

Part I

Cenni di Algebra Vettoriale

Esistono grandezze fisiche che per essere indicate richiedono unicamente un valore numerico. Queste quantità sono dette *scalari* (temperatura, massa, ecc) e non presentano particolari difficoltà nella loro comprensione. Ci sono però anche grandezze, chiamate *vettori*, che vengono indicate fornendo informazioni relative alla loro direzione e verso (forze, accelerazioni ...). Geometricamente un vettore è rappresentabile con una freccia caratterizzata dunque da una direzione, da un verso e da un punto d'applicazione. Se non viene specificato il punto di applicazione si parla di *vettore libero*.

1. Due vettori \vec{A} , \vec{B} sono uguali solo se hanno la stessa ampiezza o modulo, la stessa direzione e lo stesso verso. $\vec{A} = \vec{B}$
 2. Sia \vec{A} , allora il vettore avente lo stesso modulo e direzione, ma verso opposto, viene indicato con $-\vec{A}$.
 3. La somma algebrica di due vettori \vec{A} , \vec{B} si ottiene applicando la regola del parallelogramma. Da notare che la differenza tra due vettori $\vec{A} - \vec{B}$ è pari alla somma di \vec{A} e $-\vec{B}$ per quanto detto nel punto precedente.
 4. Il prodotto di un vettore \vec{A} per un scalare h è ancora un vettore, \vec{A}' , avente la stessa direzione ma modulo pari a $h|\vec{A}|$. Se h è negativo allora il verso di \vec{A}' è opposto a quello di \vec{A} .
 5. Le grandezze fisiche vettoriali appartengono a quello che in geometria viene definito uno **spazio vettoriale su campo reale**. Per comodità riportiamo qui di seguito la definizione generale di spazio vettoriale: *Siano l'insieme \mathbf{R} dei numeri reali e V un insieme. Si dice che V è uno spazio vettoriale se:*
 - È definita in V una *somma* ovvero un'operazione che associa ad ogni coppia (a,b) di elementi di V un unico elemento di V indicato con $a+b$.
 - È definito un *prodotto esterno* con elementi di \mathbf{R} , ovvero un'operazione che associa alla coppia di elementi (a,h) con $a \in V$ e $h \in \mathbf{R}$, un elemento $\in V$ chiamato ah .
 - Le due operazioni definite debbono soddisfare alcune regole:
- a) **SOMMA**: Proprietà associativa, proprietà commutativa, esistenza dell'elemento neutro, esistenza dell'opposto, proprietà distributiva.
 - b) **PRODOTTO ESTERNO**: Esistenza del neutro, proprietà associativa e distributiva.

A questa definizione é necessario aggiungere il concetto di **prodotto scalare**:
 Sia V uno spazio vettoriale su campo reale. Definisco **prodotto scalare** quella
 applicazione $P : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (attenzione quindi che il p.s. é uno scalare) con le
 seguenti proprietà:

$$\text{a)} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

$$\text{b)} P(t\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) = tP(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{c)} P(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = P(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + P(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$$

$$\text{d)} P(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \text{ e pari a } 0 \text{ solo se } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

In \mathbb{R}^n un **prodotto scalare** che può essere definito é:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

a cui é associata naturalmente la norma:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{P(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

Il prodotto scalare che abbiamo definito non é l'unico possibile, ma é quello che
 viene adottato normalmente, pertanto ci atterremo a questo.

Un'altra operazione fortemente utilizzata é il **prodotto vettoriale** e nasce
 dal concetto fisico di momento di una forza.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Il **prodotto vettoriale** dá come risultato un vettore (**c**) che ha per modulo
 il prodotto $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \hat{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. Si noti che se i due vettori sono collineari allora il
 prodotto é nullo. La direzione é quella ortogonale al piano individuato dai due
 vettori **a** e **b** mentre il verso si determina applicando la regola della mano destra.
 É evidente che scambiando l'ordine dei due vettori il prodotto cambia solo nel
 verso, si dice cioè che é anticommutativo.

Un particolare da tenere bene in mente é che i versori della comune terna di
 assi **i, j, k** ortogonali soddisfano la seguente relazione "circolare":

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad (1)$$

Si può pure dimostrare che il prodotto vettoriale é distributivo sia a destra che
 a sinistra, cioè:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (2)$$

e

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (3)$$

Applicando le eq.1, 2, 3 si ricava che il prodotto vettoriale vale, in coordinate
 cartesiane:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \quad (4)$$

Quest'ultima equazione può essere comodamente riscritta in notazione matriciale ricordando la definizione di determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (5)$$

Infine esiste il **prodotto misto**, operazione in cui compare sia il prodotto scalare che quello vettoriale:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

È possibile inoltre definire anche le operazioni matematiche di derivazione e d'integrazione. Per la **derivazione** vettoriale vale il concetto di *limite del rapporto incrementale* rispetto ad un parametro u :

$$\frac{d\mathbf{F}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(u + \Delta u) - \mathbf{F}(u)}{\Delta u}$$

purché tale limite esista. Se il vettore $\mathbf{F}(u)$ è scomponibile in $F_x(u)\mathbf{i} + F_y(u)\mathbf{j} + F_z(u)\mathbf{k}$ o più in generale in una qualunque base vettoriale, allora

$$\frac{d\mathbf{F}}{du} = \frac{dF_x(u)}{du}\mathbf{i} + \frac{dF_y(u)}{du}\mathbf{j} + \frac{dF_z(u)}{du}\mathbf{k}$$

Inoltre le consuete regole e proprietà della operazione di **derivazione** sono mutate dall'analisi:

$$\frac{d(\phi\mathbf{F})}{du} = \phi \frac{d\mathbf{F}}{du} + \mathbf{F} \frac{d\phi}{du} \quad (6)$$

$$\frac{d(\mathbf{G} \cdot \mathbf{F})}{du} = \mathbf{G} \cdot \frac{d\mathbf{F}}{du} + \frac{d\mathbf{G}}{du} \cdot \mathbf{F} \quad (7)$$

$$\frac{d(\mathbf{G} \times \mathbf{F})}{du} = \mathbf{G} \times \frac{d\mathbf{F}}{du} + \frac{d\mathbf{G}}{du} \times \mathbf{F} \quad (8)$$

Per quanto riguarda invece l'operazione d'integrazione si può dire che dato un vettore $\mathbf{F}(u) = F_x(u)\mathbf{i} + F_y(u)\mathbf{j} + F_z(u)\mathbf{k}$, posso definire in generale:

$$\int \mathbf{F}(u)du = \mathbf{i} \int F_x(u)du + \mathbf{j} \int F_y(u)du + \mathbf{k} \int F_z(u)du$$