Soluzioni cinematica rotazionale et altro

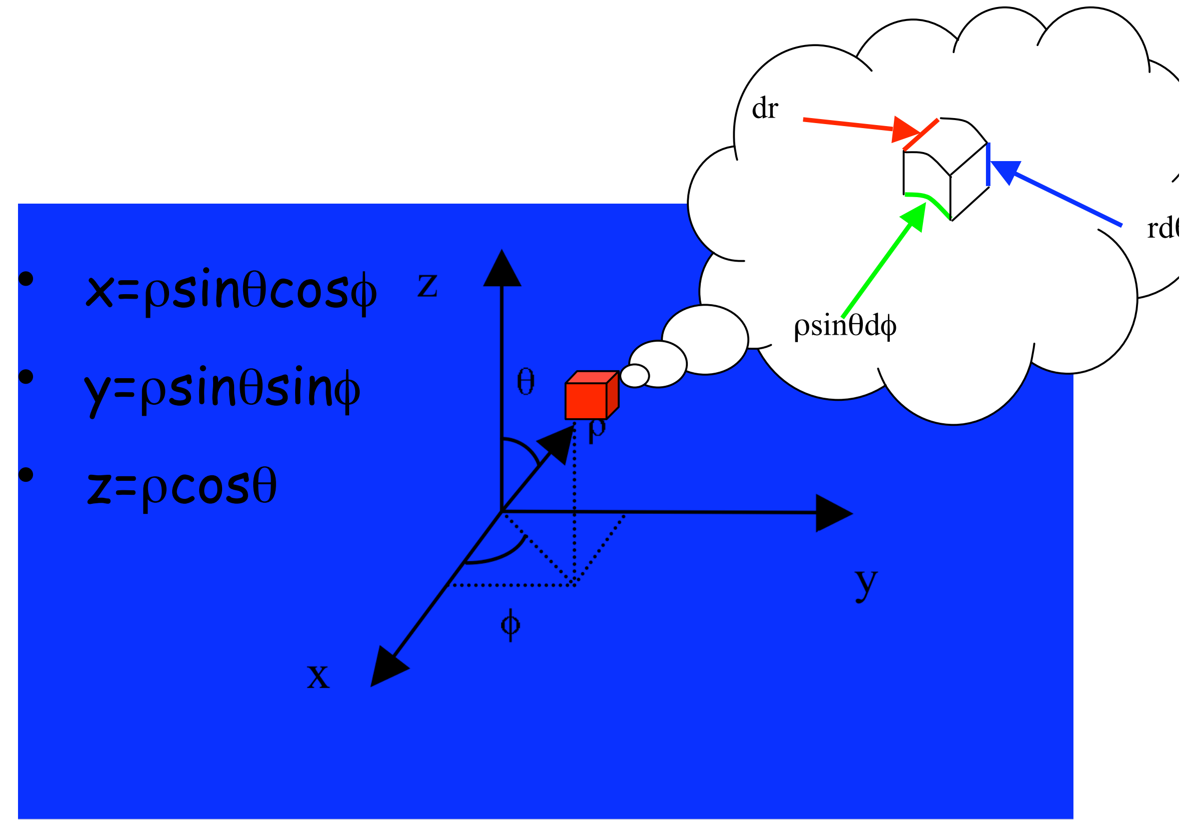
1. Uno dei primi calcoli di momenti d'inerzia si realizza con le aste. Per calcolare il momento di un'asta di lunghezza L e densità di massa uniforme ρ, rispetto ad un asse centrale, si procede nel seguente modo:

$$I = \int_V h^2 dm = 2\rho \int_0^{L/2} h^2 dh = \frac{\rho L^3}{12}$$

Ricordo che la distanza dall'asse di rotazione vale h, mentre l'elementino di massa dm ha "volume" pari a dh. Questa è un'inesattezza poichè dh è un tratto di linea e non un volume. Per semplicità si intende l'asta avente una sola dimensione: la lunghezza. Perciò considero ρ come una densità lineare [Kg/m]. Notate le dimensioni fisiche della densità di massa; pertanto se si compie un controllo sulle unità di misura si ottiene che il momento d'inerzia ha unità [$Kg \cdot m^2$]. Questi controlli incrociati sulle unità garantiscono una maggiore affidabilità nei calcoli. Quindi fateli sempre!!!
Prendiamo la sfera. Vale sempre la formula:

$$I = \int_V h^2 dm$$

La filosofia è sempre quella, ovvero individuare l'elementino di massa dm e calcolarne la sua distanza al quadrato dall'asse rispetto a cui vogliamo calcolare il momento di inerzia. Questa quantità va integrata su tutto il volume. Ora, nel caso della palla, però, per semplificare i calcoli, è bene introdurre le coordinate polari
sferiche.



