M^2 + \dot{y}_0 t_M = -\frac{1}{2}9.8ms^{-2}0.26s^2 + 5ms^{-1}0.51s =$$

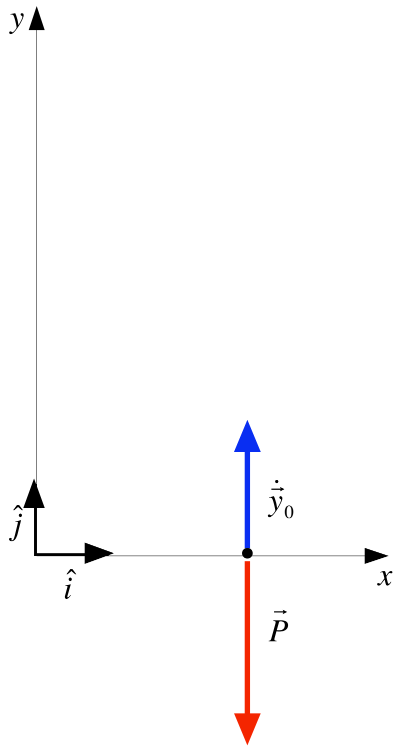
$$= -1.28m + 2.55m = 1.27m$$

Ci chiediamo infine quanto tempo impiega il grave per tornare al punto di partenza e con quale velocità raggiunge il suolo; imponiamo quindi che sia $y(t) = 0$:

$$-\frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t = 0$$

$$t\left(\dot{y}_0 - \frac{1}{2}gt\right) = 0$$

Grave lanicato verso l'alto (3/3)



Le due soluzioni di questa equazione di secondo grado corrispondono una all'istante iniziale e l'altra all'istante cercato in cui il grave torna alla quota di partenza:

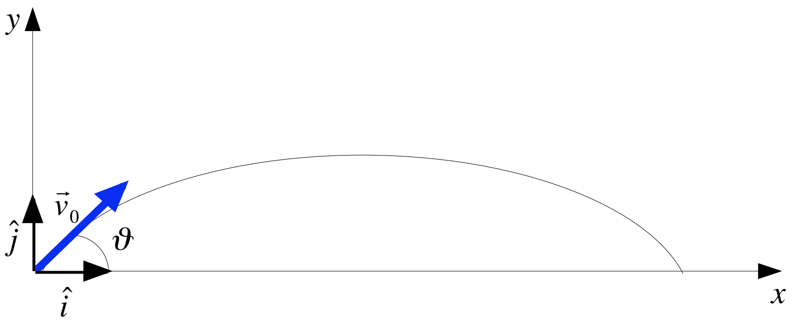
$$t_1 = 0 \qquad t_2 = \frac{2\dot{y}_0}{g}$$

Il tempo t_2 è esattamente due volte il tempo, trovato precedentemente, che il grave impiega per raggiungere la quota massima. Il moto presenta quindi delle simmetrie evidenziate anche dalla velocità raggiunta dal grave nell'istante in cui raggiunge la quota iniziale:

$$\dot{y}(t_2) = -gt_2 + \dot{y}_0 = -\cancel{g}\frac{2\dot{y}_0}{\cancel{g}} + \dot{y}_0 = -2\dot{y}_0 + \dot{y}_0 = -\dot{y}_0$$

che è uguale in modulo alla velocità impressa all'istante iniziale ma diretta nel verso opposto (da qui il segno negativo).

Gittata di un proiettile (1/3)



Consideriamo un proiettile lanciato con una certa velocità iniziale $\vec{v}_0$ che forma un angolo ϑ con il verso positivo dell'asse delle ascisse. Come nel caso del grave lanciato verso l'alto anche per il proiettile supporremo che sia soggetto unicamente alla forza di attrazione gravitazionale terrestre e quindi trascureremo l'attrito dell'aria.

Ci proponiamo di determinare l'angolo ϑ_{MAX} per il quale il proiettile ha gittata massima.

