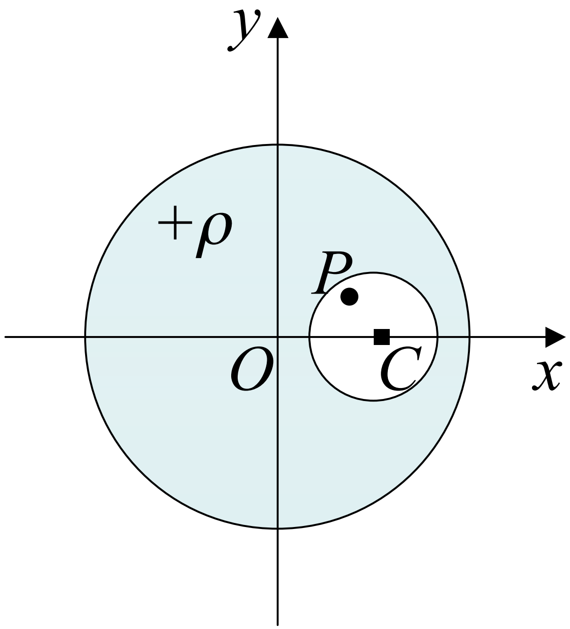
Università di Bologna
Corsi di Laurea Triennale in Ingegneria
IIª Facoltà - Cesena

Esercitazioni del corso di Fisica Generale L-B

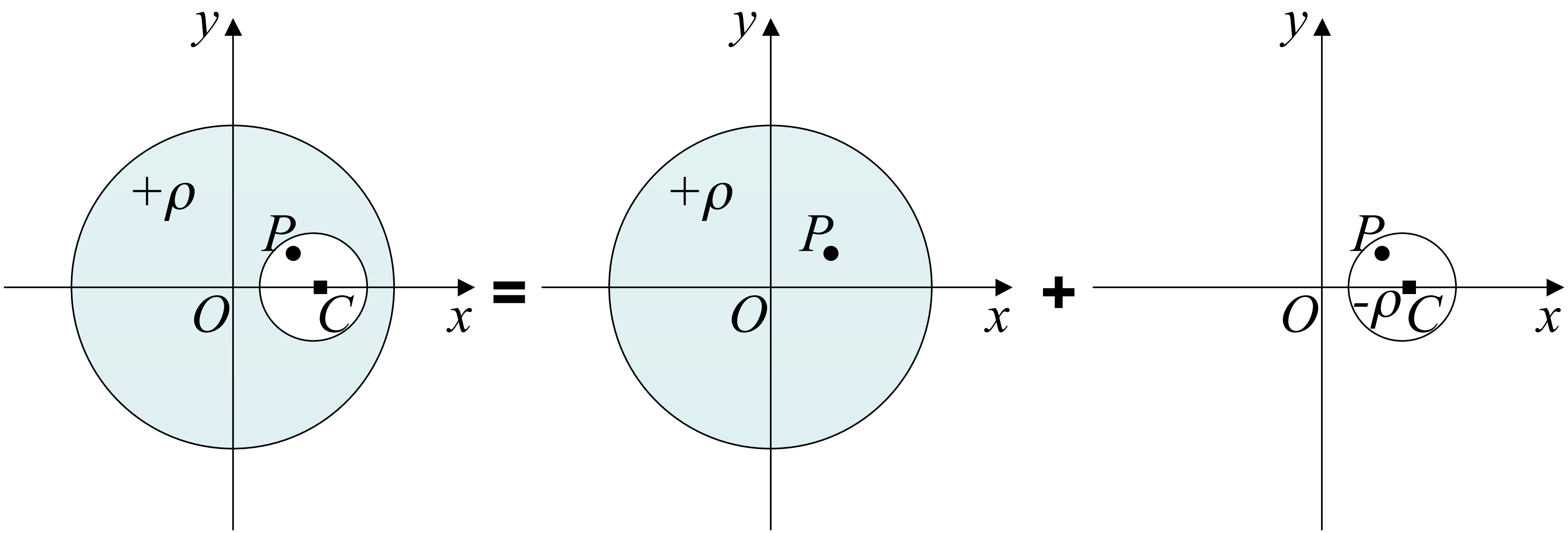
Appello scritto del 6 maggio 2005 - Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
II Facoltà di Ingegneria - Sede di Forlì

