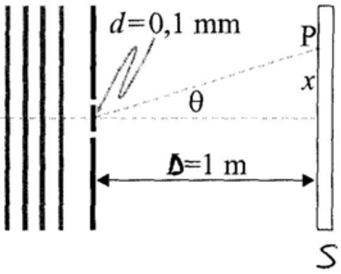
## Problema N. 18




Un'onda piana, uniforme, monocromatica, di lunghezza d'onda $\lambda_1$, incide perpendicolarmente su una superficie piana opaca, nella quale sono presenti due fenditure rettangolari, uguali e parallele, distanti fra loro $d = 0{,}1$ mm. Parallelamente a questa superficie, a distanza $D = 1$ m, si trova uno schermo, sul quale si misura la distribuzione dell'intensità luminosa (media temporale).

**Sostituendo** tale onda con una identica, ma di lunghezza d'onda $\lambda_2$, la distribuzione dell'intensità sullo schermo cambia, in modo che:

- il massimo di ordine 2 della prima distribuzione coincide col minimo di ordine 2 della seconda;
- i massimi di ordine 9 della prima e di ordine 8 della seconda distano $\Delta x = 1{,}625$ cm.

Si assuma che: l'esperimento è eseguito nel vuoto, è soddisfatta la condizione $D \gg d$, si trascura completamente ogni fenomeno di diffrazione.

1 ) Calcolare i valori delle due lunghezze d'onda, $\lambda_1$ e $\lambda_2$.

Nel caso della seconda onda $(\lambda_2)$, nel punto P dello schermo, corrispondente a $\sin\theta = 3 \cdot 10^{-3}$, si misura una intensità (media temporale) $\langle I \rangle = 10^{-4}$ W/m$^2$.

2 ) Calcolare l'ampiezza dell'onda emessa da ciascuna fenditura.

## Soluzione

1)

Sullo schermo S si producono frange di interferenza prodotte dall'incontro tra le onde prodotte dalle due sorgenti coerenti originate dalle due fenditure. In un punto generico P le due onde che interferiscono hanno una differenza di fase dovuta al diverso cammino "ottico" percorso. Tale punto sarà sede di un massimo se $d \sin\theta = n\lambda$ (con $\sin\theta \simeq \frac{x}{D}$)

max) $x_p = n \frac{D}{d} \lambda \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

oppure di un minimo se $d \sin\theta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

$\lambda$ è la lunghezza d'onda delle due sorgenti coerenti (monocromatiche)

min) $x_p = (2n+1)\frac{D}{2d}\lambda$

Per valori di x diversi si avranno intensità intermedie.

Se le due sorgenti coerenti hanno $\lambda = \lambda_1$ in $x \equiv x_{p*}$ si ha il max di ordine 2 (cioè $n = 2$)

$$x_{p*} = 2 \frac{D}{d} \lambda_1$$

Se invece $\lambda = \lambda_2$ in $x_{p*}$ si ha il minimo di ordine 2, cioè

$$x_{p*} = (2 \times 2 + 1) \frac{D}{2d} \lambda_2$$

Quindi $\boxed{2 \frac{D}{d}\lambda_1 = \frac{5}{2}\frac{D}{d}\lambda_2}$ (a)

Inoltre $x_{max=9}(\lambda_1) - x_{max=8}(\lambda_2) = \Delta x$

cioè: $\boxed{9 \frac{D}{d}\lambda_1 - 8 \frac{D}{d}\lambda_2 = \Delta x}$ (b)

$$\begin{cases} (a) \\ (b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = \frac{5}{2}\lambda_2 \\ 9 \frac{D}{d}\lambda_1 - 8\frac{D}{d}\lambda_2 = 1{,}625 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova

$\lambda_1 = 6{,}25 \times 10^{-5}$ m

$\lambda_2 = 5 \times 10^{-5}$ m

2) Nel punto P per il quale $\sin\theta = 3\times10^{-3}$ si ha, se le due sorgenti coerenti hanno $\lambda = \lambda_2$, una intensità media $\langle I \rangle = 10^{-4}\ W/m^2$

Nel caso in esame (onde piane uniformi; stessa polarizzazione e pulsazione, e coerenti) si ha

$$\langle I \rangle = \frac{A^2}{2Z} = 2\langle I_1 \rangle (1+\cos\delta) \qquad (\text{questo se } A_1 = A_2)$$

dove $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$ e $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

Se la propagazione è nel vuoto $Z \equiv Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

Si ha $\langle I \rangle = 2\langle I_1 \rangle (1+\cos\delta) = 2\,\frac{A_1^2}{2Z_0}(1+\cos\delta)$

quindi

$$A_1 = \sqrt{\frac{Z_0 \langle I \rangle}{1+\cos\delta}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{1,26\times10^{-6}}{8,85\times10^{-12}}} \simeq 377,32\ \Omega$$

$$\cos\delta = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} d \sin\theta\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5\times10^{-5}} \times 1\times10^{-4} \times 3\times10^{-3}\right) = 0,9993$$

Si ottiene quindi $A_1 = 0,137$