Qui l'elementino di massa vale dunque: $dv = \rho^2 \sin\vartheta \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot dr$.
Si calcola l'integrale in tre variabili: ρ tra 0 e R; θ tra 0 e π; ϕ tra 0 e 2π. Esplicitamente:

$$I = \int_V h^2 dm = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} h^2 dv = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} h^2 \cdot \left[\left(r^2 \sin\vartheta \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot dr\right)\rho\right] =$$

la distanza h dall'asse di rotazione vale per ovvi motivi:

$$h = r \sin\vartheta$$

segue

$$I = \int_V r^2 dm = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\vartheta \cdot \left[\left(r^2 \sin\vartheta \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot dr\right)\rho\right] = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi =$$

$$= \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi = \rho \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^\pi \sin^3\vartheta d\vartheta = \rho \frac{2\pi R^5}{5} \left[\int_0^\pi \sin\vartheta\left(1 - \cos^2\vartheta\right) d\vartheta\right] =$$

$$= \rho \frac{2\pi R^5}{5} \left[\int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta - \int_0^\pi \left(\sin\vartheta \cos^2\vartheta\right) d\vartheta\right] = \rho \frac{2\pi R^5}{5} \cdot \frac{4}{3}$$

Se la densità è uniforme allora posso portarla fuori dai tre integrali ed inoltre vale $\rho = \frac{M}{V_{sfera}} = \frac{M}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}$ ottenendo un momento d'inerzia totale:

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Per il calcolo di momenti di inerzia di oggetti con asse di rotazione lontano dal baricentro applichiamo il teorema di Steiner. Al momento d'inerzia del baricentro va sommato il prodotto della massa del oggetto per il quadrato della distanza tra il baricentro ed l'asse di rotazione. Il caso del manubrio indicato in figura, va ricondotto ad una composizione di elementi più semplici. Ogni sfera ha un momento d'inerzia pari a:

$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Poi, visto che l'asse di rotazione è posizionato in mezzo alla sbarra, il momento totale si ottiene:

$$I_{sfera\_totale} = \frac{2}{5} mR^2 + m(L + R)^2$$

Le sfere sono due, per cui ci sono due contributi del tipo I_{sfera_totale}. In più aggiungiamo il momento totale dell'asta calcolata nel primo esempio con ρ=M/L:

$$I_{manubrio} = 2 \cdot \left[\frac{2}{5} mR^2 + m(L+R)^2\right] + \frac{M}{12} L^2$$

Qui di seguito lascio indicate le modalità per calcolare i momenti di inerzia di Anello, Cubo, Cilindro, Disco, Cono, Asta con densità non uniforme. Per alcuni di essi è conveniente impiegare il volumetto della massettina dm in coordinate cilindriche.

ANELLO:

In[18]:= $\lambda = M/(2*\pi*R)$

Out[18]= $\frac{M}{2\pi R}$

In[20]:= $I\_anello = \lambda * \int_0^{2\pi} R^2 * R \, d\theta$

Out[20]= $M R^2$

CUBO:

In[26]:= $\rho = M/(L^2)$

Out[26]= $\frac{M}{L^3}$

In[23]:= $I\_cubo = 8 * \rho * \int_0^{L/2} \int_0^{L/2} \int_0^{L/2} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$

Out[23]= $\frac{L^2 M}{6}$

DISCO:

In[25]:= $\sigma = M/(\pi * R^2)$

Out[25]= $\frac{M}{\pi R^2}$

In[31]:= $I\_disco = \sigma \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \, dr \right) d\theta$

Out[31]= $\frac{M R^2}{2}$

CILINDRO (asse di rotazione parallelo alle generatrici):

In[32]:= $\rho = M/(\pi * R^2 * H)$

Out[32]= $\frac{M}{H \pi R^2}$

In[38]:= $I\_cilindro = \rho \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2\, r\, dr \right) d\theta \right) dh$

Out[38]= $\frac{M R^2}{2}$

CILINDRO (asse di rotazione passante per il centro ma perpendicolare alle generatrici):