Una sfera piena, di raggio R, è centrata nell'origine O di un S.d.R. cartesiano opportunamente scelto (vedi figura). La sfera ha una cavità vuota, anch'essa di forma sferica, di raggio $r < R$ e con centro sul semiasse positivo delle x in C. Sulla sfera di raggio R è uniformemente distribuita una carica elettrica con densità volumetrica $\rho = 10^{-4}$ C/m^3. Sapendo che la distribuzione di cariche appena descritta genera un campo elettrico che in P (interno alla cavità, $|P - C| < r$) ha modulo $E_P = (\xi + 1)^2/100$ V/m, determinare la distanza $|O - C|$ fra i centri delle due sfere.



L'esercizio si risolve utilizzando il principio di sovrapposizione: il campo in *P* generato dalla sfera cava è dato dalla somma dei campi generati nello stesso punto da due sfere piene rispettivamente con centro in *O* e in *C*, raggio *R* ed *r* e densità di carica $+\rho$ e $-\rho$.

$$\vec{E}_P = \vec{E}'_P + \vec{E}''_P$$



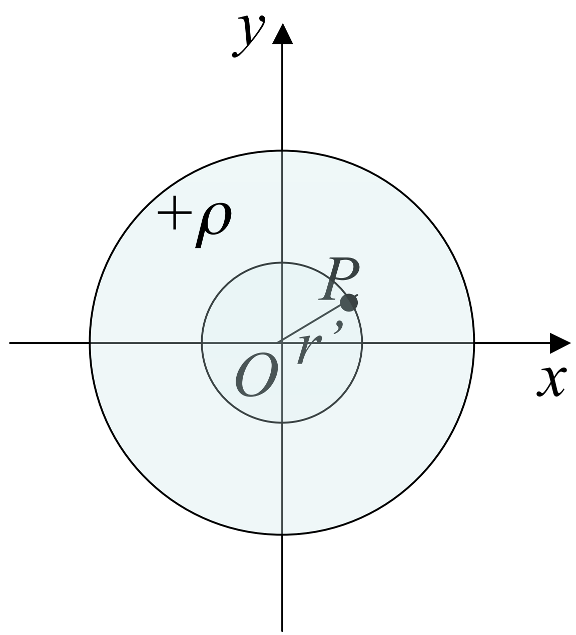
Tramite la legge di Gauss calcoliamo il flusso del campo in *P* dovuto alla carica contenuta nella sfera di raggio *r'*, pari alla distanza di *P* dal centro *O* della sfera:

$$\Phi_{r'}\left(\vec{E}'_P\right) = 4\pi r'^2 E'_P = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r'^3 \rho = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r'^3 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r'^3}{R^3}$$

Risolviamo rispetto a E'_P:

$$E'_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r'}{R^3}$$

Esprimeremo il campo E'_P in funzione della densità di carica, dato del problema:



$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$$E'_P = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r'$$

