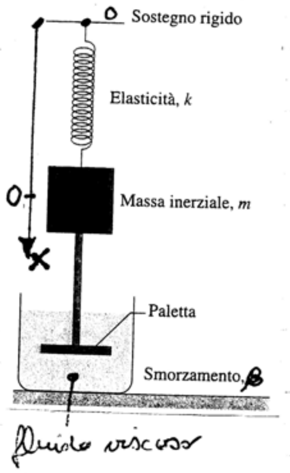
Problema N. 4

Oscillazioni libere non forzate e Oscillazioni libere smorzate

Si abbia un oscillatore armonico semplice (come in figura), per il quale si hanno i seguenti valori: $m = 250\,g$ e K = costante elastica della molla (supposta ideale) $= 85\ N/m$, la paletta, di massa trascurabile si muove, in un primo caso (a) in aria e in un secondo caso (b) in un fluido viscoso avente un coefficiente di smorzamento β costante $= 70\,g/s$.



Assumendo trascurabile la massa della paletta e la resistenza viscosa dell'aria si consideri un asse verticale (come in figura) e si supponga che per $t = 0$ si abbiano, in entrambi i casi (a) e (b):

$$x(0) = x_{max} = 0{,}05\,m \qquad \dot{x}(0) = v_x(0) = 0$$

(Si trascuri l'effetto gravitazionale)

1) Si scrivano le equazioni del moto nei due diversi casi (a) e (b)

2) Si discuta numericamente il comportamento dell'energia meccanica nei due casi verificando che nel caso b) la potenza meccanica dissipata $\frac{dE_M}{dt}$ è la potenza dissipata dalla forza di attrito viscoso

3) Nel caso b, si determini il tempo di decadimento dell'oscillatore, lo pseudoperiodo, di quanto varia l'ampiezza dopo uno pseudoperiodo e di quanto decresce l'energia media da uno pseudoperiodo all'altro

a)

$\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad F_x = m a_x = m\ddot{x} = -Kx \quad$ ◇ $\quad m\ddot{x} + Kx = 0 \quad \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 18,439\ s^{-1} \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0,341\ s$

Trovo le due costanti A_0 e φ_0 usando le condizioni iniziali

$x(0) = x_m = A_0 \cos\varphi_0$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \dot{x}(0) = 0 = -\omega_0 A_0 \sin\varphi_0 \Rightarrow \sin\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$

$\Downarrow$

◇ equazione differenziale dell'oscillatore armonico semplice (lineare)

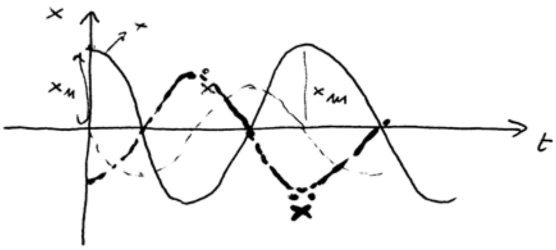
$\cos\varphi_0 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

$x_m = A_0$
oppure
$x_m = -A_0$

poiché $x_m > 0$ la soluzione accettabile è la 1ª

Si ha allora $\begin{cases} A_0 = x_m & (A_0 \text{ è l'ampiezza}) \\ \varphi_0 = 0 & (\varphi_0 \text{ è la fase iniziale}) \end{cases}$

L'eq. del moto è allora $\quad x(t) = x_m \cos\sqrt{\frac{K}{m}}\ t \equiv x_m \cos\omega_0 t$



si ha poi

$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_m \sin\omega_0 t$

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x_m \cos\omega_0 t = -\omega_0^2 x(t)$

$\boxed{x(t) = 0,05 \cos 18,439\, t}$

$\dot{x}(t) = -0,922 \sin 18,439\, t$

$\ddot{x}(t) = -17 \cos 18,439\, t$

Per quanto riguarda l'energia:

$E_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2} m \frac{K}{m} x_m^2 \sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2} K x_m^2 \sin^2\omega_0 t$

$E_P = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K x_m^2 \cos^2\omega_0 t$

$E_M = E_K + E_P = \frac{1}{2} K x_m^2 (\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t) = \frac{1}{2} K x_m^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2$

Nel nostro caso $\quad E_M = \frac{1}{2} \times 85 \times 0,05^2 = 0,10625\ J$

Si vede chiaramente che E_M = costante

Ovviamente si vede anche che E_M è proporzionale al quadrato dell'ampiezza

b) $\bar{F} = m\bar{a}$ $\qquad F_x = ma_x = m\ddot{x} = -Kx - \beta\dot{x}$ $\qquad$ poiché $F_e = -Kx$, $F_v = -\beta v$

$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = 0$ ◇◇ $\qquad$ dove $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $x = x(t)$

