Problema N° 28

Una mole di gas ideale monoatomico compie un ciclo reversibile costituito dalle seguenti trasformazioni:

A-B) espansione di equazione $aV^3 = RT$ (con a = costante positiva), da uno stato **A** a pressione $p_A = 1$ atm e volume $V_A = 2$ litri, allo stato **B** di volume $V_B = 4$ litri;

B-C) isobara con $V_C = 3V_B$;

C-D) isocora;

D-A) isobara.

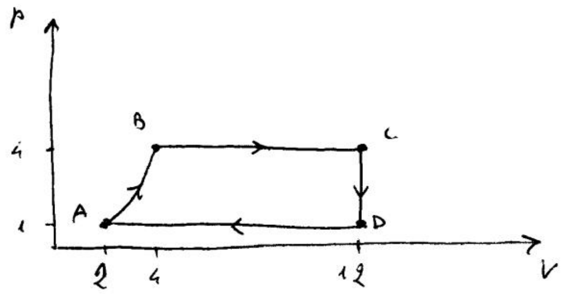
Determinare:

1) il valore della costante a ed il lavoro del gas nella trasformazione **A-B**;
2) il rendimento del ciclo termodinamico;
3) il calore molare del gas relativamente alla trasformazione **A-B**;
4) la variazione di entropia dell'ambiente durante la trasformazione **C-D**.

Soluzione

1) Si ha $aV^3 = RT = pV \Longrightarrow p = aV^2 \Rightarrow a = \frac{p}{V^2} = \frac{p_A}{V_A^2} = \frac{1}{4}$ atm ℓ^{-2}

Disegno il ciclo (reversibile)



$p_A = 1$ atm $\quad V_A = 2\,\ell \quad T_A = \frac{p_A V_A}{R} = \frac{2}{R}$

$p_B = \frac{1}{4} V_B^2 = 4$ atm $\quad V_B = 4\,\ell \quad T_B = \frac{p_B V_B}{R} = \frac{16}{R}$

$p_C = 4$ atm $\quad V_C = 12\,\ell \quad T_C = \frac{p_C V_C}{R} = \frac{48}{R}$

$p_D = 1$ atm $\quad V_D = 12\,\ell \quad T_D = \frac{p_D V_D}{R} = \frac{12}{R}$

$$L_{AB} = \int_A^B p\,dV = \int_2^4 \frac{1}{4} V^2 dV = \frac{14}{3} \ \ell \times \text{atm}$$

2) $\eta = L_{tot} / Q_{ass}$

$$\left.\begin{aligned} L_{tot} &= L_{AB} + L_{BC} + \cancel{L_{CD}} + L_{DA} \\ L_{BC} &= p_B (V_C - V_B) = 32 \ \ell \times \text{atm} \\ L_{DA} &= p_A (V_A - V_D) = -10 \ \ell \times \text{atm} \end{aligned}\right\} L_{tot} = \frac{14}{3} + 32 - 10 = \frac{80}{3} \ \ell \times \text{atm}$$

$Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{BC}$ $\qquad$ (infatti $Q_{CD} < 0$ e $Q_{DA} < 0$)

$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + L_{AB} = n c_V (T_B - T_A) + L_{AB} = \frac{3}{2} R (T_B - T_A) + L_{AB} = \frac{77}{3} \ \ell \times \text{atm} > 0$

$Q_{BC} = n c_p (T_C - T_B) = \frac{5}{2} R (T_C - T_B) = 80 \ \ell \times \text{atm} > 0$

$Q_{CD} = n c_V (T_D - T_C) + \cancel{L_{CD}} = \frac{3}{2} R (T_D - T_C) < 0$ calore ceduto

$Q_{DA} = n c_p (T_A - T_D) < 0$ calore ceduto

$$\eta = \frac{\frac{80}{3}}{\frac{77}{3} + 80} = \frac{80}{317} \simeq 0{,}252 \simeq 25\%$$

3) $$c = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{AB} = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{AB}$$

Ma $dQ = c_V\,dT + p\,dV \qquad \frac{dQ}{dT} = c_V + p \frac{dV}{dT}$

Dalla $aV^3 = RT$ differenziando $3aV^2 dV = R\,dT$ si ha $\frac{dV}{dT} = \frac{R}{3aV^2} = \frac{R}{3p}$

Quindi $\frac{dQ}{dT} = c_V + p \frac{R}{3p} = c_V + \frac{R}{3} = \frac{3}{2} R + \frac{1}{3} R = \frac{11}{6} R \simeq 0{,}15 \frac{\ell \times \text{atm}}{\text{mole K}}$

4) $\Delta S^{amb}_{CD} = \cancel{\Delta S^{U}_{CD}} - \Delta S^{gas}_{CD} = -\Delta S^{gas}_{CD}$ essendo CD reversibile

$$\Delta S^{gas}_{CD} = c_V \ln \frac{T_D}{T_C} + \cancel{R \ln \frac{V_D}{V_C}} = \frac{3}{2} R \ln \frac{12}{48} = \frac{3}{2} R \ln \frac{1}{4} = -3R \ln 2 \simeq -0{,}17 \ \frac{l \times atm}{K}$$