Problema 27
(scritto onde 10 Settembre 2008)

Un corpo di massa $m = 0,5\ \mathrm{g}$, collegato ad una molla ideale, oscilla nel vuoto con pulsazione ω_0.
All'istante $t_0 = 0$ il sistema viene immerso in un fluido viscoso: il moto dell'oscillatore diviene armonico smorzato, con pseudo periodo $T_1 = 125,66\ \mathrm{ms}$.
Sapendo che le ampiezze dell'oscillazione agli istanti t_0 e $t_1 = 10\ \mathrm{ms}$ valgono, rispettivamente, $A_0 = 2\ \mathrm{cm}$ e $A_1 = 1\ \mathrm{cm}$, determinare:

1) Il tempo di decadimento dell'oscillatore smorzato.
2) La pulsazione ω_0 dell'oscillatore ideale.
3) L'istante t^* nel quale l'energia meccanica dell'oscillatore è diventata un centesimo di quella posseduta all'istante iniziale.
4) Il valore della potenza istantanea per $t = t^*$.

Solo dopo aver risposto alle domande precedenti determinare:

5) L'energia meccanica dissipata tra $t = t_0$ e $t = t^*$.

Traccia della soluzione

1) Si ha $A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}$ dove $A_0 \equiv A(t=0)$

$$A(t_1) = A_0 e^{-\frac{10^{-2}}{2\tau}} = \frac{A_0}{2} \Longrightarrow \tau = 7{,}21 \text{ ms}$$

2) Dalla relazione $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ si ottiene $\omega_1 = 50$ rad/s

quindi $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{1}{4\tau^2}} \cong 85{,}5$ rad/s

3) Per l'energia meccanica posso scrivere

$$E(t) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$E(t^*) = \cancel{\frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2}\, e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{1}{100}\left[\cancel{\frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2}\right]$$

da cui $e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{1}{100} \Longrightarrow t^* \simeq 33{,}2$ ms

4) Per la potenza ho $W(t) = \frac{d}{dt} E(t) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau}\right)$

Quindi

$$|W(t^*)| = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t^*}{\tau}} \cong 3{,}47 \times 10^{-4} \text{ W}$$

5) Molto banalmente, si ha $E(t_0) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2$

$$E(t^*) = \frac{1}{100} E(t_0)$$

Quindi l'energia dissipata tra t_0 e t^* vale

$$E_{diss.} = \frac{99}{100} \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 \simeq 2{,}475 \times 10^{-4} \text{ J}$$