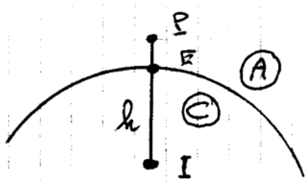
Problema N. 14

Il punto I in cui si genera un terremoto (ipocentro) è situato verticalmente, a profondità $h = 4\ \text{km}$, sotto il punto E (epicentro) situato sulla superficie terrestre. Da I vengono emesse onde elastiche (sismiche) longitudinali di frequenza $\nu = 25\ \text{Hz}$, che si propagano nella crosta terrestre con velocità di modulo $v_C = 3400\ \text{m/s}$. Queste onde, giungendo in superficie, determinano l'insorgere di onde sonore nell'atmosfera, ove si propagano con velocità di modulo uguale a $v_A = 340\ \text{m/s}$; in atmosfera, in un punto P vicino a E, esse vengono ricevute con un livello sonoro $\beta = 60\ \text{dB}$. Si assuma per la densità della crosta terrestre il valore $\rho_C = 5\ \text{g/cm}^3$ e per la densità dell'atmosfera il valore $\rho_A = 1{,}22 \cdot 10^{-3}\ \text{g/cm}^3$. Calcolare:

1) l'intensità I_P delle onde sonore in P;
2) l'ampiezza A_P delle onde sonore in P;
3) nel punto E, l'ampiezza A_E delle onde sismiche emesse dalla sorgente I;
4) la potenza W irradiata da tale sorgente I.

Soluzione



$h = 4$ km $\qquad \nu = 25$ Hz

$v_C = 3400$ m/s $\qquad v_A = 340$ m/s

$P \simeq E \qquad 60$ dB

$\rho_C = 5\ g/cm^3 = 5000\ kg/m^3 \qquad \rho_A = 1{,}22 \times 10^{-3}\ g/cm^3 = 1{,}22\ kg/m^3$

1) Dalla definizione di intensità del suono in dB

$$\boxed{\beta = I_{dB} = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}} \qquad \text{con } I_0 \cong 10^{-12}\ W/m^2$$

si ottiene, nel punto P (dove si hanno 60 dB):

$$10 \log_{10} \frac{I_P}{I_0} = 60 \qquad \log_{10} \frac{I_P}{10^{-12}} = 6 \qquad \frac{I_P}{10^{-12}} = 10^6$$

$$I_P = 10^{-6}\ W/m^2$$ (N.B.: nel caso di onde su una corda tesa I si misura in Watt)

2) Le onde sonore che arrivano in P hanno frequenza $\nu = 25$ Hz (come quella della sorgente in E, che deriva dalla sorgente di onde sismiche I). La relazione che lega ampiezza ed intensità di un'onda è, nel punto P:

$$I_P = \frac{1}{2} \rho_A A_P^2 \omega^2 v_A$$ (le onde sonore si stanno propagando nel mezzo A)

dove $\omega = 2\pi\nu$

Si ottiene pertanto $A_P = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2 I_P}{\rho_A v_A}}$

Sostituendo i dati numerici si ottiene:

$$A_P = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 25} \sqrt{\frac{2 \times 10^{-6}}{1{,}22 \times 340}} = 4{,}42 \times 10^{-7}\ m$$

3) Considerando in E una incidenza delle onde sismiche normale alla superficie terrestre, si può pensare che le onde sismiche siano le onde incidenti e quelle sonore (generate in E) le onde trasmesse rispetto alla superficie che separa i due mezzi (crosta terrestre ed aria)

Si ricordi che per l'intensità (media) si può scrivere:

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} Z_0 \omega^2 A^2 \quad \text{dove } Z_0 = \frac{Z}{S} = \rho v$$

è l'impedenza del mezzo per unità di superf.

Nel nostro caso: mezzo ① = crosta terrestre C

mezzo ② = atmosfera (aria) A

$$Z_C = \rho_c v_c \qquad Z_A = \rho_a v_a$$

In ① viaggiano le onde incidenti e riflesse

In ② viaggiano le onde trasmesse

Si ha

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_C}{Z_A} = \frac{\rho_c v_c}{\rho_a v_a} >> 1 \qquad \left(= \frac{5000 \times 3400}{1{,}22 \times 340} \right)$$

Pertanto, essendo $Z_1 >> Z_2$

$$A_{riflessa} \simeq A_{incidente} \qquad (A_{incidente} \equiv A_E)$$

$$A_{trasmessa} \simeq 2 A_{incidente} \qquad (A_{trasmessa} \equiv A_A \simeq A_P)$$

Quindi

$$A_E \simeq \frac{1}{2} A_P$$

e, numericamente

$$A_E \cong 2.21 \times 10^{-7} \ m$$

4) Si ricordi ora che l'intensità della sorgente rappresenta la potenza che attraversa l'unità di superficie. Pertanto la potenza della sorgente (supposta isotropa) W_I sarà data da:

$$W_I = I_E \, 4\pi h^2$$

essendo $4\pi h^2$ la superficie di una sfera con centro in I e raggio h.

Ma si ha:

$$I_E = \frac{1}{2} \rho_c A_E^2 \omega^2 v_c$$

cioè, numericamente:

$$I_E = \frac{1}{2} 5000 \times (2,21 \times 10^{-7})^2 \times (2\pi \times 25)^2 \times 3400 \simeq 1,02 \times 10^{-2} \ W/m^2$$

e quindi:

$$W_I = 1,02 \times 10^{-2} \times 4\pi \times 4000^2 = 2,06 \times 10^6 \ W$$