In[1]:= $\rho = M/(\pi * R^2 * H)$

Out[1]= $\frac{M}{H \pi R^2}$

In[4]:= $I_{cilindro} = \rho \int_{-H/2}^{H/2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R h^2\, r\, dr \right) d\theta \right) dh$

Out[4]= $\frac{H^2 M}{12}$

CONO:

In[1]:= $\rho = 3 * M/(\pi * R^2 * H)$

Out[1]= $\frac{3 M}{H \pi R^2}$

In[2]:= $r' = R\left(1 - \frac{h}{H}\right)$

Out[2]= $\left(1 - \frac{h}{H}\right) R$

In[3]:= $I\_cono = \rho \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r'} r^2\, r\, dr \right) d\theta \right) dh$

Out[3]= $\frac{3 M R^2}{10}$

ASTA CON DENSITA’ non UNIFORME:

L’oggetto ha densità di massa $\rho=\rho(x)$ con x che varia tra 0 ed L.

In[4]:= $\rho = A \frac{x}{L}$

Out[4]= $\frac{A x}{L}$

In[5]:= $\int_0^L \rho * x^2\, dx$

Out[5]= $\frac{A L^3}{4}$

2. Risolveremo questo esercizio tramite considerazioni unicamente energetiche. All'istante t=0, la sfera si trova ad una determinta altezza. Il sistema è fermo per cui l'unica energia è quella potenziale gravitazionale U=mgH relativa alla sfera. Scendendo lungo la rampa, parte di questa energia potenziale della sfera si trasforma in energia cinetica. Tradotto significa che la sfera acquista velocità che sarà massima alla base della rampa dove tutta l'energia potenziale si sarà trasformata in energia cinetica. In generale, dato un sistema chiuso in cui non ci sono passaggi di materia e di energia con l'esterno, l'energia totale è costante.
L'energia cinetica della sfera acquistata durante la discesa si può dividere in due contributi. Il primo contributo rappresenta l'energia del centro di massa della sfera che si muove con velocità v_c; mentre il secondo termine è l'energia rotazionale vera e propria.

$$K(x) = \frac{1}{2}m\left(v_c(x)\right)^2 + \frac{1}{2}I_{sfera}\left(\omega(x)\right)^2$$

Non l'ho ancora detto ma fisso l'asse delle x appoggiato alla rampa con lo zero nell'estremo più alto a destra e verso puntante la base del piano inclinato. Intanto che ci siamo fissiamo sempre lì, ma con direzione perpendicolare ad x l'asse delle ordinate. Siccome l'energia totale si deve conservare allora scrivo che:

$$E_{tot} = U_{iniziale} = mgH = K(x) + U(x) = \frac{1}{2}m\left(v_c(x)\right)^2 + \frac{1}{2}I_{sfera}\left(\omega(x)\right)^2 + mg\cdot h(x)$$
$$\Rightarrow mg\left(H - h(x)\right) = K(x) = \frac{1}{2}m\left(v_c(x)\right)^2 + \frac{1}{2}I_{sfera}\left(\omega(x)\right)^2$$

Per proprietà geometriche scrivo che $H - h(x) = x\sin\alpha$ e $v_c(x) = \omega_c(x)R$, segue allora che:

$$K(x) = mgx\sin\alpha = \frac{1}{2}m\left(v_c(x)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v_c(x)}{R}\right)^2 = \frac{7}{10}m\left(v_c(x)\right)^2$$ se derivo

rispetto al tempo ottengo l'espressione cercata per l'accelerazione:

$$mg\dot{x}\sin\alpha = \frac{7}{5}m\dot{x}\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin\alpha$$

Un altro modo per poter risolvere questo esercizio sta nella risoluzione di una delle equazioni cardinali della dinamica, che ricordo essere:

$$\vec{F}^{esterne} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

cioè la derivata rispetto al tempo della quantità di moto è pari alla forza esterna risultante,

$$\vec{M}^{esterne} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{P}_{centro\_massa} + \vec{r}_{centro\_massa} \times m\vec{v}_{centro\_massa}\right]$$

ovvero la derivata temporale del momento angolare della quantità di moto (calcolato rispetto ad un polo A) è uguale alla somma di tutti i momenti esterni.

