

Problema N. 6
Esempio prova di esame

Un oscillatore armonico meccanico ideale è composto da un corpo di massa $m = 1$ g collegato a una molla ideale (massa e attriti interni trascurabili) e nel vuoto vibra con pulsazione $\omega_0 = 100$ rad/s .

Il moto dello stesso oscillatore, immerso in un fluido viscoso, risulta armonico smorzato sottocritico, con pulsazione $\omega_1 = 60$ rad/s .

Assumendo che all'istante $t_0 = 0$ s l'ampiezza dell'oscillazione sia $A_0 = 1$ cm, analizzando il moto smorzato, calcolare:

- 1) il tempo caratteristico τ dell'oscillatore;
- 2) l'istante t_1 in cui l'ampiezza è $A_1 = 0,5$ cm ;
- 3) l'istante t_2 in cui l'energia meccanica totale risulta la metà di quella posseduta all'istante t_0 ;
- 4) il modulo della potenza istantanea dissipata all'istante $t_3 = \tau$.

Traccia della soluzione

1.

$$\text{Da } \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}$$

Segue

$$\frac{1}{4\tau^2} = \omega_0^2 - \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{9}{25}\omega_0^2 = \frac{16}{25}\omega_0^2$$

$$4\tau^2 = \frac{25}{16} \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \tau^2 = \frac{25}{64} \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \tau = \frac{5}{8} \frac{1}{\omega_0} = \frac{5}{800} \text{ s} = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

2.

$$\text{Da } A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

si ha

$$\frac{1}{2} A_0 = A_0 e^{-\frac{t_1}{2\tau}} \Rightarrow e^{-\frac{t_1}{2\tau}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t_1}{2\tau} = \ln 2 \Rightarrow t_1 = 2\tau \ln 2 \cong 8,66 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

3.

$$\text{Da } E(t) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

si ha

$$\frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 e^{-\frac{t_2}{\tau}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2$$

$$e^{-\frac{t_2}{\tau}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t_2}{\tau} = \ln 2 \Rightarrow t_2 = \tau \ln 2 = \frac{1}{2} t_1 \cong 4,33 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

4.

La potenza istantanea è data dalla derivata dell'energia rispetto al tempo.

$$W(t) = \frac{d}{dt} E(t) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$|W(\tau)| = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 \frac{1}{e \tau} = \frac{1}{2} 10^{-3} \cdot 3,6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} \frac{1}{6,25 \cdot 10^{-3} e} \text{ W} = 1,06 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$