# Parte I

# Cinematica del punto materiale

La posizione istantanea P(t) di un punto materiale lungo una qualunque traiettoria puó essere individuata in maniera univoca da un vettore $\mathbf{r}(\mathrm{t})$. Inizialmente si stabilisce un sistema di riferimento di coordinate e dal suo centro si traccia il vettore posizione $\overline{OP}$. Se l'oggetto é in moto allora senz'altro é individuabile una variazione del vettore $\mathbf{r}(\mathrm{t})$ e quindi é possibile definire quella che viene chiamata *velocitá istantanea.*

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t} \tag{1}$$

ove il vettore $d\overrightarrow{r}$ é chiamato *vettore spostamento.* Se il vettore posizione é espresso in coordinate cartesiane, allora la *velocitá istantanea* vale:

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{d\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\right)}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{2}$$

il cui modulo vale

$$\|\overrightarrow{v}\| = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{3}$$

Questa quantitá é la lunghezza d'arco che in un istante $\Delta t$ viene percorso dal punto materiale. Esiste anche la definizione di *velocitá media* espressa da:

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t} \tag{4}$$

Soffermiamoci ancora sulle eq.(2), (3). Essenzialmente abbiamo inteso indicare il punto P=P(t) con componenti:

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{5}$$

Le tre equazioni

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

rappresentano il luogo geometrico dei punti occupati nel tempo da P e costituiscono perció l'equazione della traiettoria del punto materiale.

Talvolta é di grande utilitá fissare un sistema di riferimento ortogonale solidale al punto materiale in movimento. Determinata la traiettoria si indica la posizione su di essa del punto P mediante l'equazione oraria del moto:

$$s = s(t)$$

con cui posso scrivere:

$$P = P(s) \tag{6}$$

Nella sostanza l'eq 6 non esprime concetti differenti dalla eq. 5 in quanto l'ascissa curvilinea $s$ é funzione del tempo. Se vogliamo esprimere la velocitá in termini di ascisse curvilinee allora:

$$\frac{dP(s)}{dt} = \frac{dP}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \hat{T}\dot{s}$$

Il versore $\hat{T}$, definito come $\frac{dP}{ds}$, é in ogni punto tangente alla curva ed diretto nel senso delle s crescenti se $\dot{s}$ é positivo (moto progressivo), mentre nel caso di moto retrogrado, il valore $\dot{s}$ é negativo. Da questo versore é poi possibile ricavare altri due vettori di modulo unitario tra loro ortogonali in maniera da completare una terna di assi cartesiani solidale al punto materiale. Nella letteratura, generalmente, sono indicati come versori $\hat{N}$ (normale) e $\hat{B}$ (binormale). Per determinare il versore $\hat{N}$ dobbiamo dimostrare che $\frac{d\hat{T}}{ds}$ é perpendicolare a $\hat{T}$. Si parte osservando che il prodotto scalare $\hat{T} \cdot \hat{T} = 1$ per cui posso scrivere:

$$\frac{d}{ds}\left(\hat{T} \cdot \hat{T}\right) = 0 = \frac{d\hat{T}}{ds} \cdot \hat{T} + \hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = 2\hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = 0 \Longrightarrow$$

$$\hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = 0$$

il che dimostra che $\frac{d\hat{T}}{ds}$ é normale a $\hat{T}$. Segue che:

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = k\hat{N}$$

con k=1/R (R=raggio di curvatura). Evidentemente k é il modulo di $\frac{d\hat{T}}{ds}$. Infine il versore binormale $\hat{B}$ ottiene con

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$