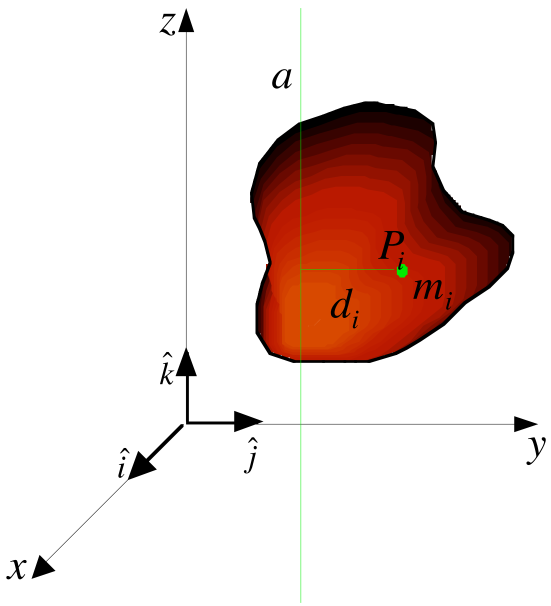
Momento d'inerzia



Ricordiamo la definizione di momento d'inerzia di un insieme di punti materiali rispetto ad un asse a:

$$I_a = \sum_i m_i d_i^2$$

Passando dal discreto al continuo, ad esempio nel caso di un corpo rigido, la sommatoria diventa un integrale:

$$I_a = \int_M d^2 dm$$

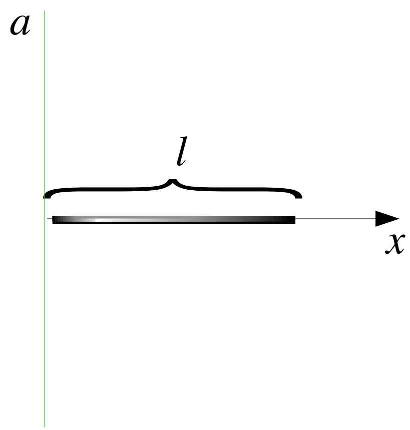
Se è nota la dipendenza della densità dalla posizione allora l'integrale sulla massa si trasforma in un integrale sul volume. Ricordando che

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

si ha

$$I_a = \int_V d^2 \rho dV$$

Momento d'inerzia di una sbarra omogenea di lunghezza l e massa m rispetto ad un asse ad essa ortogonale e passante per un estremo



Se scegliamo il nostro sistema di riferimento tale che la sbarra giaccia sull'asse delle ascisse con un estremo nell'origine gli estremi di integrazione sono $x = 0$ e $x = l$:

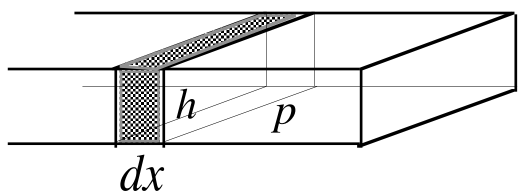
$$I_a = \int_0^l x^2 dm$$

Per passare all'integrale di volume utilizziamo la definizione di densità:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \rho V \quad \Rightarrow \quad dm = \rho dV$$

L'elemento infinitesimo di volume attraverso il quale si calcola l'integrale è dato da

$$dV = hpdx$$



dove h e p sono rispettivamente l'altezza e la profondità della sbarra. Sostituendo nell'espressione della massa infinitesima si ha quindi

$$dm = \rho hpdx$$

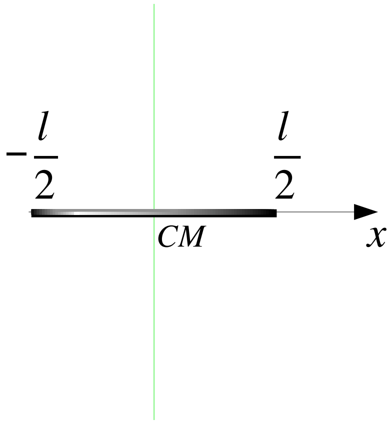
L'integrale allora si calcola facilmente:

$$I_a = \rho hp \int_0^l x^2 dx = \rho hp \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^l = \rho hp \left(\frac{l^3}{3} - 0 \right) = \rho hp \frac{l^3}{3}$$

Ma hpl è proprio il volume V della sbarra e inoltre $\rho = \frac{m}{V}$ per cui:

$$I_a = \rho (hpl) \frac{l^2}{3} = \rho V \frac{l^2}{3} = m \frac{l^2}{3}$$

Momento d'inerzia di una sbarra omogenea di lunghezza l e massa m rispetto ad un asse ad essa ortogonale e passante per il centro di massa



Il calcolo è in tutto analogo al caso precedente fatta eccezione per gli estremi di integrazione che ora, avendo posto l'origine coincidente con l'asse rispetto al quale si calcola il momento d'inerzia, sono dati da $x = -\frac{l}{2}$ e $x = \frac{l}{2}$:

$$I_{CM} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dm$$

Con gli stessi ragionamenti del caso precedente si ottiene quindi

$$I_{CM} = \rho hp \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \rho hp \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$= \rho hp \left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24}\right) = \rho hpl \frac{l^2}{12} = \frac{1}{12} ml^2$$