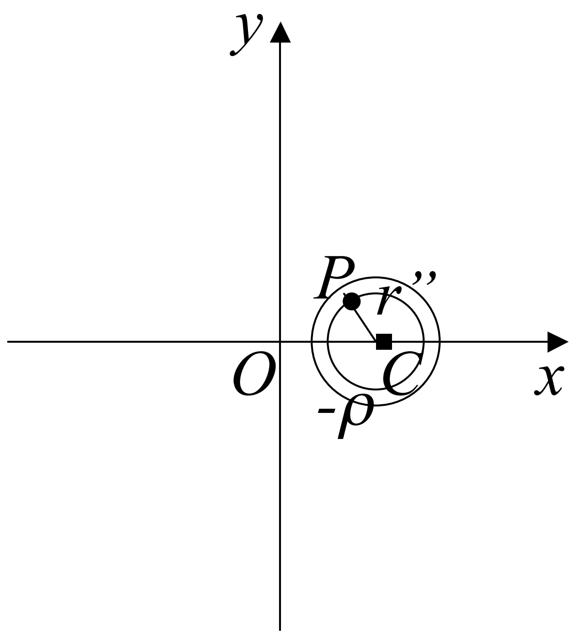
Procediamo in maniera analoga per calcoliare il flusso del campo in *P* dovuto alla carica contenuta nella sfera di raggio *r”*, pari alla distanza di *P* dal centro *C* della sfera:

$$\Phi_{r''}\left(\vec{E}''_P\right) = 4\pi r''^2 E''_P = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r''^3(-\rho) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r''^3 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r''^3}{R^3}$$

$$E''_P = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r''}{R^3}$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$E''_P = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r''$$

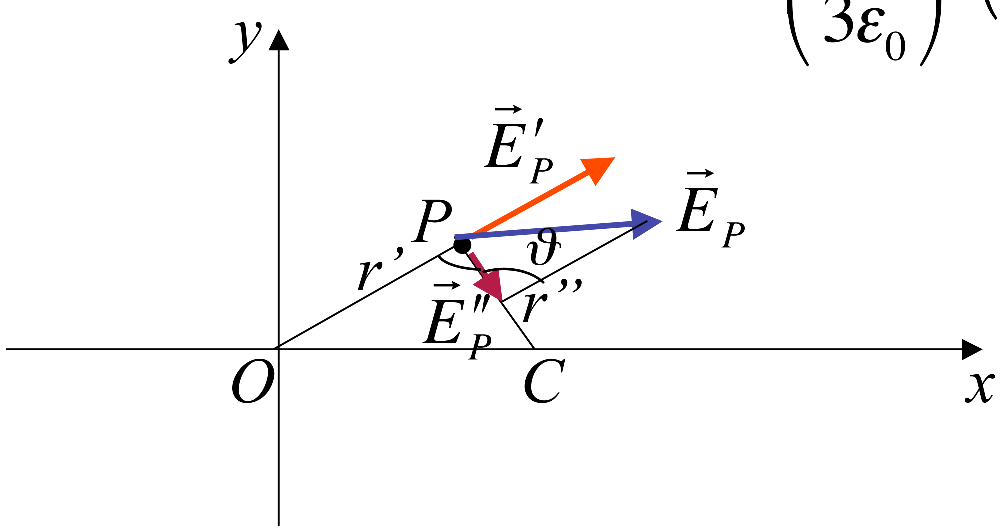


Effettuiamo ora la somma vettoriale dei campi appena ottenuti, tramite il ben noto teorema di Carnot:

$$\left\|E_P\right\|^2 = \left\|E'_P\right\|^2 + \left\|E''_P\right\|^2 - 2\left\|E'_P\right\|\left\|E''_P\right\|\cos\vartheta$$

$$= \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)^2\left(r'^2 + r''^2\right) - 2\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)^2 r'r''\cos\vartheta$$

$$= \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)^2\left(r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos\vartheta\right)$$



Il termine tra parentesi tonde a secondo membro è proprio il quadrato del modulo della distanza di *C* da *O*, richiesta dal problema:

$$|O - C|^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos\vartheta$$

Riscriviamo l'espressione trovata in precedenza rispetto a questa quantità:

$$\|E_P\|^2 = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)^2 |O - C|^2$$

Risolvendo rispetto a |*O*-*C*| otteniamo infine:

$$|O - C|^2 = \|E_P\|^2 \left(\frac{3\varepsilon_0}{\rho}\right)^2$$