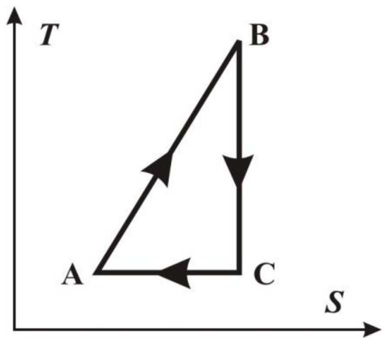
Problema N° 26

Una mole di gas perfetto monoatomico compie il ciclo reversibile A-B-C-A rappresentato in figura nel piano S-T. Sono noti:



- il volume (V_A) e la temperatura (T_A) dello stato A;
- la temperatura ($T_B = 4T_A$) dello stato B;
- la differenza di entropia fra gli stati B e A, $S_B - S_A = R\ln 2$.

Calcolare:

1. il volume V_B dello stato B;
2. il volume V_C dello stato C;
3. il rendimento η del ciclo.

Soluzione

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B \frac{c_v\, dT + p\, dV}{T} = c_v \int_A^B \frac{dT}{T} + R \int_A^B \frac{dV}{V} =$$

$$= c_v \ln \frac{T_B}{T_A} + R \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\cancel{R} \ln 2 = \frac{3}{2}\cancel{R} \ln 4 + \cancel{R} \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\ln 2 = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \ln 2 + \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$-2 \ln 2 = \ln \frac{V_B}{V_A} \quad ; \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \boxed{V_B = \frac{V_A}{4}}$$

2) $T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$

$$V_C = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_B \qquad \frac{1}{\gamma-1} = \frac{1}{\frac{5}{3}-1} = \frac{3}{2}$$

$$V_C = \left(\frac{4\cancel{T_A}}{\cancel{T_A}}\right)^{3/2} \frac{V_A}{4} \quad ; \quad \boxed{V_C = 8 \cdot \frac{V_A}{4} = 2 V_A}$$

3) $$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_{CA}|}{Q_{AB}}$$

$$Q_{CA} = \int_C^A (\cancel{c_v\, dT} + p\, dV) = \int_C^A p\, dV = R T_A \int_C^A \frac{dV}{V} = R T_A \ln \frac{V_A}{V_C}$$

$$Q_{CA} = R T_A \ln \frac{1}{2} = - R T_A \ln 2$$

$$\text{Area } \Delta ABC = Q_{Netto} = Q_{AB} + Q_{CA}$$

$$Q_{AB} + Q_{CA} = \frac{1}{2}(T_B - T_C)(S_C - S_A) = \frac{1}{2}(4T_A - T_A)(S_B - S_A) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3T_A \cdot R \ln 2 = \frac{3}{2} R T_A \ln 2$$

$$Q_{AB} = \frac{3}{2} R T_A \ln 2 + R T_A \ln 2 = \frac{5}{2} R T_A \ln 2$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CA}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{\cancel{R T_A \ln 2}}{\frac{5}{2}\cancel{R T_A \ln 2}} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$$