Problema 26

Una sorgente ***S*** (puntiforme ed isotropa) emette un fascio di onde elettromagnetiche sferiche, monocromatiche di frequenza f, verso uno schermo ***A*** (distante h dalla sorgente ***S***) su cui si trovano due fenditure puntiformi ***M*** ed ***N***, identiche, simmetriche rispetto all'asse x, distanti d fra loro.
A distanza $D \gg d$ dallo schermo ***A*** si trova un secondo schermo ***B***, parallelo ad ***A***.
Si supponga che inizialmente la fenditura ***N*** sia "chiusa" (in modo che l'onda elettromagnetica proveniente da ***S*** non possa attraversarla).
L'intero sistema si trova immerso in un mezzo rifrangente, omogeneo e isotropo, avente permeabilità magnetica relativa μ_r e costante dielettrica relativa ϵ_r.
Nota l'ampiezza B_0 del campo magnetico dell'onda elettromagnetica subito dopo la fenditura ***M***, si determini:

1) L'ampiezza e l'intensità media dell'onda nel punto ***P*** dello schermo ***B***.

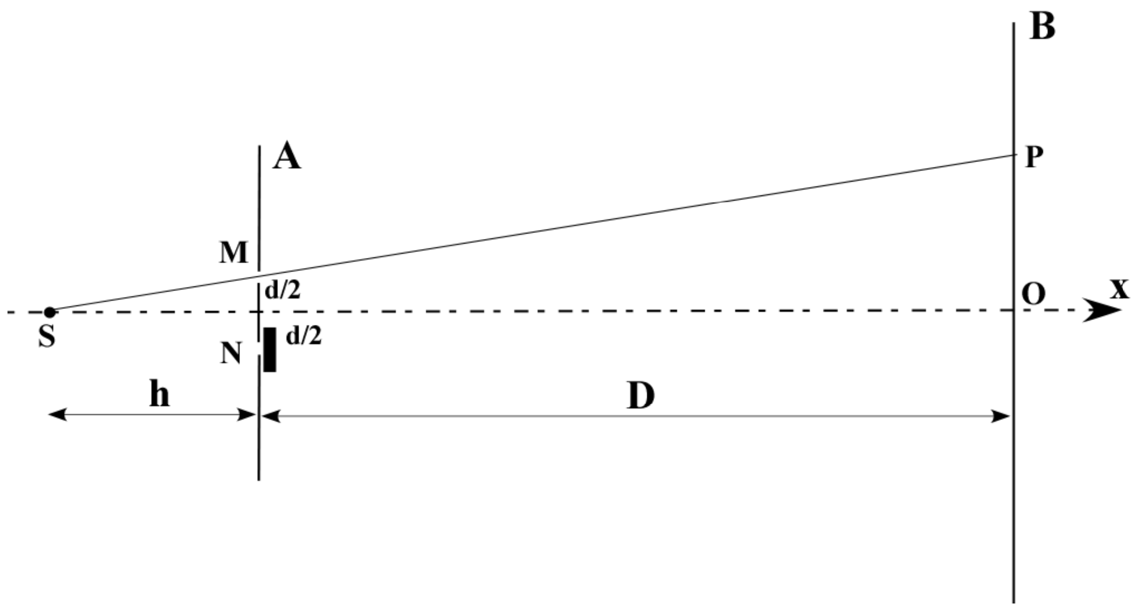
Si supponga ora di "aprire" anche la fenditura ***N***. In tale situazione, si determini:

2) La larghezza delle frange di interferenza sullo schermo ***B***;
3) Il rapporto tra le intensità dell'onda in ***P*** e in ***O***.