Poniamo come condizioni iniziali che le coordinate del punto di partenza coincidano con l'origine del nostro sistema di riferimento cartesiano:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Le componenti x ed y della velocità iniziale sono date dalle proiezioni del vettore $\vec{v}_0$ sugli assi coordinati:

$$\begin{cases} v_{0_x} = v_0 \cos\vartheta \\ v_{0_y} = v_0 \sin\vartheta \end{cases}$$

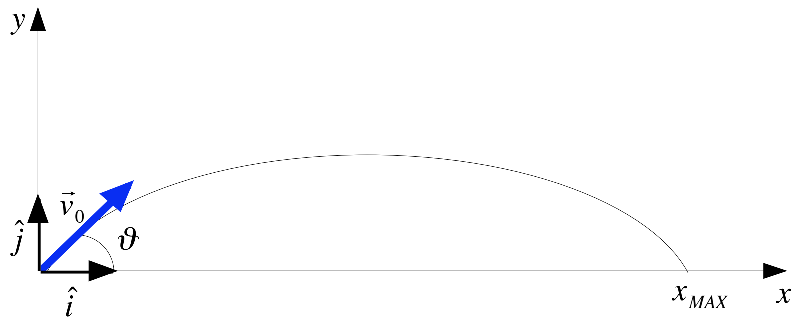
Le forze agenti sul proiettile si riducono, con le nostre ipotesi, alla sola forza di attrazione gravitazionale. Scriviamo quindi la seconda legge della dinamica per le due componenti del moto:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases}$$

L'accelerazione lungo la direzione orizzontale è quindi nulla mentre quella lungo la direzione verticale è pari all'accelerazione di gravità:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

Gittata di un proiettile (2/3)



Integrando rispetto al tempo queste due equazioni otteniamo le componenti x ed y della velocità del proiettile:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t)dt = \int 0dt = 0 + v_{0_x} = v_{0_x} \\ \dot{y}(t) = \int \ddot{y}(t)dt = -g\int dt = -gt + v_{0_y} \end{cases}$$

Un'ulteriore integrazione rispetto al tempo ci dà le equazioni parametriche della traiettoria del proiettile:

$$\begin{cases} x(t) = \int \dot{x}(t)dt = \int v_{0_x} dt = v_{0_x} t + x_0 = v_{0_x} t \\ y(t) = \int \dot{y}(t)dt = \int \left(-gt + v_{0_y}\right)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0_y} t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0_y} t \end{cases}$$

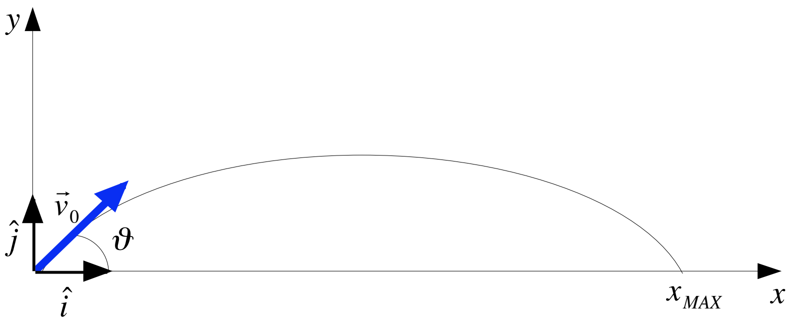
Per determinare la distanza raggiunta dal proiettile rispetto al punto di partenza possiamo ad esempio calcolare il tempo necessario affinché il proiettile raggiunga nuovamente la quota inziale:

$$y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0_y} t = 0 \quad \Rightarrow \quad t\left(-\frac{1}{2}gt + v_{0_y}\right) = 0$$

La seconda soluzione dell'ultima equazione ci dà il tempo cercato:

$$t_1 = 0, \qquad t_2 = \frac{2v_{0_y}}{g}$$

Gittata di un proiettile (3/3)



La distanza raggiunta dal proiettile si ottiene inserendo il tempo appena trovato nell'equazione parametrica del moto per la componente orizzontale:

$$x(t_2) = v_{0_x} t_2 = v_{0_x} \frac{2v_{0_y}}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \cos\vartheta \sin\vartheta$$

Fissato il modulo della velocità iniziale v_0, la distanza x dipende solo dall'angolo ϑ. Derivando quindi questa funzione $x(\vartheta)$ rispetto a ϑ ed uguagliando a zero ricaviamo il valore dell'angolo ϑ_{MAX} per il quale la distanza raggiunta è massima:

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \frac{2}{g} v_0^2 \frac{d}{d\vartheta}(\cos\vartheta \sin\vartheta) = \frac{2}{g} v_0^2 \left(-\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\right) d\vartheta = 0$$

Rielaborando l'espressione compresa nelle parentesi e ricordando dalla trigonometria che $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$ otteniamo:

$$-1 + 2\cos^2\vartheta_{MAX} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\vartheta_{MAX} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta_{MAX} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

per cui l'angolo per il quale il proiettile raggiunge la massima distanza dal punto di partenza è:

$$\vartheta_{MAX} = \frac{\pi}{4} = 45°$$