Per risolvere l'eq. differenziale del II° ordine (oscillatore armonico smorzato) ◇◇
scrivo l'eq. algebrica caratteristica

$$m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4km}}{2m} = \frac{-\beta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \left(\frac{k}{m} \to \omega_0^2\right) = \alpha + i\gamma$$

$\Delta = \beta^2 - 4Km$ $\qquad \Delta \begin{cases} <0 & \text{sottocritico} \\ =0 & \text{critico} \\ >0 & \text{supercritico} \end{cases}$ $\qquad$ solo se $\Delta < 0$ si hanno oscillazioni (smorzate)

Nel caso in questione $\Delta = (7 \times 10^{-2})^2 - 4 \times 0{,}25 \times 85 < 0$ ||| smorzamento piccolo o debole (caso sottocritico)

La soluzione generale della ◇◇ è:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{\alpha t} e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\alpha t} e^{-\omega_1 t} = A(t)\cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

dove $A(t) = A_0 e^{-\frac{\beta}{2m} t}$ (ampiezza che diminuisce nel tempo: moto non periodico)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} \implies \omega_1 < \omega_0$$

$T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ è detto pseudoperiodo (perché $\omega_1 \simeq \omega_0$)

Riassumendo, l'equazione del moto è $\qquad \omega_1 = \sqrt{\dfrac{85}{0{,}25} - \left(\dfrac{7 \times 10^{-2}}{0{,}5}\right)^2} = 18{,}4386 \ \dfrac{rad}{s}$

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{\beta}{2m} t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

Rimangono da determinare le due costanti A_0 e φ_0 (usando le condizioni iniziali)

Trovo $\dot{x}(t) = -\dfrac{\beta}{2m} A_0 e^{-\frac{\beta}{2m} t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - A_0 \omega_1 e^{-\frac{\beta}{2m} t} \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$

$$\begin{cases} x(0) = x_{Max} = A_0 \cos\varphi_0 \\ \dot{x}(0) = 0 = -\dfrac{\beta}{2m} A_0 \cos\varphi_0 - A_0 \omega_1 \sin\varphi_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 \cos\varphi_0 = x_M \\ \dfrac{\beta}{2m}\cos\varphi_0 + \omega_1 \sin\varphi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 \cos\varphi_0 = x_M \\ \mathrm{tg}\,\varphi_0 = -\dfrac{\beta}{2\omega_1 m} \approx -7{,}6 \times 10^{-3} \implies \varphi_0 \simeq -0{,}4° \simeq 0 \implies \cos\varphi_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 = x_M \\ \varphi_0 \simeq 0 \end{cases}$$

L'equazione del moto è quindi

$$x(t) \simeq x_M \, e^{-\frac{\beta}{2m}t} \cos \omega_1 t = \boxed{0{,}05 \, e^{-0{,}14 t} \cos 18{,}486 \, t}$$

Si può mostrare che nel caso dell'oscillatore smorzato $E_M \neq \text{cost}$
È facile vedere che la variazione nel tempo dell'energia meccanica $\left(\frac{dE_M}{dt}\right)$ è pari alla potenza dissipata dalla forza di attrito viscoso.
Infatti

$$E_M = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

$$\frac{dE_M}{dt} = m v \frac{dv}{dt} + K x \frac{dx}{dt} = m v a + K x v = v (m a + K x)$$

Ma $\quad m a = -Kx + \beta v \implies m a + K x = -\beta v$ Pertanto

$$\frac{dE_M}{dt} = (-\beta v) v = F_v v = \text{Pot. dissipata da } F_v$$

Chiaramente, se β è piccolo $\frac{dE_M}{dt} \to 0$. Si può cioè dire che per smorzamenti sufficientemente piccoli l'ampiezza diminuisce ma lentamente, così come l'energia meccanica.
In uno pseudoperiodo si può ritenere $A(t) \simeq$ costante e si può dire che $\langle E_M \rangle = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A^2$. In realtà nel successivo pseudoperiodo A è diminuito $\implies$ anche E_M diminuisce.

---

3) • Tempo di decadimento $\tau = \frac{m}{\beta} = 3{,}57 \text{ s}$
• Pseudoperiodo $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \simeq 0{,}34 \text{ s}$

$\Big\}$ Poiché $\tau > T_1$ si hanno varie oscillazioni

• Si ha $A(0) = A_0$ e $A(0+T) = A_0 \, e^{-\frac{\beta}{2m}T_1} = A_0 \times 0{,}9535$

• $\langle E_M(0) \rangle = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 \qquad \langle E_M(0) \rangle = 0{,}1062 \text{ J}$

$\langle E_M(T_1) \rangle \; \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 \, e^{-\frac{\beta}{m}T_1} \simeq \langle E_M(0) \rangle * 0{,}909 = 0{,}097 \text{ J}$