Consideriamo la seconda di queste equazioni e vediamo che il momento iniziale delle forze del sistema vale:

$$\vec{M}^{e} = \vec{r} \times \vec{F}^{esterne} \Rightarrow \left\|\vec{M}^{e}\right\| = mgR\sin\alpha$$

perchè l'unica forza presente è quella di gravità che è applicata nel centro di massa della sfera distante R dal polo A. Questo vettore ovviamente è ortogonale al foglio ed il verso si determina applicando la regola della mano destra. Il momento della quantità di moto è invece definito come:

$$\left\|\vec{P}\right\| = I\omega + mRv_{centro\_massa} \Rightarrow \frac{d\left\|\vec{P}\right\|}{dt} = I\dot{\omega} + mR\dot{v}_{centro\_massa}$$

$$\left\|\vec{P}\right\| = I\omega + mRv_{centro\_massa} \Rightarrow \frac{d\left\|\vec{P}\right\|}{dt} = I\dot{\omega} + mR\dot{v}_{centro\_massa}$$

da cui: $\Rightarrow \dot{v}_{centro\_massa} = \ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin\alpha$, che è lo stesso risultato di prima.

3. Simile all'esercizio precedente e soprattutto fatto in aula.
4. Per prima cosa calcoliamo il momento di inerzia del volano. Il tratto centrale ha peso M, mentre i due cilindretti hanno peso m e m:

$$I_{totale} = mr^2 + \frac{1}{2}MR^2$$

Il volano è soggetto ad un momento meccanico dovuto alla tensione del filo T che le è trasmessa a causa del peso del blocco. Proiettando sull'asse verticale, perpendicolare al piano, la seconda equazione cardinale, si ottiene:

$$\left\|\vec{M}\right\| = rT = \frac{d\left\|\vec{P}\right\|}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\dot{\omega} \Rightarrow T = \frac{I\dot{\omega}}{r}$$

Applico la prima delle equazioni cardinali al blocco che sta cadendo e determino l'accelerazione:

$$m_1 g - T = m_1 a \Rightarrow a = \dot{\omega} r = \frac{m_1 g - T}{m_1} = \frac{m_1 g - I\frac{\dot{\omega}}{r}}{m_1}$$

$$\Rightarrow a\left(m_1 + \frac{I}{r^2}\right) = m_1 g \Rightarrow a = \frac{m_1 g r^2}{m_1 r^2 + I}$$

5. Nel momento del contatto tra la sfera ed il gradino si ha una fase impulsiva, in cui il punto O rimane aderente allo spigolo. Questo è un urto. Nell'istante di contatto le uniche forze attive sono quella peso e la reazione vincolare sullo spigolo. La reazione vincolare ha, rispetto ad un polo in O, braccio nullo per cui l'unico momento è originato dal peso della sfera. Se integriamo questo momento per un tempo piccolissimo otteniamo:

$$\vec{M}^e = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{M}^e \cdot dt = d\vec{P} \Rightarrow \int_{\Delta t \to 0} \vec{M}^e \cdot dt \approx 0 = \Delta\vec{P} \Rightarrow \vec{P} = const$$

Questo significa che il momento della quantità di moto prima e dopo l'urto si conserva. E' un risultato importantissimo perchè ci permette di proseguire nei calcoli. Quanto vale il momento della quantità di moto iniziale? La sfera inizialmente sta ruotando da sinistra verso il gradino. Per quanto sappiamo dalla teoria, possiamo dire che il momento angolare calcolato rispetto allo spigolo O vale:

$$\vec{P}_0 = \vec{OC} \times m\vec{v}_c + I_c\vec{\omega}$$

da cui subito prima dell'urto:

$$\left\|\vec{P}_{t_1}\right\| = a \cdot m \cdot v_0 \sin\alpha + I_c\omega_0 = a \cdot m \cdot v_0 \sin\alpha + I_c\frac{v_0}{a} = a \cdot m \cdot v_0 \frac{a-h}{a} + I_c\frac{v_0}{a} = v_0\left[m(a-h) + \frac{I_c}{a}\right]$$

mentre nell'istante successivo all'urto:

$$\left\|\vec{P}_{t_1+\Delta t}\right\| = I_O\omega = \left(I_c + ma^2\right)\omega$$

