1 Risoluzione Esercizi di Algebra Vettoriale

1. Dati i vettori **a,b** il loro prodotto scalare é dato da:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta = \frac{15}{2}\sqrt{2}$$

2. Per prima cosa vanno determinati i moduli dei due vettori:
$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 1} \approx 7.68$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1 + 6^2} \approx 6.08$$
Ora calcolo il prodotto scalare dei due vettori:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) = \sum_{l=i,j,k} a_l b_l = 39$$
ricordo che $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}$ =0 segue dunque che
$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \cos\vartheta \approx 0.835 \Longrightarrow \sin\vartheta \approx 0.55$$

3. Dati i tre vettori **a,b,c** con **c=a-b**. Elevando al quadrato la relazione ottengo:
$$\vec{c}^{\,2} = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$
ovvero
$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\vartheta$$
C.V.D.

4. Per risolvere quest'esercizio basta imporre che il prodotto scalare dei due vettori sia zero:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 30 + 14y - y \Longrightarrow y = -\frac{30}{13}$$

5. Per quanto visto negli esercizi precedenti segue che:
$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2} = 0 \Longrightarrow |a| = |b|$$
C.V.D.

6. L'applicazione di un prodotto scalare é proprio una proiezione lungo un asse, per cui:
$$\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = a_r$$
cioé trovo un versore che giace su r sul quale proiettare **a**. Questa é una proprietá utilissima. Esprimere un vettore nelle sue componenti cartesiane significa proiettarlo sui tre assi del sistema di riferimento ortogonale xyz, ovvero significa fare il prodotto scalare del vettore con i tre versori **i,j,k**.

7. Il metodo piú veloce per calcolare un prodotto vettoriale é quello del determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 12 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i} + 96\mathbf{j} + 60\mathbf{k}$$

8. Molto semplicemente si tratta di trasformare il vettore trovato prima in un versore. Bisogna dividerlo per la sua stessa norma:

$$\frac{-20\mathbf{i} + 96\mathbf{j} + 60\mathbf{k}}{\sqrt{400 + 9216 + 3600}} \approx -0.174\mathbf{i} + 0.835\mathbf{j} + 0.522\mathbf{k}$$

9. Per prima cosa bisogna trovare il prodotto vettoriale di una coppia dei vettori. Il prodotto vettore ottenuto é ortogonale al piano individuato dai primi due vettori. Per vedere se il terzo vettore é complanare agli altri basta verificare se non ha alcuna proiezione sul prodotto vettore:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 17\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$$

$$\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = 67 \neq 0$$

per questo motivo i tre vettori non giacciono sullo stesso piano. Il valore numerico che é stato trovato é in realtá il volume del solido avente per spigoli i tre vettori. Se i tre vettori fossero stati tutti sullo stesso piano avremmo avuto un parallelepipedo degenere (schiacciato sul piano) di volume zero.

10. Come abbiamo calcolato nell'esercizio precedente il prodotto misto vale:

$$\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)$$

Se scambio **a** con **b** ottengo un'inversione di segno per le note proprietá. Un modo compatto e pratico per vedere e calcolare un prodotto misto é il determinante del tipo:

$$\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

in questa rappresentazione, scambiare due vettori significa scambiare due righe. Supponiamo di scambiare **a** con **c**:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_x \begin{vmatrix} c_y & c_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} c_x & c_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} c_x & c_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$a_x(c_yb_z - c_zb_y) - a_y(c_xb_z - c_zb_x) + a_z(c_xb_y - c_yb_x) =$$
$$a_xc_yb_z - a_xc_zb_y - a_yc_xb_z + a_yc_zb_x + a_zc_xb_y - a_zc_yb_x$$

mentre se fosse stato calcolato nella forma originale avremmo ottenuto:

$$-c_ya_xb_z + c_za_xb_y + c_xa_yb_z - c_za_yb_x - c_xa_zb_y + c_ya_zb_x$$

cioé l'opposto. Continuando si puó mostrare che ad uno scambio corrisponde un cambio di segno nel prodotto misto. Due scambi mantengono il segno inalterato:

$$\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

11. I risultati:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = 92\mathbf{i} + 150\mathbf{j} + 27\mathbf{k}$$
$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 17\mathbf{i} + 25\mathbf{j} - 192\mathbf{k}$$

12. Per quanto detto al punto 10 si puó notare che scelto uno dei tre prodotti, gli altri possono essere ottenuti realizzando due scambi di vettori. Per questo motivo calcolato uno, gli altri sono identici anche di segno: 467.

