

Soluzioni

1. Due pianeti orbitano intorno a una stella. L'orbita del primo è ellittica ed è caratterizzata da un semiasse maggiore pari a 600 milioni di km . Quella del secondo è circolare di raggio pari a 200 milioni di km . Quanto vale il rapporto $\frac{T_1}{T_2}$ fra i tempi di rivoluzione dei due pianeti?
Motivare la risposta.

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{R_1^3}{R_2^3}} = 3\sqrt{3}$$

2. Un proiettile viene sparato parallelamente alla superficie terrestre ad una altezza h dal suolo, con velocità pari a $100 m/s$. Un secondo proiettile viene lasciato cadere dalla stessa altezza h contemporaneamente allo sparo. Assumendo la terra piatta e l'attrito dell'aria trascurabile, dire quale dei due proiettili tocca terra per primo.
Motivare la risposta.

3. Un pallone aerostatico di massa M si trova sospeso in aria immobile ad una certa altezza dal suolo. Al pallone è appesa una scala di corda alla quale è aggrappato un giovane di massa m . Ad un certo punto il giovane sale verso il pallone con velocità v rispetto alla scala.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) Durante la salita il pallone si muove verso l'alto con velocità v ;
- b) durante la salita il pallone si muove verso il basso con velocità $V = \frac{m}{M}v$;
- c) durante la salita il pallone si muove verso il basso con velocità $V = \frac{m}{m+M}v$.

Motivare la risposta.

$$m\vec{v}_A + M\vec{V} = \vec{0}$$

$$m(\vec{v} + \vec{v}_T) + M\vec{V} = \vec{0}$$

$$m(v - V) - MV = 0$$

$$mv - (m + M)V = 0$$

$$V = \frac{m}{m + M}v$$

4. Un corpo di massa m cade verticalmente su una molla di costante elastica k da un'altezza h rispetto all'estremo della molla. A causa della resistenza dell'aria, il corpo raggiunge la molla con velocità $v = \sqrt{\frac{gh}{2}}$.
Determinare:

a) il lavoro compiuto dalla forza di attrito dell'aria;

Teorema forze vive:

$$L = L_p - L_a = mgh - L_a = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{gh}{2}$$

$$L_a = \frac{3}{4}mgh$$

Oppure: Il lavoro della forza d'attrito è uguale all'energia cinetica "persa" a causa dell'attrito stesso:

$$\left. \begin{array}{l} T_{n.a.} = \frac{1}{2}mv_{n.a.}^2 = mgh \\ T_a = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mgh}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow L_a = T_{n.a.} - T_a = \frac{3}{4}mgh$$

b) di quanto si comprime la molla.

In questa fase si trascura l'attrito e si conserva l'energia meccanica:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mgh}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow k\Delta x^2 = \frac{mgh}{2} \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{mgh}{2k}}$$

5. L'energia potenziale di un punto materiale di massa $m = 3 \text{ kg}$ è data da $V(x) = 3x^2 - x^3$ (energia in *Joule*, x in m).

a) In quale posizione il punto materiale si trova in equilibrio?

Deve essere $\vec{F} = \vec{0}$.

$$\begin{array}{l} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 - 6x \\ F_y = F_z = 0 \end{array} \quad F_x = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

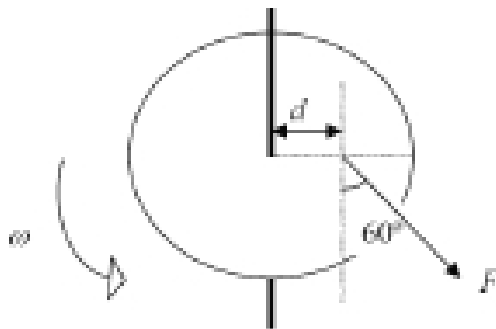
b) Se l'energia totale della particella è pari a 10 J , qual è la sua velocità nel punto $x = 2 \text{ m}$?

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + 3x^2 - x^3$$

$$E(x = 2) = \frac{1}{2}mv^2 + 4 = 10 \text{ J}$$

$$v = \sqrt{\frac{12}{m}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2 \text{ m/s}$$

6. Un disco uniforme di massa $m = 100 \text{ kg}$ e raggio $R = 1 \text{ m}$ gira inizialmente con una velocità angolare $\omega_i = 1000 \text{ giri/min}$. A una distanza radiale $d = 0.5 \text{ m}$ viene applicata una forza la cui direzione forma un angolo di 60° con la tangente al disco.



a) Che lavoro deve fare tale forza per arrestare il disco?

$$L = \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega_i^2 = \frac{1}{4}100 \cdot 1^2 \frac{(2\pi \cdot 1000)^2}{60^2} = 273.9 \text{ kJ}$$

b) Quanto vale la forza se il disco si ferma in 1 minuto?

$$(I_{\text{disco}} = \frac{1}{2}mR^2)$$

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}}$$

$$Fd \cos \varphi = \frac{1}{2}mR^2 \frac{\omega_i}{t}$$

$$F = \frac{1}{2} 100 \frac{2\pi \cdot 1000}{60 \cdot 60} \frac{1}{0.5 \cos 60^\circ} = 350 \text{ N}$$