## Problema n. 7

Una mole di gas perfetto monoatomico compie il seguente ciclo di trasformazioni:

AB compressione reversibile (dallo stato A allo stato B) di equazione $p = K_1 V^2 + K_2 V + K_3$, dove $K_1 = 0.1 \quad atm/\ell^2$, $K_2 = 0.5 \quad atm/\ell$, $K_3 = 1.4 \quad atm$.

Sono noti $V_A = 6 \quad \ell$ e $V_B = 4 \quad \ell$ degli stati A e B.

BC Espansione isobara reversibile, fino a che $V_C = V_A$.

CA Isocora reversibile fino a tornare allo stato iniziale A.

Si determini il lavoro compiuto dal gas durante l'intero ciclo e si disegni, qualitativamente, il ciclo nel piano (p, V).

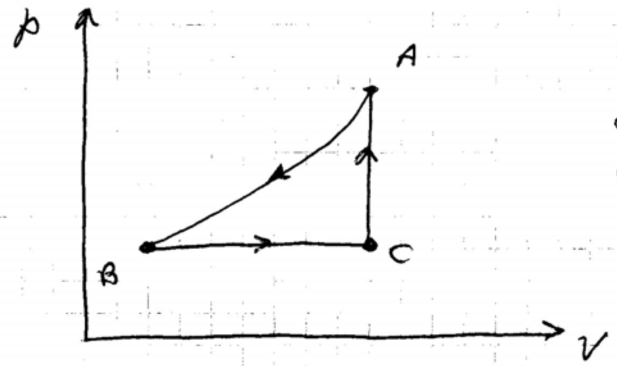
Si verifichi inoltre che il calore totale scambiato dal gas con l'ambiente è pari al lavoro complessivo.

## Soluzione

Determiniamo la situazione, nel piano pV, dei due punti (stati) A e B.

$p_A = K_1 V_A^2 + K_2 V_A + K_3$ per $V_A = 6\ell \Rightarrow p_A = 8$ atm

$p_B = K_1 V_B^2 + K_2 V_B + K_3$ per $V_B = 4\ell \Rightarrow p_B = 5$ atm




Questo ci consente di disegnare il ciclo compiuto dal gas (qualitativamente)

Troviamo i lavori associati alle tre trasformazioni (lavori del gas)

$$L_{AB} = \int_A^B p\,dV = \int_{V_A}^{V_B} (K_1 V^2 + K_2 V + K_3)\,dV =$$

$$= \frac{K_1}{3}\left(V_B^3 - V_A^3\right) + \frac{K_2}{2}\left(V_B^2 - V_A^2\right) + K_3\left(V_B - V_A\right) =$$

$$= -12{,}87 \; l \times atm$$

$$L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p\,dV = p_B\left(V_C - V_B\right) = 5 \times (6-4) = 10 \; l \times atm$$

$$L_{CA} = 0 \quad \text{perché} \quad V_A = V_C$$

Il lavoro totale compiuto dal gas nel ciclo è

$$L_{totale} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = -2{,}87 \; l \times atm$$
$$= -290{,}5 \; J$$

(Il segno $-$ indica che il ciclo è antiorario)

Naturalmente, poiché per un ciclo la $\Delta U$ del sistema termodinamico è nulla, si avrebbe subito, dal 1° principio della termodinamica $Q = L + \Delta U \Rightarrow Q_{ciclo} = L_{ciclo}$

Verifichiamolo numericamente, calcolando i calori scambiati tra gas ed ambiente in ogni trasformazione.

Si usa sempre la $Q = L + \Delta U$ dove $\Delta U = n c_V \Delta T$

Trasformazione AB

$Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB}$ dove $\Delta U_{AB} = n c_V (T_B - T_A)$

Essendo il gas monoatomico avrò $c_V = \frac{3}{2} R$

Dall'eq. di stato ottengo $p_A V_A = n R T_A$ e $p_B V_B = n R T_B$

da cui

$$T_A = \frac{p_A V_A}{n R} = \frac{8 \times 6}{1 \times 0{,}0821} = 584{,}65 \ K$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{n R} = \frac{5 \times 4}{1 \times 0{,}0821} = 243{,}61 \ K$$

$$\Delta U_{AB} = 1 \times \frac{3}{2} \times 0{,}0821 \times (243{,}61 - 584{,}65) = -42 \ l \times atm$$

Pertanto

$$Q_{AB} = -12{,}87 - 42 = -54{,}87 \ l \times atm$$

Trasformazione BC

$Q_{BC} = L_{BC} + \Delta U_{BC}$ e $\Delta U_{BC} = n c_V (T_C - T_B)$

Ancora dalla $pV = nRT$ si ottiene

$$T_C = \frac{p_C V_C}{n R} = \frac{p_B V_A}{n R} = \frac{5 \times 6}{1 \times 0{,}0821} = 365{,}41 \ K$$

$$\Delta U_{BC} = 1 \times \frac{3}{2} \times 0{,}0821 \times (365{,}41 - 243{,}61) = 15 \ l \times atm$$

e $Q_{BC} = L_{BC} + \Delta U_{BC} = 10 + 15 = 25 \ l \times atm$

Trasformazione CA

$Q_{CA} = L_{CA} + \Delta U_{CA}$ dove $\Delta U_{CA} = n c_V (T_A - T_C)$

$$\Delta U_{CA} = 1 \times \frac{3}{2} \times 0{,}0821 \times (584{,}65 - 365{,}41) = 27 \ l \times atm$$

e $Q_{CA} = 0 + 27 = 27 \ l \times atm$

Intero ciclo $Q_{totale} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}$

$$Q_{totale} = -54{,}87 + 27 + 25 = -2{,}87 \ l \times atm$$