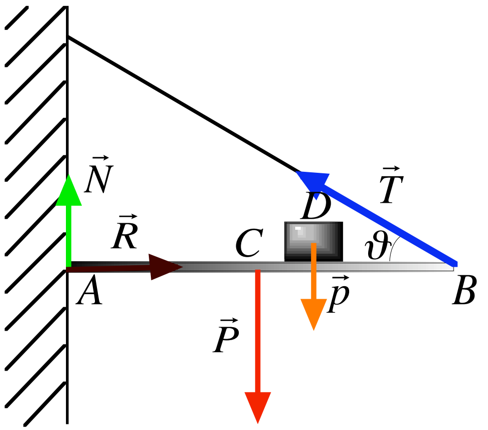
Asta omogenea di massa M e lunghezza $2l$ incernierata ad un piano verticale sostenuta da una fune ideale (1/2)



Nel sistema considerato vi è una massa m posta a distanza d dall'estremo B dell'asta.
Oltre alla forza peso $\vec{P}$ applicata nel centro geometrico (in quanto si tratta di un corpo omogeneo), sull'asta agiscono la tensione della fune e le reazioni vincolari della parete: $\vec{R}$ impedisce che l'asta penetri nella parete e $\vec{N}$ impedisce che l'estremo A cada verso il basso. Le espressioni cartesiane delle forze esterne sono quindi:

$$\begin{cases} \vec{P} = -Mg\hat{j} \\ \vec{p} = -mg\hat{j} \\ \vec{T} = -T_x\hat{i} + T_y\hat{j} = -T\cos\vartheta\hat{i} + T\sin\vartheta\hat{j} \\ \vec{R} = R\hat{i} \\ \vec{N} = N\hat{j} \end{cases}$$

Imponiamo le equazioni cardinali della statica:

$$\left.\begin{aligned} & R - T\cos\vartheta = 0 \\ & T\sin\vartheta + N - Mg - mg = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{I}^{a} \text{ cardinale}$$

$$(A-B)\wedge\vec{N} + (C-B)\wedge\vec{P} + (D-B)\wedge\vec{p} = 0 \quad \text{II}^{a} \text{ cardinale}$$

Sviluppando i prodotti vettoriali della terza equazione si ottiene

$$-\|2l\|\|N\|\sin\frac{\pi}{2}\hat{k} + \|l\|\|P\|\sin\frac{\pi}{2}\hat{k} + \|d\|\|p\|\sin\frac{\pi}{2}\hat{k} = 0$$

$$-2Nl + Mgl + mgd = 0$$

Asta omogenea di massa M e lunghezza $2l$ incernierata ad un piano verticale sostenuta da una fune ideale (2/2)

Da quest'ultima espressione otteniamo il modulo di $\vec{N}$:

$$N = \frac{g}{2l}(Ml + md)$$

che, sostituito nella seconda equazione, ci dà il modulo di $\vec{T}$:

$$T\sin\vartheta = g(M+m) - N = g(M+m) - \frac{g}{2l}(Ml + md)$$

$$T = \frac{g}{\sin\vartheta}\left(M + m - \frac{Ml + md}{2l}\right)$$

che a sua volta, sostituito nella prima equazione, ci dà il modulo di $\vec{R}$:

$$R = \cos\vartheta\,\frac{g}{\sin\vartheta}\left(M + m - \frac{Ml + md}{2l}\right) = \frac{g}{\tan\vartheta}\left(M + m - \frac{Ml + md}{2l}\right)$$

Nel caso particolare in cui $d = l$ otteniamo:

$$N = \frac{g}{2l}(Ml + ml) = \frac{g\cancel{l}}{2\cancel{l}}(M + m) = \frac{g}{2}(M + m)$$

$$T = \frac{g}{\sin\vartheta}\left(M + m - \frac{Ml + ml}{2l}\right) = \frac{g}{\sin\vartheta}\left(M + m - \frac{\cancel{l}(M + m)}{2\cancel{l}}\right) = \frac{g}{2\sin\vartheta}(M + m)$$

$$R = \frac{g}{\tan\vartheta}\left(M + m - \frac{\cancel{l}(M + m)}{2\cancel{l}}\right) = \frac{g}{2\tan\vartheta}(M + m)$$