13. Come dovrebbe essere noto, i vettori, dal punto di vista geometrico sono frecce orientate. Pertanto dal disegno fornito possiamo determinare tutti gli elementi di partenza. Il punto C ha inizialmente coordinate C(1,2), mentre A e B sono A(5,2) e B(3,4). I tre vettori che consideriamo partono tutto dal punto O(0,0), pertanto le coordinate dei punti A,B,C forniscono immediatamente le componenti cartesiane dei vettori. $\mathbf{A}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\mathbf{B}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\mathbf{C}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. Il segmento CA non é altro che il vettore differenza tra OA e OC. Il prodotto scalare tra CA e OB garantisce l'informazione sull'angolo compreso:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = 4\mathbf{i}$$
$$\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{OB}|} = \cos\vartheta = \frac{(4\mathbf{i}) \cdot (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})}{4 \cdot \sqrt{9+16}} = \frac{12}{20} = 0.6$$

I piú attenti avranno notato che non era necessario fare tutti questi conti. Infatti il segmento CA é parallelo all'asse delle ascisse, quindi il coseno dell'angolo cercato non é altro che

$$\frac{OB_x}{|\overrightarrow{OB}|} = \cos\vartheta$$

Se si sposta il punto C, allora si rendono necessari tutti i calcoli precedenti:

$$\overrightarrow{CA}' = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}' = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$
$$\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{OB}|} = \cos\vartheta = \frac{(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})}{4 \cdot \sqrt{9+16}} = 0$$

come era giusto attendersi dalla figura.

14. La direzione della retta ortogonale al piano puó essere determinata eseguendo il prodotto vettore tra i **b,c**. Si determina il versore e si proietta **a** lungo la retta:

$$a_{\perp} = \left(\overrightarrow{a} \cdot \frac{\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)}{\left|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right|}\right) \frac{\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)}{\left|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right|}$$

15. La somma vettoriale dei tre vettori, calcolabile pure attraverso il metodo della poligonale[1], vale:

$$\overrightarrow{F} = 10\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

Per rappresentare questo vettore in coordinate polari, basta semplicemente calcolare il valore ρ, e di seguito ricavare i valori dei due angoli:

$$\rho = \sqrt{100 + 144} \approx 15.62$$

$$12 = \rho \cos\vartheta \Longrightarrow \vartheta \simeq 0.695\, rad$$

$$10 = \rho \sin\vartheta \sin\varphi \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}\, rad$$

segue che $\overrightarrow{F} = (15.62, 0.695 rad, \frac{\pi}{2} rad)$ in coordinate polari. Per calcolare il volume del solido, il procedimento é noto per cui:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 7 & 5 \\ -5 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 48\mathbf{i} - 61\mathbf{j} + 47\mathbf{k}$$

$$V = |(10\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \cdot (48\mathbf{i} - 61\mathbf{j} + 47\mathbf{k})| = 46$$

Infine conviene trasformare in coordinate cartesiane il vettore **L**:

$$\overrightarrow{L} = (r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta,\ h) = (1.62,\ 2.52,\ -1)$$

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{L} = (10\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \cdot (1.62\mathbf{i} + 2.52\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 13.2$$

16. Prendo i due vettori (segmenti orientati) QW e EW:

$$\overline{QW} = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

$$\overline{EW} = -5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

segue che l'area del triangolo vale:

$$\left\|\frac{1}{2}\left(\overline{QW} \times \overline{EW}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 10 & -5 \\ -5 & -5 & -4 \end{vmatrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \mathbf{i} \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \|-65\mathbf{i} + 41\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\| = \frac{1}{2}\sqrt{4225 + 1681 + 900} \approx 41.25$$

[1] Questo metodo di calcolo geometrico é molto utile negli esercizi di statica.

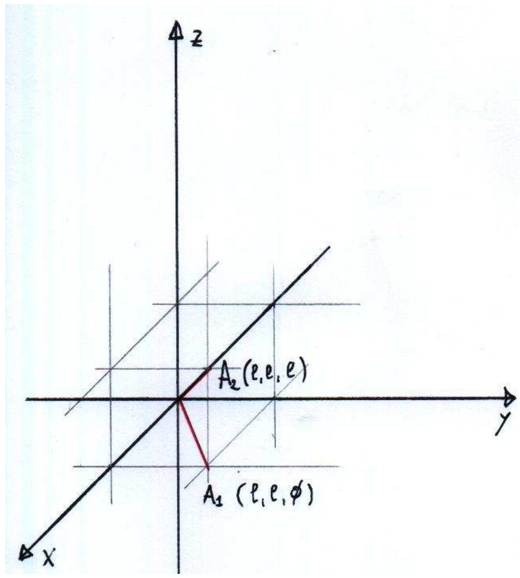

Figure 1:

17. Come mostra la figura 1, possiamo considerare la diagonale della faccia del cubo dal punto O al punto A_1(l,l,0); mentre come diagonale principale prendiamo quella del punto A_2(l,l,l). Segue che

$$\frac{\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2}}{|\overrightarrow{OA_1}||\overrightarrow{OA_2}|} = \cos\vartheta = \frac{2l^2}{\sqrt{2l^2}\sqrt{3l^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \vartheta \approx 35.26$$

18. Per risolvere questo esercizio é sufficiente fare qualche considerazione geometrica. L'operazione di rotazione é una trasformazione che puó essere condensata in una matrice 3x3. Data una terna di assi di partenza (x,y,z) si ottiene una nuova terna (x',y',z').

