Problema n. 1

a) Assumendo che la densità dell'aria alla temperatura t_o = 0 °C e alla pressione p_o = 1 atm sia di 1.3 g/l, determinare quanti grammi di aria sono contenuti in un litro alla temperatura t = 27 °C ed alla pressione p = 0.8 atm. Si consideri l'aria come un gas perfetto.

b) Si supponga ora che tale aria compia una trasformazione (espansione) secondo le due seguenti leggi:

   b1) $pV^2 = \text{cost}$

   b2) $p^2V = \text{cost}$

   Determinare, per ciascuna delle due possibili espansioni, se la temperatura dell'aria aumenta o diminuisce.

Soluzione

a) Scriviamo l'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT$.

Ma $n = \frac{m}{M}$ per cui $pV = \frac{m}{M} RT$ ed anche $p_o V_o = \frac{m_o}{M} RT_o$. Da queste due relazioni, dividendo membro a membro, si ottiene: $\frac{pV}{p_o V_o} = \frac{m}{m_o}\frac{T}{T_o}$ da cui $m = \frac{pVT_o m_o}{p_o V_o T}$.

Poiché la densità dell'aria $\rho_o = \frac{m_o}{V_o}$ vale 1.3 g/l, T_o = 273.13 K, T = 300.15 K, si ottiene:

$$m = \frac{0.8 \times 1 \times 273.15}{1 \times 300.15} \times 1.3 = 0.946 \text{ g}$$

b) Si ha sempre $pV = nRT = \frac{m}{M} RT$. Differenziando questa relazione si ottiene:

$$pdV + Vdp = \frac{m}{M} RdT$$

b1) Se la trasformazione segue la legge pV^2 = cost avrò, differenziando:

V^2 dp+2p V dV = 0 ➔ V dp+2p dV = 0

Per rispondere alla domanda dobbiamo mettere in relazione dT con dV.

Dalla relazione precedente si ottiene V dp = - 2p dV e riprendendo l'equazione di stato differenziata $pdV - 2pdV = \frac{m}{M} RdT$ si ottiene $-pdV = \frac{m}{M} RdT$ cioè:

$dT = -\left(\frac{M}{m}\frac{p}{R}\right) dV$. Chiaramente, se dV > 0 ➔ dT < 0.

b2) Analogamente, se la trasformazione segue la legge p^2V = cost avrò, differenziando:

p^2 dV+2p V dp = 0 ➔ $Vdp = -\frac{1}{2} pdV$

Riprendendo l'equazione di stato differenziata si ottiene $pdV - \frac{1}{2} pdV = \frac{m}{M} RdT$ da cui:

$\frac{1}{2} pdV = \frac{m}{M} RdT$ e quindi $dT = \left(\frac{M}{m}\frac{p}{2R}\right) dV$.

Chiaramente, se dV > 0 ➔ dT > 0