

Part I

Cenni di Algebra Vettoriale

Al fine di ottenere una migliore comprensione é indispensabile raggiungere un buon grado di dimestichezza con tutti gli strumenti matematici che saranno impiegati nel corso degli studi di fisica. Questa prima parte tratta i cosiddetti *vettori*. Esistono grandezze fisiche che per essere indicate richiedono unicamente un valore numerico. Queste quantità sono dette *scalari* (temperatura, massa, ecc) e non presentano particolari difficoltà. Ci sono però anche grandezze, chiamate *vettori*, che vengono indicate fornendo informazioni relative alla loro direzione e verso (forze, accelerazioni ...). Geometricamente un vettore é rappresentabile con una freccia caratterizzata dunque da una direzione, da un verso e da un punto d'applicazione. Se non viene specificato il punto di applicazione si parla di *vettore libero*.

1. Due vettori \vec{A} , \vec{B} sono uguali solo se hanno la stessa ampiezza o modulo, la stessa direzione e lo stesso verso. $\vec{A} = \vec{B}$
 2. Sia \vec{A} , allora il vettore avente lo stesso modulo e direzione, ma verso opposto, viene indicato con $-\vec{A}$.
 3. La somma algebrica di due vettori \vec{A} , \vec{B} si ottiene applicando la regola del parallelogramma. Da notare che la differenza tra due vettori $\vec{A} - \vec{B}$ é pari alla somma di \vec{A} e $-\vec{B}$ per quanto detto nel punto precedente.
 4. Il prodotto di un vettore \vec{A} per un scalare h é ancora un vettore, \vec{A}' , avente la stessa direzione ma modulo pari a $h|\vec{A}|$. Se h é negativo allora il verso di \vec{A}' é opposto a quello di \vec{A} .
 5. Le grandezze fisiche vettoriali appartengono ovviamente a quello che in geometria viene definito uno **spazio vettoriale su campo reale**. Per comodità riportiamo qui di seguito la definizione generale di spazio vettoriale: *Siano l'insieme \mathbf{R} dei numeri reali e V un insieme. Si dice che V é uno spazio vettoriale se:*
 - É definita in V una *somma* ovvero un'operazione che associa ad ogni coppia (a,b) di elementi di V un unico elemento di V indicato con $a+b$.
 - É definito un *prodotto esterno* con elementi di \mathbf{R} , ovvero un'operazione che associa alla coppia di elementi (a,h) con $a \in V$ e $h \in \mathbf{R}$, un elemento $\in V$ chiamato ah .
 - Le due operazioni definite debbono soddisfare alcune regole:
- a) **SOMMA**: Proprietá associativa, proprietá commutativa, esistenza dell'elemento neutro, esistenza dell'opposto, proprietá distributiva.

b) PRODOTTO ESTERNO: Esistenza del neutro, proprietà associativa e distributiva.

A questa definizione è necessario aggiungere il concetto di **prodotto scalare**:
*Sia V uno spazio vettoriale su campo reale. Definisco **prodotto scalare** quella applicazione $P: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (attenzione quindi che il p.s. è uno scalare) con le seguenti proprietà:*

a) $P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

b) $P(t\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) = tP(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \forall t \in \mathbb{R}$

c) $P(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = P(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + P(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$

d) $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$ e pari a 0 solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

In \mathbb{R}^n un **prodotto scalare** che può essere definito è:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

a cui è associata naturalmente la norma:

$$\|x\| = \sqrt{P(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

Il prodotto scalare che abbiamo definito non è l'unico possibile, ma è quello che viene adottato normalmente, pertanto ci atterremo a questo.

Un'altra operazione fortemente utilizzata è il **prodotto vettoriale** e nasce dal concetto fisico di momento di una forza.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Il **prodotto vettoriale** dà come risultato un vettore (**c**) che ha per modulo il prodotto $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}$. Si noti che se i due vettori sono collineari allora il prodotto è nullo. La direzione è quella ortogonale al piano individuato dai due vettori **a** e **b** mentre il verso si determina applicando la regola della mano destra. È evidente che scambiando l'ordine dei due vettori il prodotto cambia solo nel verso, si dice cioè che è anticommutativo.

Un particolare da tenere bene in mente è che i versori della comune terna di assi **i, j, k** ortogonali soddisfano la seguente relazione "circolare":

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \tag{1}$$

Si può pure dimostrare che il prodotto vettoriale è distributivo sia a destra che a sinistra, cioè:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \tag{2}$$

e

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \tag{3}$$

Applicando le eq.1, 2, 3 si ricava che il prodotto vettoriale vale, in coordinate cartesiane:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \quad (4)$$

Quest'ultima equazione può essere comodamente riscritta in notazione matriciale ricordando la definizione di determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (5)$$

Infine esiste il **prodotto misto**, operazione in cui compare sia il prodotto scalare che quello vettoriale:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$