La formula è proprio questa perchè la sfera nell'urto ruota intorno al punto O e quindi c'è bisogno del momento d'inerzia calcolato rispetto ad un asse parallelo a quello baricentrico posizionato in O.
A questo punto eguaglio le due quantità di moto ed ricavo la formula della velocità iniziale:

$$v_0 = \frac{a\left(I_c + ma^2\right)}{\left[ma(a-h) + I_c\right]}\omega$$

Se vogliamo conoscere il valore minimo della velocità necessario alla sfera per superare il gradino e di fermarsi, è necessario impiegare la relazione energetica tra i due stati. Il lavoro compiuto dalla forza peso si trasforma in energia rotazionale in una rotazione intorno al punto O:

$$L_{peso} = mgh = \frac{1}{2} I_O \omega_{\min}{}^2 \Rightarrow \omega_{\min} = \sqrt{\frac{2mgh}{I_c + ma^2}}$$

$$\Rightarrow v_{0\min} = \frac{a\left(I_c + ma^2\right)}{\left[ma(a-h) + I_c\right]} \cdot \omega_{\min} = \frac{a\left(I_c + ma^2\right)}{\left[ma(a-h) + I_c\right]} \cdot \sqrt{\frac{2mgh}{I_c + ma^2}}$$

Sostituendo il valore del momento d'inerzia si ricava la velocità minima.

6. L'unica forza in gioco in questo sistema è la forza peso diretta lungo l'asse y. Lungo l'asse x non c'è alcuna forza che agisce perciò:

$$F_x = \frac{dQ_x}{dt} = 0 \Rightarrow Q_x = const = mv_{Xcm}$$

Inizialmente però la velocità del centro di massa è nulla per cui $v_{Xcm} = 0$ perciò la posizione in x del centro di massa rimane fissa, per cui

$$X_{cm} = L/2$$

mentre l'ordinata:

$$Y_{cm} = \frac{L}{2} \sin\theta$$

Segue che l'accelerazione:

$$\dot{Y}_{cm} = \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos\theta \Rightarrow \omega = \frac{2}{L} \frac{\dot{Y}_{cm}}{\cos\theta} = \frac{2}{L} \frac{v_c}{\cos\theta}$$

Ora però guardiamo l'equazione energetica del sistema:

$$mgY_{cm} = \frac{1}{2} mv_c{}^2 + \frac{I_{asta}}{2} \omega^2 = \frac{1}{2} mv_c{}^2 + \frac{I_{asta}}{2} \left(\frac{2}{L} \frac{v_c}{\cos\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} mv_c{}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mL^2}{12}\right) \left(\frac{2}{L} \frac{v_c}{\cos\theta}\right)^2 \Rightarrow g \frac{L}{2} \sin\theta = v_c{}^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{1}{\cos^2\theta}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_c = \cos\theta \sqrt{\frac{3L\sin\theta}{3\cos^2\theta}}$$

7. Il cilindro inizia a ruotare raggiungendo una certa velocità angolare ω_0. A quell punto viene tirato un freno con coppia costante M_A. Dal punto di vista energetico possiamo scrivere:

$$E_{iniziale} = m_2 g(H - y(t_1)) + \frac{1}{2} m_2 v_0{}^2 + \frac{I}{2}\omega_0{}^2$$
$$E_{finale} = m_2 g(H - y(t_1) - y(t_2))$$

Per cui, la variazione dell'energia è tutta assorbita dalla coppia frenante.

$$= m_2 g y(t_2) - \frac{1}{2} m_2 v_o{}^2 + \frac{I}{2}\omega_o{}^2 = M_A \frac{y(t_2)}{R}$$

La decelerazione avviene con un coppia costante M_A:

$$M_A = \frac{R}{y(t_2)}\left[m_2 g y(t_2) - \frac{1}{2} m_2 v_o{}^2 + \frac{I}{2}\omega_o{}^2\right]$$

Quindi, dalla seconda legge della dinamica ed integrando:

$$M^e{}_{totale} = I\dot{\omega} = -M_A + m_2 g R$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \omega_o - (M_A - m_2 g R)\frac{t}{I}$$

8. Tutta l'energia cinetica iniziale se ne va nel lavoro compiuto dalla coppia frenante:

$$\frac{1}{2} I_c \omega_0{}^2 = M_A \cdot n \cdot 2\pi \Rightarrow M_A = \frac{1}{2}\frac{I_c \omega_0{}^2}{n \cdot 2\pi} = \frac{m r^2 \omega_0{}^2}{10 n \pi}$$

9. Visto che non ci sono attriti possiamo scrivere l'equazione della conservazione dell'energia in termini molto semplici:

$$mgy + \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 = mgy_0 + \frac{1}{2} m\mathbf{v_0}{}^2 + \frac{1}{2} m\omega_0{}^2$$

