

Problema N. 2
Oscillazioni libere smorzate

Un condensatore avente capacità $C = 10 \mu\text{F}$ viene caricato mediante una batteria avente una f.e.m. = 1000 V. Successivamente il condensatore viene isolato e poi collegato in serie ad un induttore avente una induttanza $L = 1 \text{ mH}$ (vedi figura, in cui l'interruttore è aperto)

Si supponga ora che la resistenza ohmica complessiva presente nel circuito non sia trascurabile, ma abbia un valore $R = 18 \Omega$ (oppure $R = 0,1 \Omega$)

All'istante $t = 0$ si chiuda, istantaneamente, l'interruttore.

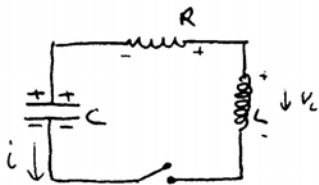
Si studi l'andamento della corrente in questo caso

$$\Sigma ddp = 0 \quad \text{oppure} \quad \Sigma ddp = \Sigma fem \Rightarrow Ri + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$$

$$-V_L + V_C + V_R = 0 \quad V_C = \frac{q}{C} \quad V_R = Ri \quad V_L = -L \frac{di}{dt}$$

$$+L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0 \quad \text{Ma } i = \frac{dq}{dt}$$

per cui si ottiene



(a) $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$ oscillatore armonico smorzato
equivalente a $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$

si ha la corrispondenza

$$L \rightarrow m$$

$$R \rightarrow \beta$$

$$\frac{1}{C} \rightarrow k$$

La soluzione è ottenuta dopo aver analizzato l'eq. algebrica caratteristica ed il suo discriminante Δ

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

N.B.:

L'equazione (a) è equivalente alla:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

che valeva, in meccanica, per l'oscillatore smorzato

1° caso $R = 18 \Omega$

Calcolo $\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}$ e trova $\Delta < 0$ la soluzione dell'eq. differenziale è allora

$$q(t) = Q_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{con } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

per trovare Q_1 e φ_1 uso le condizioni

al costante $q(0) = Q_I$

$i(0) = 0$

$$= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 4,36 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1,44 \times 10^{-3} \text{ s}$
pseudoperiodo

$\gamma = \frac{L}{R} = 5,56 \times 10^{-5} \text{ s}$
(γ è il tempo di decadimento)

$\gamma < T_1$ non si notano oscillazioni !!

$$\begin{cases} Q_1 \cos \varphi_1 = Q_I \\ -\frac{R}{2L} Q_1 \cos \varphi_1 - \omega_1 Q_1 \sin \varphi_1 = 0 \end{cases}$$

$\tan \varphi_1 = -\frac{R}{2L\omega_1} = -2,064 \Rightarrow \varphi_1 = -1,12 \text{ rad} \approx -64^\circ$

$\cos \varphi_1 = 0,436 \quad Q_1 = \frac{Q_I}{\cos \varphi_1} = 2,29 \times 10^{-2} \text{ Coulomb}$

$$q(t) = 2,29 \times 10^{-2} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_1 t - 1,12)$$

$$= 2,29 \times 10^{-2} e^{-3000t} \cos(4,36 \times 10^3 t - 1,12)$$

2° caso

Se fosse stato $R = 0,1 \Omega$ si avrebbe avuto $\gamma = 10^{-2} \text{ s}$

$\omega_1 = 9999,9 \text{ rad/s}$ ($< \omega_0$ ma circa = ω_0)

$T_1 \approx 6,28 \times 10^{-4} \text{ s}$

ed essendo $\gamma \gg T_1$ si sarebbero notate molte oscillazioni

Si avrebbe, usando le condizioni iniziali come fatto sopra:

$\tan \varphi_1 \approx -\frac{0,1}{20} \Rightarrow \varphi_1 \approx 0 \quad \cos \varphi_1 \approx 1 \rightarrow Q_1 = Q_I$

$q(t) = 10^{-2} e^{-50t} \cos 10^4 t$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 = 10^4 \text{ rad/s} \right.$$