

Problema N° 21

Due moli di gas perfetto monoatomico compiono il ciclo ABCA costituito dalle seguenti trasformazioni :

AB) espansione **reversibile** di equazione $p=V^2$ (p =pressione, in atmosfere ; V =volume, in litri), dallo stato A di volume $V_A=1 \ell$ allo stato B di volume $V_B=4 \ell$

BC) isocora **irreversibile** , fino allo stato C, con $p_C=p_A$;

CA isobara **reversibile**.

La variazione di entropia dell'Universo ad ogni ciclo vale $\Delta S_U=0,8 \ell \text{atm}/K$.

Calcolare:

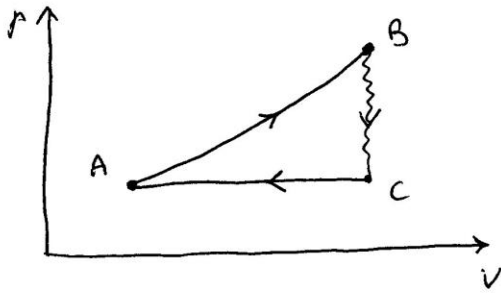
- 1) Il calore Q_{AB} scambiato dal gas nella trasformazione AB;
- 2) Il rendimento del ciclo;
- 3) La variazione di entropia dell'ambiente nell'isocora BC.

Risposte

- 1) $Q_{AB}=115,5 \ell \text{ x .atm}$
- 2) $\eta=15,6 \%$
- 3) $(\Delta S_{\text{amb}})_{BC}=1.48 \ell \text{ x .atm}$

Soluzione

Disegno, qualitativamente, il ciclo termodinamico



$$V_A = 1 \text{ l} ; V_B = 4 \text{ l}$$

$$n = 2 \text{ (monoatomic)}$$

$$\Delta S_0 = 0,5 \text{ (lxatm)/K}$$

1) Si ha $pV = nRT$ (perché gas ideale) e $p = V^{-2}$ per la AB.
In particolare avrà:

$$p_A V_A = 2RT_A$$

$$p_A = V_A^{-2} \Rightarrow p_A = 1 \text{ atm}$$

$$T_A = \frac{p_A V_A}{2R} = \frac{1}{2R}$$

$$p_B V_B = 2RT_B$$

$$p_B = V_B^{-2} \Rightarrow p_B = 16 \text{ atm}$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{2R} = \frac{32}{R}$$

$$p_C = p_A = 1 \text{ atm} \quad V_C = V_B = 4 \text{ l} \quad T_C = \frac{p_C V_C}{2R} = \frac{2}{R}$$

$$L_{AB} = \int_A^B p dV = \int_A^B V^{-2} dV = \frac{1}{3} [V^{-3}]_{V_A}^{V_B} = \frac{1}{3} (64 - 1) = \frac{63}{3} \text{ lxatm}$$

$$\Delta U_{AB} = n c_V \Delta T = 2 \cdot \frac{3}{2} R (T_B - T_A) = 3R \left(\frac{32}{R} - \frac{1}{2R} \right) = \frac{189}{2} \text{ lxatm}$$

$$Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB} = 115,5 \text{ lxatm} \quad (> 0 \Rightarrow \text{calore che il gas assorbe})$$

$$2) L_{BC} = 0 ; L_{CA} = \int_C^A p dV = p_A (V_A - V_C) = -3 \text{ lxatm}$$

$$L_{\text{totale ciclo}} = \frac{63}{3} - 3 = \frac{54}{3} \text{ lxatm}$$

$$\Delta U_{BC} = n c_V (T_C - T_B) = 2 \cdot \frac{3}{2} R \left(\frac{2}{R} - \frac{32}{R} \right) = -90 \text{ lxatm}$$

$$Q_{BC} = L_{BC} + \Delta U_{BC} = -90 \text{ lxatm} \quad (\text{calore ceduto dal gas})$$

$$\Delta U_{CA} = n c_V (T_A - T_C) = 2 \cdot \frac{3}{2} R \left(\frac{1}{2R} - \frac{2}{R} \right) = -\frac{9}{2} \text{ lxatm}$$

$$Q_{CA} = L_{CA} + \Delta U_{CA} = -3 - \frac{9}{2} = -\frac{15}{2} \text{ lxatm} \quad (\text{calore ceduto dal gas})$$

$$\eta = \frac{L_{\text{totale}}}{Q_{\text{assorbito}}} = \frac{54/3}{115,5} \approx 0,156 = 15,6\%$$

$$3) \quad \Delta S_{U_{ciclo}} = \cancel{\Delta S_U^{AB}} + \Delta S_U^{BC} + \cancel{\Delta S_U^{CA}} = \Delta S_U^{BC}$$

(perchè le AB e CA sono reversibili $\Rightarrow \Delta S_U = 0$ per esse)

$$\Delta S_U^{BC} = \Delta S_{gas}^{BC} + \Delta S_{amb.}^{BC}$$

$$\Delta S_{gas}^{BC} = m c_V \ln \frac{T_C}{T_B} + m R \ln \frac{V_C}{V_B} \quad (V_B = V_C)$$

$$= 2 \frac{3}{2} R \ln \frac{\frac{2}{R}}{\frac{32}{R}} = 3R \ln \frac{1}{16} = -0,683 \frac{\text{lx atm}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{amb.}^{BC} = \Delta S_U - \Delta S_{gas}^{BC} = 0,8 - (-0,683) \approx 1,48 \frac{\text{lx atm}}{\text{K}}$$