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} x' = xa_{11} + ya_{12} + za_{13} \\ y' = xa_{21} + ya_{22} + za_{23} \\ z' = z \end{cases}$$

La figura 2 mostra che i nuovi assi X' e Y' sono esprimibili come una combinazione lineare dei due vecchi assi X e Y:

$$x' = x\cos\Theta + y\sin\Theta$$

$$y' = -x\sin\Theta + y\cos\Theta$$

Segue facilmente che la matrice che realizza questa trasformazione é proprio quella dell'esercizio.

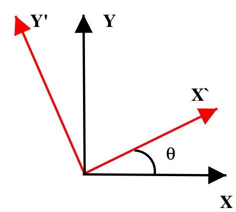

Figure 2: Rotazione di un sistema di riferimento.

19. Le norme sono, per definizione, tutte positive quindi **a,b,c** sono identicamente nulli.

20. Prendo l'equivalenza enunciata nel testo e l'elevo al quadrato:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \left(\vec{c}+\vec{d}\right)^2 = a^2+b^2+2ab\cos\Theta = c^2+d^2+2cd\cos\varphi$$

segue che

$$\cos\Theta = \frac{c^2+d^2+2cd\cos\varphi-a^2-b^2}{2ab}$$

$$\Theta_{min} \approx 44.45$$

$$\Theta_{max} \approx 136.13$$

21. Ecco le derivate parziali:

$$\frac{\partial\vec{L}}{\partial c} = (0, 0, t\cos 5\omega t)$$

$$\frac{\partial\vec{L}}{\partial t} = \left(-a\omega\sin\omega t, 2tb\sin\omega t + t^2 b\omega\cos\omega t, c\cos 5\omega t - 5ct\omega\sin 5\omega t\right)$$

22. Per prima cosa determiniamo le proiezioni del vettore **a** sugli assi cartesiani e poi deriviamo rispetto al tempo:

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{1+ct}\cos gt, \frac{1}{1+ct}\sin gt\right)$$

$$\dot{\vec{a}} = \left(\frac{-c}{(1+ct)^2}\cos gt - \frac{g}{(1+ct)}\sin gt, -\frac{c}{(1+ct)^2}\sin gt + \frac{g}{(1+ct)}\cos gt\right)$$

e dunque il modulo vale:

$$\left\|\dot{\vec{a}}\right\|^2 = \sqrt{p^2+u^2}$$

$$p^2 = \frac{c^2}{(1+ct)^4}\cos^2 gt + \frac{g^2}{(1+ct)^2}\sin^2 gt + \frac{2cg}{(1+ct)^3}\cos gt\sin gt$$

$$u^2 = \frac{c^2}{(1+ct)^4}\sin^2 gt + \frac{g^2}{(1+ct)^2}\cos^2 gt - 2\frac{gc}{(1+ct)^3}\sin gt \cos gt$$

$$\left\|\dot{\vec{a}}\right\| = \sqrt{\frac{c^2}{(1+ct)^4} + \frac{g^2}{(1+ct)^2}} = \frac{1}{(1+ct)^2}\sqrt{c^2 + g^2(1+ct)^2}$$

per cui il coseno dell'angolo compreso tra $\dot{\vec{a}}$ e l'asse delle ascisse vale:

$$\cos\Theta = \frac{\dot{\vec{a}} \cdot \vec{i}}{\left\|\dot{\vec{a}}\right\|} = -\frac{c\cos gt + g(1+ct)\sin gt}{\sqrt{c^2 + g^2(1+ct)^2}} \approx 2.34\, rad$$

mentre il modulo all'istante t=3s é:

$$\left\|\dot{\vec{a}}\right\|_{t=3s} \approx 0.715$$

23. La risultante somma vale:

$$\vec{T} = (24, -27, 3)$$

mentre il momento delle forze calcolato rispetto al punto O (0,0,0):

$$\vec{M} = (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}) + (-7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (19\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) +$$
$$+ (3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) = 28\mathbf{i} - 141\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Prendendo come punto di riduzione il punto (3,3,1) si ottiene:

$$\vec{M} = (2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k})\times(-5\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}) + (-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k})\times(19\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) =$$
$$= -92\mathbf{i} - 156\mathbf{j} - 114\mathbf{k}$$