Inizialmente la velocità baricentrale e la velocità angolare sono nulle (scala appoggiata al muro e ferma), perciò:

$$mgy + \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = mgy_0 = mgl/2$$

Esprimo le generiche coordinate x e y in funzione dell'angolo θ, angolo compreso tra il muro e la scala:

$$\left.\begin{aligned} x &= (l/2)\sin\theta \\ y &= (l/2)\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} v_x &= (l/2)\cos\theta \cdot \dot{\theta} \\ v_y &= -(l/2)\sin\theta \cdot \dot{\theta} \end{aligned}\right.$$

segue che il modulo quadro della velocità:

$$\mathbf{v}^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 = (l/2)^2\dot{\theta}^2 = \frac{l^2}{4}\omega^2$$

sostituiamo:

$$gl\cos\theta + \frac{l^2}{8}\omega^2 + \frac{I}{2m}\omega^2 = gl/2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{gl}{2}\frac{1-\cos\theta}{\left(\frac{l^2}{8}+\frac{I}{2m}\right)}$$

$$I = \frac{ml^2}{12} \Rightarrow \omega^2 = 3g\frac{1-\cos\theta}{l}$$

Mettendo al posto di θ, 90 gradi, otteniamo la velocità con la quale la scala sbatte sul pavimento.
La scala perde contatto dal muro quando la reazione vincolare N_1 nel punto P (ortogonale alla parete) diventa minore o uguale a 0. Vi sono complessivamente due reazioni vincolari. La prima è N_1, mentre la seconda, N_2, è diretta perpendicolarmente al terreno e punta in alto. Scomponendo le equazioni del moto lungo le direzioni x ed y, si ricava per N1:

$$N_1 = ma_x$$

mentre derivando l'equazione della velocità lungo x:

$$N_1 = m\left(\frac{l}{2}\cos\theta\cdot\frac{d\omega}{dt} - \frac{l}{2}\sin\theta\cdot\omega^2\right)$$

per ricavare la derivata di ω rispetto al tempo derivo la relazione ricavata precedentemente:

$$\frac{d}{dt}\left(\omega^2\right) = 2\omega\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2\omega}\cdot\frac{d}{dt}\left(\omega^2\right) = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

quindi:

$$N_1 = m\left(\frac{l}{2}\cos\theta\cdot\left(\frac{1}{2\omega}\cdot\frac{d}{dt}\left(\omega^2\right)\right) - \frac{l}{2}\sin\theta\cdot\omega^2\right) = m\left(\frac{l}{2}\cos\theta\cdot\left(\frac{3g}{2l}\sin\theta\right) - \frac{l}{2}\sin\theta\cdot\left(\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)\right)\right)$$

$$= m\left(\frac{3g}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right)$$

Sapendo che l'angolo varia tra 0 e 90 gradi, si ha che il primo fattore è sempre maggiore di zero. Resta che rendere il secondo fattore maggiore di zero. Questo si verifica per $(\cos\theta) \geq \frac{2}{3}$.

10. L'unica forza attiva è quella d'attrito diretta tangenzialmente al piano ma di verso opposto al moto. La forza peso e la reazione vincolare si annullano. Scelto un polo qualunque O sul piano posso vedere che il momento della forza di attrito è nullo poichè il raggio e la forza sono collineari. Pertanto il momento angolare iniziale sarà uguale a quello finale:

$$mv_0 r_0 \sin\theta_0 = mv_f r \sin\theta + I_c \omega_f$$

I due angoli, rispetto al piano, sono quelli intercettati dalla retta che dal polo O congiunge il baricentro della sfera in due istanti temporali diversi T1 e T2. Al tempo T1 la sfera avanza solo strisciando, ma al tempo T2 la sfera sta rotolando.
Inoltre: $R = r_0 \sin\theta_0 = r \sin\theta$ e $I_c = \frac{2}{5} mR^2$ e $\omega_f = \frac{v_f}{R}$ per cui la velocità finale vale: $v_f = \frac{5v_0}{7}$. L'energia dissipata dalla forza d'attrito si calcola facendo la differenza tra l'energia cinetica iniziale e quella finale:

$$E_{iniziale} - E_{finale} = \frac{1}{2} m v_0^{\,2} - \frac{1}{2} m v_f^{\,2} - \frac{I_c}{2} \omega_f^{\,2} = \frac{m v_0^{\,2}}{7}$$