

## Problema n. 6

Una mole di gas ideale mono atomico compie una espansione reversibile regolata dall'equazione

$$p(V - V_0) = -K \quad \text{con } V_0 = 5 \text{ l e } K = 456 \text{ J dallo stato iniziale in cui}$$

$$V_1 = 1 \text{ l e } p_1 = 1.14 \text{ bar } (\approx 1.13 \text{ atm}) \text{ allo stato finale } V_2 = 4 \text{ l e } p = p_2 .$$

Calcolare il lavoro compiuto dal gas e la temperatura finale. Determinare inoltre il calore scambiato dal gas con l'ambiente.

### Soluzione

Si ha  $L = \int_I^F p dV$ . Ma  $p(V - V_0) = -K$  da cui  $\rightarrow p = -\frac{K}{(V - V_0)}$  per cui si avrà:

$$L = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{K}{(V - V_0)} dV = -K \left[ \ln V - V_0 \right]_{V_1}^{V_2} = -K \ln \frac{V_2 - V_0}{V_1 - V_0} \text{ e, numericamente:}$$

$$L = -456 \ln \frac{4 - 5}{1 - 5} = -456 \ln \frac{1}{4} = 632.2 \text{ J (Poiché } L > 0 \text{ il lavoro è fatto dal gas)}$$

Per trovare la temperatura finale  $T_F = T_2$  considero l'equazione di stato dei gas ideali  $pV = nRT$  unitamente alla  $p(V - V_0) = -K$ . Nel caso in oggetto, per l'equazione di stato posso scrivere:

$$p_2 V_2 = RT_2 \rightarrow T_2 = \frac{p_2 V_2}{R}, \text{ e per l'equazione della trasformazione compiuta dal gas } p_2 = -\frac{K}{V_2 - V_0} .$$

$$\text{Si ottiene pertanto } T_2 = -K \frac{V_2}{R (V_2 - V_0)} = -456 \frac{4}{8.31 \times (4 - 5)} = 219.5 \text{ K} .$$

Per il primo principio della termodinamica si ha:  $Q = L + \Delta U$  in cui  $\Delta U = n c_v \Delta T$ .

Ma la variazione di temperatura  $\Delta T = T_2 - T_1$  è ricavabile se è nota la  $T_1$ .

$$\text{Poiché il gas è ideale si può scrivere, dall'equazione di stato: } T_1 = \frac{p_1 V_1}{R} = \frac{1.14 \times 1}{0.0821} = 13.89 \text{ K} .$$

Essendo il gas mono atomico  $c_v = \frac{3}{2} R$ , quindi

$$\Delta U = n c_v \Delta T = 1 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (219.5 - 13.9) = 2563 \text{ J} . \text{ Il calore scambiato dal gas con}$$

il suo ambiente è pertanto :  $Q = L + \Delta U = 632.2 + 2563 = 3194 \text{ J}$  . Essendo  $Q > 0$  questo è calore ricevuto dal gas