

Problema n. 17

Una massa $m = 16 \text{ g}$ di ossigeno (massa molare $\text{O}_2 = 32 \text{ g}$), considerato come un gas ideale biatomico, compie un ciclo termodinamico ABCDA costituito dalle seguenti trasformazioni:

AB) isobara reversibile (con $V_A = 5 \text{ litri}$, $p_A = 2 \text{ atm}$, $V_B = 2V_A$);

BC) adiabatica (con $V_C = 3.5 V_A$, $p_C = 1 \text{ atm}$);

CD) isobara reversibile (con $V_D = V_A$);

DA) isocora irreversibile, realizzata ponendo il sistema in contatto termico con un serbatoio avente la temperatura del gas nello stato A.

Determinare:

- 1) se la trasformazione BC è reversibile o no, giustificando la risposta.

Dopo aver disegnato qualitativamente, nel piano pV, il ciclo termodinamico compiuto dal sistema si determini:

- 2) il lavoro fatto dal sistema per ogni ciclo;
- 3) il rendimento del ciclo;
- 4) la variazione di entropia dell'universo per ogni ciclo.

Soluzione

Si ha $m = 16 \text{ g}$ $p.m. O_2 = 32 \text{ g}$ $\Rightarrow n_{O_2} = \frac{16}{32} = 0,5 \text{ moli}$

$$c_v = \frac{5}{2} R \quad c_p = \frac{7}{2} R \quad \gamma = \frac{7}{5} = 1,4 \quad R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}} \quad (R = 0,082 \frac{\text{L atm}}{\text{mole} \cdot \text{K}})$$

1) Per trovare se BC è reversibile o no posso seguire due strade

1a) $(\Delta S_u)_{BC} = 0 \Rightarrow BC \text{ reversibile} \quad (\Delta S_u)_{BC} \neq 0 \Rightarrow BC \text{ irrevers.}$

1b) $p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma \Rightarrow BC \text{ reversibile} \quad p_B V_B^\gamma \neq p_C V_C^\gamma \Rightarrow BC \text{ irrevers.}$

1a) $(\Delta S_u)_{BC} = (\Delta S_{\text{gas}})_{BC} + \cancel{(\Delta S_{\text{amb}})_{BC}}$
adiabatiche

$$(\Delta S_{\text{gas}})_{BC} = n c_v \ln \frac{T_C}{T_B} + n R \ln \frac{V_C}{V_B}$$

Si ha $T_A = \frac{p_A V_A}{n R} = \frac{2 \times 5}{0,5 R} = \frac{20}{R} \approx 243,9 \text{ K}$

$$T_D = \frac{p_D V_D}{n R} = \frac{1 \times 5}{0,5 R} = \frac{10}{R} \approx 122 \text{ K}$$

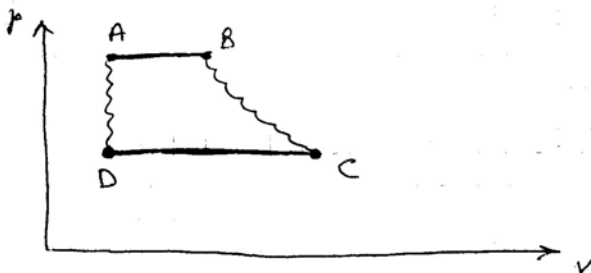
Inoltre $V_B = 2 V_A = 10 \text{ l} \quad p_B = p_A = 2 \text{ atm} \quad T_B = \frac{2 \times 10}{0,5 R} = \frac{40}{R} \approx 487,8 \text{ K}$

$$V_C = 3,5 V_A = 17,5 \text{ l} \quad p_C = \frac{1}{2} p_A = 1 \text{ atm} \quad T_C = \frac{1 \times 17,5}{0,5 R} = \frac{35}{R} \approx 426,8 \text{ K}$$

$$(\Delta S_{\text{gas}})_{BC} = 0,5 \times \frac{5}{2} R \ln \frac{426,8}{487,8} + 0,5 R \ln \frac{17,5}{10} \approx 0,94 \frac{\text{J}}{\text{K}} \neq 0$$

$\Rightarrow BC \text{ non è reversibile}$

1b) $p_B V_B^\gamma = 2 \times 10^{1,4} \approx 50,24$
 $p_C V_C^\gamma = 1 \times 17,5^{1,4} \approx 55$
 $p_B V_B^\gamma \neq p_C V_C^\gamma \Rightarrow BC \text{ non è revers.}$



2) Lavoro del ciclo

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + \cancel{L_{DA}}_{\text{isocora}}$$

$$L_{AB} = p_A (V_B - V_A) = 2 (10 - 5) = 10 \text{ l} \times \text{atm}$$

$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = -m c_V (T_C - T_B) = -0,5 \times \frac{5}{2} R \left(\frac{35}{R} - \frac{40}{R} \right) = 6,25 \text{ l} \times \text{atm}$$

$$L_{CD} = p_C (V_D - V_C) = 1 (5 - 17,5) = -12,5 \text{ l} \times \text{atm}$$

$$L_{tot} = 3,75 \text{ l} \times \text{atm}$$

3) Rendimento del ciclo $\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass.}} = 1 - \frac{|Q_{ceduto}|}{Q_{ass.}}$

$$Q_{AB} = m c_p (T_B - T_A) = \frac{1}{2} \frac{7}{2} R \left(\frac{40}{R} - \frac{20}{R} \right) = 35 \text{ l} \times \text{atm} (> 0)$$

$$Q_{BC} = 0 ; Q_{CD} = m c_p (T_D - T_C) = \frac{1}{2} \frac{7}{2} R \left(\frac{10}{R} - \frac{35}{R} \right) = -43,75 \text{ l} \times \text{atm} (< 0)$$

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = m c_V (T_A - T_D) = \frac{1}{2} \frac{5}{2} R \left(\frac{20}{R} - \frac{10}{R} \right) = 12,5 \text{ l} \times \text{atm} (> 0)$$

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass.}} = \frac{3,75}{35 + 12,5} \approx 0,079 = 7,9\%$$

4) $(\Delta S_U)_{ciclo} = \cancel{(\Delta S_U)_{AB}} + (\Delta S_U)_{BC} + \cancel{(\Delta S_U)_{CD}} + (\Delta S_U)_{DA}$
reversibili

$$(\Delta S_U)_{BC} = (\Delta S_{gas})_{BC} \approx 0,94 \text{ J/K}$$

$$(\Delta S_U)_{DA} = (\Delta S_{gas})_{DA} + (\Delta S_{amb})_{DA}$$

$$(\Delta S_{gas})_{DA} = m c_V \ln \frac{T_A}{T_D} + \cancel{m R \ln \frac{V_A}{V_D}}_{\text{isocora}} = \frac{1}{2} \frac{5}{2} R \ln \frac{20}{10} \approx 0,866 R = 7,2 \text{ J/K}$$

$$(\Delta S_{amb})_{DA} \equiv (\Delta S_{serbatoio})_{DA} = \frac{(Q_{serb.})_{DA}}{T_{serb.}} = \frac{-(Q_{gas})_{DA}}{T_{serb.}} = \frac{-12,5}{\frac{20}{R}} \approx -5,19 \text{ J/K}$$

$$(\Delta S_U)_{DA} \approx 2,01 \text{ J/K}$$

Quindi $(\Delta S_U)_{ciclo} = 0,94 + 2,01 = 2,95 \text{ J/K}$