4) <u>Solo dopo aver risolto il problema (soluzione letterale</u>), si considerino i seguenti valori per la soluzione numerica relativamente alle domande 1 e 2 sopra indicate:

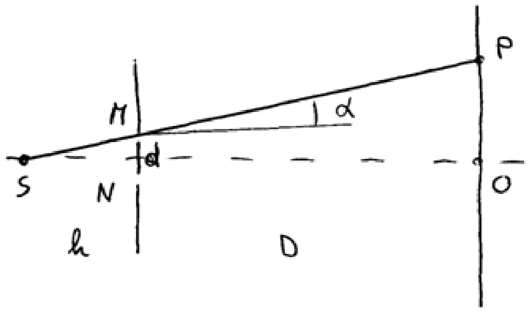
   $B_0 = 4 \cdot 10^{-13}$ Tesla; $h = 20$ cm; $d = 4$ mm; $D = 15$ m;

   $f = 6 \cdot 10^{14}$ Hz; $\mu_r = 1$; $\varepsilon_r = 1{,}44$; c velocità della luce nel vuoto $= 3 \cdot 10^8$ m/s



Soluzione

1)



$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\overline{MP} = \frac{D}{\cos\alpha} = \frac{D}{h}\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Poiché le onde secondarie generate in M (principio di Huygens) sono sferiche si ha che l'ampiezza varia come $\frac{1}{r}$. Si ha quindi

$$E_P = \frac{E_M}{\overline{MP}} = \frac{E_0}{\overline{MP}} = \frac{h}{D}E_0\frac{1}{\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

Nel nostro caso, poiché $E = vB \Rightarrow E_0 = vB_0 \Rightarrow E_0 = \frac{c}{n}B_0$

$$E_P = \frac{h}{D}\frac{c}{n}B_0\frac{1}{\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}} \qquad \text{con } n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

Inoltre $I_P = \left(\frac{1}{2}E_P^2\right)\Big/Z$ con $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\,Z_0$

2) Poiché $D \gg d$ si ha, per la larghezza delle frange di interferenza

$$\Delta s = \frac{D}{d}\lambda^* \qquad \text{con } \lambda^* = \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

Inoltre λ = lunghezza d'onda nel vuoto = $\frac{c}{f}$ per cui

$$\Delta s = \frac{D}{d}\frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

3) Se I_M è l'intensità dell'onda in M (ed in N) si ha

$I_0 = 4\langle I_M\rangle$ e $I_P = 4\langle I_M\rangle\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ per cui

$$\frac{I_P}{I_0} = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \qquad \text{dove } \delta = \frac{2\pi}{\lambda^*}d\sin\alpha = \frac{2\pi d}{\lambda^*}\sqrt{1-\frac{h^2}{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

$$\delta = \frac{2\pi d\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}{\lambda}\sqrt{1-\frac{h^2}{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{2\pi d f\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}{c}\sqrt{1-\frac{h^2}{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\pi d^2 f}{c}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\,\frac{1}{\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

4) Soluzione numerica

$$n = \sqrt{1.44} = 1.2 \qquad \cos\alpha = \frac{0.2}{\sqrt{0.2^2 + (2\times10^{-3})^2}} = 0.99995$$

$$\overline{HP} = 15.00075 \ m$$

$$E_P = \frac{0.2}{15} \times \frac{3\times10^8}{1.2} \times 4\times10^{-13} \times \frac{1}{\sqrt{0.2^2+(2\times10^{-3})^2}} \cong 6.666\times10^{-6} \ \frac{V}{m}$$

(ampiezza)

$$Z = \frac{Z_0}{\sqrt{1.44}} \simeq \frac{377}{1.2} \simeq 314 \ \Omega$$

$$I_P = \left[\frac{1}{2}\left(6.666\times10^{-6}\right)^2\right] \Big/ 314 \cong 7.075\times10^{-14} \ W/m^2$$

(intensità media)

$$\Delta s = \frac{15}{4\times10^{-3}} \frac{3\times10^8}{6\times10^{14}\sqrt{1.44}} \simeq 1.5625\times10^{-3} \ m$$

(larghezza frange)

$$\delta = \frac{\pi \times (4\times10^{-3})^2 \times 6\times10^{14} \times 1.2}{3\times10^8} \frac{1}{\sqrt{0.2^2+(2\times10^{-3})^2}} = 6.031556\times10^2$$

$$\frac{I_P}{I_0} \simeq \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \simeq 0.274$$