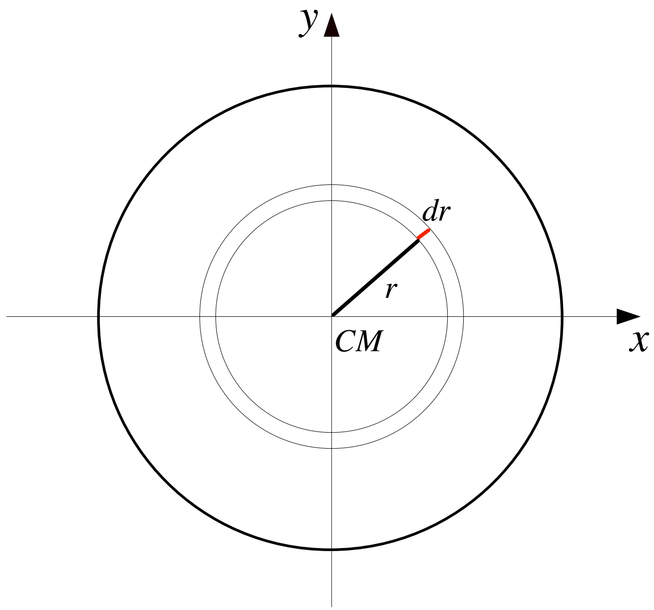
Avremmo ottenuto lo stesso risultato più facilmente attraverso il teorema di Huygens-Steiner :

$$I_a = I_{CM} + \frac{1}{4} ml^2$$

sfruttando il risultato precedente:

$$I_{CM} = I_a - \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2 - \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{12} ml^2$$

Momento d'inerzia di un disco omogeneo di raggio R, spessore b e massa m rispetto ad un asse passante per il centro di massa e ortogonale al disco



Dalla semplice applicazione della formula generale il momento d'inerzia di un anello di raggio r e massa dm rispetto ad un asse perpendicolare al piano dell'anello e passante per il suo centro geometrico è dato da:

$$dI_{CM} = r^2 dm$$

La massa infinitesima dm può essere espressa in funzione della densità ρ e del volume elementare dV:

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi b r dr$$

L'elemento infinitesimo del momento d'inerzia da integrare tra 0 ed R allora è dato da

$$dI_{CM} = \rho 2\pi b r dr \cdot r^2 = 2\pi\rho b r^3 dr$$

L'integrale quindi risulta

$$I_{CM} = 2\pi b\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi b\rho}{2} R^4$$

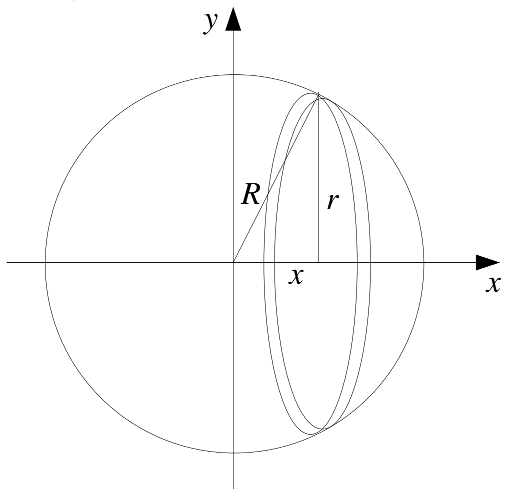
Ricordando che

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 b}$$

l'espressione appena trovato può essere riscritta in funzione delle sole massa m e del raggio R:

$$I_{CM} = \frac{\cancel{\pi}\cancel{b}}{2}\frac{m}{\cancel{\pi}R^2\cancel{b}}R^4 = \frac{1}{2}mR^2$$

Momento d'inerzia di una sfera omogenea di massa m e raggio R rispetto ad un asse passante per il centro di massa



L'elemento infinitesimo di massa che consideriamo è cosituito da un disco di raggio $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ e spessore dx:

$$dm = \rho dV = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\pi r^2 dx = \frac{m}{\frac{4}{3}\cancel{\pi} R^3}\cancel{\pi}\left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{3m}{4R^3}\left(R^2 - x^2\right)dx$$

Utilizzando il risultato ottenuto per il momento d'inerzia di un disco, l'elemento infinitesimo del momento d'inerzia da integrare per x che va da $-R$ a $+R$ è allora dato da:

$$dI_{CM} = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)dm$$

$$= \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\frac{3m}{4R^3}\left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{3m}{8R^3}\left(R^2 - x^2\right)^2 dx$$

L'integrale quindi risulta:

$$I_{CM} = \int_{-R}^{R}\frac{3m}{8R^3}\left(R^2 - x^2\right)^2 dx = \frac{3m}{8R^3}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)^2 dx = \frac{3m}{8R^3}\int_{-R}^{R}\left(R^4 - 2R^2x^2 + x^4\right)dx$$

$$= \frac{3m}{8R^3}\left[R^4\left(R + R\right) - \frac{2}{3}R^2\left(R^3 + R^3\right) + \frac{1}{5}\left(R^5 + R^5\right)\right] = \frac{3m}{8R^3}\left(2R^5 - \frac{2}{3}2R^5 + \frac{2}{5}R^5\right)$$

$$= \frac{3m}{8R^3}\left(2R^5 - \frac{2}{3}2R^5 + \frac{2}{5}R^5\right) = \frac{2}{5}mR^2$$