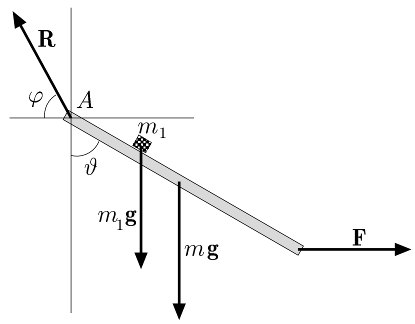
Esercizi sulla Statica dei Corpi Rigidi
A cura del Prof. T.Papa

1. Un'asta rigida AB, di sezione costante, lunghezza l e massa $m = 20\,kg$, è incernierata ad un asse orizzontale passante per l'estremo A, Sull'asta, alla distanza $2l/3$ da B è fissato un corpo puntiforme di massa $m_1 = 10\,kg$. Determinare il modulo della forza orizzontale che si deve applicare all'estremo B per mantenere l'asta in equilibrio nella posizione in cui forma un angolo $\theta = 60°$ con la verticale, e la reazione in A in tali condizioni.



Per l'equilibrio le somme delle forze e la somma dei momenti devono essere nulle,

$$\sum \mathbf{F} = 0, \qquad \sum \mathbf{M} = 0.$$

Le forze agenti sull'asta sono: il peso proprio, il peso del corpo, la forza applicata e la reazione vincolare

$$m\mathbf{g} + m_1\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{R} = 0.$$

Proiettando sugli assi di un riferimento cartesiano con origine in A, si ha

$$F + R_{Ax} = 0, \qquad R_{Ay} - mg - m_1 g = 0,$$

da cui:

$$R_{Ax} = -F \qquad R_{Ay} = (m + m_1)g. \tag{1}$$

Assumendo i momenti delle forze rispetto ad A, si ottiene:

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta - m_1 g\frac{l}{3}\sin\theta + Fl\cos\theta = 0.$$

Si ricava:

$$F = \left(\frac{m}{2} + \frac{m_1}{3}\right) g\tan\theta = 226,3\,N.$$

Tenuto conto delle (1), il modulo della reazione è

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{F^2 + [(m + m_1)g]^2} = 371,1\,N.$$

Poiché per le (1),

$$\tan\varphi = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = -1,29, \quad \Rightarrow \quad \varphi = |52,22°|.$$

La direzione di $\mathbf{R}$, rispetto all'orizzontale, risulta

$$\beta = 180° - 52,22° = 127,78°.$$

2. Una trave omogenea, di sezione costante e lunghezza l, è appoggiata ad una parete verticale liscia e ad un pavimento scabro. Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra pavimento e trave è $\mu_s = 0,5$, si determini il minimo angolo formato dalla trave col pavimento perché si abbia equilibrio.

Detti A e B i punti di appoggio della trave sulla parete e sul pavimento, la condizione di equilibrio è espressa dalle relazioni,

$$\sum \mathbf{F} = 0. \qquad \sum \mathbf{M} = 0. \tag{1}$$

Le forze che agiscono sulla trave sono: il peso, applicato al suo baricentro, e le reazioni $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$; la prima delle (1) si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = 0. \tag{2}$$

Fissato un riferimento con asse x parallelo al piano ed asse y ortogonale, volto in alto, e proiettando la (2) su tali assi, si ha

$$R_A + R_{Bx} = 0 \qquad R_{By} - mg = 0. \tag{3}$$

Va osservato che, essendo la parete liscia, la reazione $\mathbf{R}_A$ è ortogonale alla parete mentre non è nota la direzione della reazione $\mathbf{R}_B$. Pertanto conviene assumere i momenti delle forze rispetto ad B. Si ha:

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta - R_A l \sin\theta = 0.$$

Si ottiene:

$$R_A = \frac{1}{2}mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Per la prima delle (3) si deduce

$$R_{Bx} = -R_A = -\frac{1}{2}mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

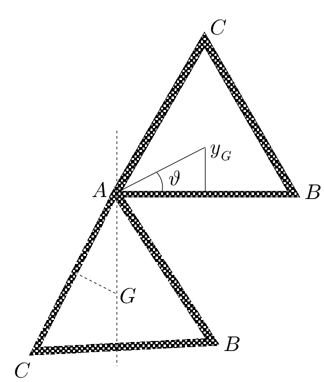
Tenuto conto della seconda delle (3), perché la trave non scivoli si deve avere:

$$|R_{Bx}| \leq \mu_s R_{By} = \mu_s mg.$$

Da cui:

$$\mu_s \geq \frac{|R_{Bx}|}{mg} = \frac{1}{2}\cot\theta, \quad \Rightarrow \quad \theta = 45^\circ.$$

3. Un triangolo equilatero ABC è formato da tre asticelle omogenee, di sezioni S uguali. I lati AC e BC sono costituiti da materiale di densità ρ; il lato AB ha densità $\rho_1 = 2\rho/3$. Inizialmente il triangolo è disposto col lato AB orizzontale e può ruotare attorno al vertice A. Determinare l'angolo di rotazione quando, lasciandolo libero, raggiunge la posizione di equilibrio.



Nella posizione di equilibrio stabile il baricentro del triangolo, soggetto alla gravità, è disposto sulla verticale. Per ragioni di simmetria il baricentro si trova sull'altezza relativa al lato AB; quindi, detta l la lunghezza del lato, la sua ascissa è

$$x_G = l\cos 60^\circ = \frac{l}{2}.$$

Dette m_1, m_2 ed m_3 le masse dei lati, l'ordinata è data da:

$$y_G = \frac{(m_1+m_2)(l/2)\sin 60^\circ}{m_1+m_2+m_3}.$$

Essendo,

$$m_1 = m_2 = lS\rho, \qquad m_3 = 2lS\rho/3,$$

si ottiene:

$$y_G = \frac{3}{8}l\sin 60^\circ = \frac{3}{8}\frac{\sqrt{3}}{2}\,l.$$

L'angolo θ formato dal segmento che unisce il baricentro col vertice A è dato da

$$\tan\theta = \frac{y_G}{l/2} = \frac{3}{8}\sqrt{3} = 0,65, \quad \Rightarrow \quad \theta = 33^\circ.$$

L'angolo di rotazione:

$$\varphi = 90^\circ + 33^\circ = 123^\circ.$$